

2—1 设水位自动控制系统原理方案如图 1—18 所示，其中 Q_1 为水箱的进水流量， Q_2 为水箱的用水流量， H 为水箱中实际水面高度。假定水箱横截面积为 F ，希望水面高度为 H_0 ，与 H_0 对应的水流量为 Q_0 ，试列出水箱的微分方程。

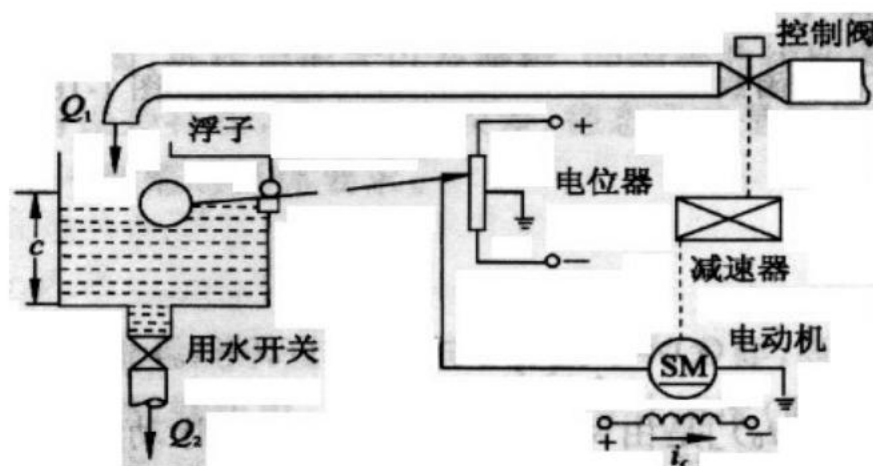


图 1-18 液位自动控制系统

解 当 $Q_1 = Q_2 = Q_0$ 时， $H = H_0$ ；当 $Q_1 \neq Q_2$ 时，水面高度 H 将发生变化，其变化率与流量差 $Q_1 - Q_2$ 成正比，此时有

$$F \frac{d(H - H_0)}{dt} = (Q_1 - Q_0) - (Q_2 - Q_0)$$

于是得水箱的微分方程为

$$F \frac{dH}{dt} = Q_1 - Q_2$$

2—2 设机械系统如图 2—57 所示，其中 x_i 为输入位移， x_o 为输出位移。试分别列写各系统的微分方程式及传递函数。

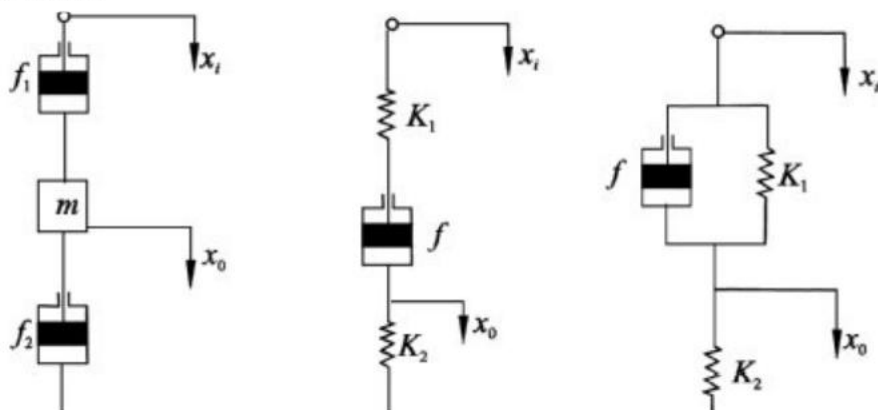


图 2—57 机械系统

解 ①图 2—57(a)：由牛顿第二运动定律，在不计重力时，可得

$$f_1(\dot{x}_i - \dot{x}_0) - f_2\dot{x}_0 = m\ddot{x}_0$$

整理得

$$m\frac{d^2x_0}{dt^2} + (f_1 + f_2)\frac{dx_0}{dt} = f_1\frac{dx_i}{dt}$$

将上式进行拉氏变换，并注意到运动由静止开始，即初始条件全部为零，可得

$$[ms^2 + (f_1 + f_2)s]X_0(s) = f_1sX_i(s)$$

于是传递函数为

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{f_1}{ms + f_1 + f_2}$$

②图 2—57(b)：其上半部弹簧与阻尼器之间，取辅助点 A，并设 A 点位移为 x ，方向朝下；而在其下半部工。引出点处取为辅助点 B。则由弹簧力与阻尼力平衡的原则，从 A 和 B 两点可以分别列出如下原始方程：

$$K_1(x_i - x) = f(\dot{x} - \dot{x}_0)$$

$$K_2x_0 = f(\dot{x} - \dot{x}_0)$$

消去中间变量 x ，可得系统微分方程

$$f(K_1 + K_2)\frac{dx_0}{dt} + K_1K_2x_0 = K_1f\frac{dx_i}{dt}$$

对上式取拉氏变换，并计及初始条件为零，得系统传递函数为

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{fK_1s}{f(K_1 + K_2)s + K_1K_2}$$

③图 2—57(c)：以 x_0 的引出点作为辅助点，根据力的平衡原则，可列出如下原始方程：

$$K_1(x_i - x) + f(\dot{x}_i - \dot{x}_0) = K_2x_0$$

移项整理得系统微分方程

$$f\frac{dx_0}{dt} + (K_1 + K_2)x_0 = f\frac{dx_i}{dt} + K_1x_i$$

对上式进行拉氏变换，并注意到运动由静止开始，即

$$x_i(0) = x_0(0) = 0$$

则系统传递函数为

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{fs + K_1}{fs + (K_1 + K_2)}$$

2-3 试证明图 2-58(a) 的电网络与 (b) 的机械系统有相同的数学模型。

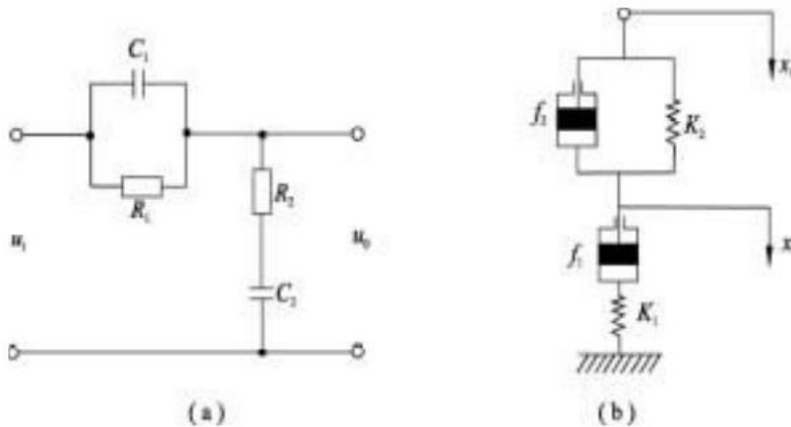


图 2-58 电网络与机械系统

解：(a)：利用运算阻抗法得：
$$Z_1 = R_1 // \frac{1}{C_1 s} = \frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} = \frac{R_1}{T_1 s + 1}$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2 s} = \frac{1}{C_2 s} (R_2 C_2 s + 1) = \frac{1}{C_2 s} (T_2 s + 1)$$

所以：
$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1}{C_2 s} (T_2 s + 1)}{\frac{R_1}{T_1 s + 1} + \frac{1}{C_2 s} (T_2 s + 1)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{R_1 C_2 s + (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

(b)以 K_1 和 f_1 之间取辅助点 A，并设 A 点位移为 x ，方向朝下；根据力的平衡原则，可列出如下原始方程：

$$K_2(x_i - x_0) + f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) = f_1(\dot{x}_0 - \dot{x}) \quad (1)$$

$$K_1 x = f_1(\dot{x}_0 - \dot{x}) \quad (2)$$

所以 $K_2(x_i - x_0) + f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) = K_1 x \quad (3)$

对 (3) 式两边取微分得

$$K_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) + f_2(\ddot{x}_i - \ddot{x}_0) = K_1 \dot{x} \quad (4)$$

将 (4) 式代入 (1) 式中得

$$K_1 K_2(x_i - x_0) + K_1 f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) = K_1 f_1 \dot{x}_0 - f_1 K_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) - f_1 f_2(\ddot{x}_i - \ddot{x}_0)$$

整理上式得

$$\begin{aligned} f_1 f_2 \ddot{x}_0 + f_1 K_2 \dot{x}_0 + K_1 f_1 \dot{x}_0 + K_1 f_2 \dot{x}_0 + K_1 K_2 x_0 \\ = f_1 f_2 \ddot{x}_i + f_1 K_2 \dot{x}_i + K_1 f_2 \dot{x}_i + K_1 K_2 x_i \end{aligned}$$

对上式去拉氏变换得

$$\begin{aligned} & [f_1 f_2 s^2 + (f_1 K_2 + K_1 f_1 + K_1 f_2)s + K_1 K_2] X_0(s) \\ &= [f_1 f_2 s^2 + (f_1 K_2 + K_1 f_2)s + K_1 K_2] X_i(s) \end{aligned}$$

所以：

$$\begin{aligned} \frac{X_0(s)}{X_i(s)} &= \frac{f_1 f_2 s^2 + (f_1 K_2 + K_1 f_1 + K_1 f_2)s + K_1 K_2}{f_1 f_2 s^2 + (f_1 K_2 + K_1 f_1 + K_1 f_2)s + K_1 K_2} = \frac{\frac{f_1 f_2}{K_1 K_2} s^2 + (\frac{f_1}{K_1} + \frac{f_2}{K_2})s + 1}{\frac{f_1 f_2}{K_1 K_2} s^2 + (\frac{f_1}{K_1} + \frac{f_2}{K_2})s + 1 + \frac{f_1}{K_2}} \\ &= \frac{(\frac{f_1}{K_1} s + 1)(\frac{f_2}{K_2} s + 1)}{(\frac{f_1}{K_1} s + 1)(\frac{f_2}{K_2} s + 1) + \frac{f_1}{K_2}} \end{aligned}$$

所以图 2-58(a) 的电网与(b) 的机械系统有相同的数学模型。

2—4 试分别列写图 2-59 中个无源网络的微分方程式。

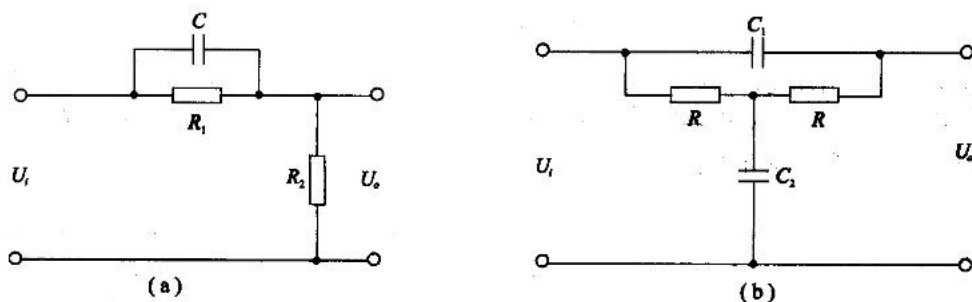


图 2-59 无源网络

解：(a)：列写电压平衡方程：

$$u_i - u_0 = u_C \quad i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad i_{R1} = \frac{u_C}{R_1}$$

$$u_0 = (i_C + i_{R1})R_2 = \left[C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R_1} \right] R_2 = \left[C \frac{d(u_i - u_0)}{dt} + \frac{u_i - u_0}{R_1} \right] R_2$$

整理得：

$$CR_2 \frac{du_0}{dt} + \left(C \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) u_0 = CR_2 \frac{du_i}{dt} + C \frac{R_2}{R_1} u_i$$

(b)：列写电压平衡方程：

$$u_i - u_0 = u_{C1} \quad (1) \quad i_{C1} = C_1 \frac{du_{C1}}{dt} \quad (2)$$

$$i_{C2} = \frac{u_{C1} + i_{C1}R}{R} + i_{C1} = \frac{u_{C1}}{R} + 2i_{C1} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = C_2 \frac{d(u_0 - i_{C1}R)}{dt} \quad (3)$$

$$\text{即: } \frac{u_{C1}}{R} + 2i_{C1} = C_2 \frac{d(u_0 - i_{C1}R)}{dt} \quad (4)$$

将 (1) (2) 代入 (4) 得:

$$\frac{u_i - u_0}{R} + 2C_1 \frac{d(u_i - u_0)}{dt} = C_2 \frac{du_0}{dt} - C_1 C_2 R \frac{d^2 u_{C1}}{dt^2}$$

$$\text{即: } \frac{u_i}{R} - \frac{u_0}{R} + 2C_1 \frac{du_i}{dt} - 2C_1 \frac{du_0}{dt} = C_2 \frac{du_0}{dt} - C_1 C_2 R \frac{d^2 u_i}{dt^2} + C_1 C_2 R \frac{d^2 u_0}{dt^2}$$

整理得:

$$C_1 C_2 R \frac{d^2 u_0}{dt^2} + (C_2 + 2C_1) \frac{du_0}{dt} + \frac{u_0}{R} = C_1 C_2 R \frac{d^2 u_i}{dt^2} + \frac{u_i}{R} + 2C_1 \frac{du_i}{dt}$$

2-5 设初始条件均为零，试用拉氏变换法求解下列微分方程式，并概略绘制 $x(t)$ 曲线，指出各方程式的模式。

$$(1) \quad 2\dot{x}(t) + x(t) = t;$$

解：对上式两边去拉氏变换得：

$$(2s+1)X(s) = 1/s^2 \rightarrow X(s) = \frac{1}{s^2(2s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{4}{2s+1}$$

运动模式 $e^{-0.5t}$

$$\text{所以: } x(t) = t - 2(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$$

$$(2) \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t)。$$

解：对上式两边去拉氏变换得：

$$(s^2 + s + 1)X(s) = 1 \rightarrow X(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{(s + 1/2)^2 + 3/4}$$

$$\text{运动模式 } e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\text{所以: } x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$(3) \quad \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1(t)。$$

解：对上式两边去拉氏变换得：

$$(s^2 + 2s + 1)X(s) = \frac{1}{s} \rightarrow X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

运动模态 $e^{-t}(1+t)$

所以： $x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} = 1 - e^{-t}(1+t)$

2-6 在液压系统管道中，设通过阀门的流量满足如下流量方程：

$$Q = K\sqrt{P}$$

式中 K 为比例常数， P 为阀门前后的压差。若流量 Q 与压差 P 在其平衡点 (Q_0, P_0) 附近作微小变化，试导出线性化方程。

解：

设正常工作点为 A，这时 $Q_0 = K\sqrt{P_0}$

在该点附近用泰勒级数展开近似为：

$$y = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0)$$

即 $Q - Q_0 = K_1(P - P_0)$

$$\text{其中 } K_1 = \left(\frac{dQ}{dP} \right)_{P=P_0} = \frac{1}{2} K \frac{1}{\sqrt{P_0}}$$

2-7 设弹簧特性由下式描述：

$$F = 12.65y^{1.1}$$

其中， F 是弹簧力； y 是变形位移。若弹簧在变形位移附近作微小变化，试推导的线性化方程。

解：

设正常工作点为 A，这时 $F_0 = 12.65y_0^{1.1}$

在该点附近用泰勒级数展开近似为：

$$y = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0)$$

即 $F - F_0 = K_1(y - y_0)$

$$\text{其中 } K_1 = \left(\frac{dF}{dy} \right)_{y=y_0} = 12.65 \times 1.1 y_0^{0.1} = 13.915 \times 1.1 y_0^{0.1}$$

2-8 设晶闸管三相桥式全控整流电路的输入量为控制角，输出量为空载整流电压，它们之间的关系为：

$$e_d = E_{d0} \cos \alpha$$

式中是整流电压的理想空载值，试推导其线性化方程式。

解：

设正常工作点为 A，这时 $E_d = E_{d0} \cos \alpha_0$

在该点附近用泰勒级数展开近似为：

$$y = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0)$$

$$\text{即 } e_d - E_{d_0} \cos \alpha_0 = K_s (\alpha - \alpha_0)$$

$$\text{其中 } K_s = \left(\frac{de_d}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -E_{d_0} \sin \alpha_0$$

2-9 若某系统在阶跃输入 $r(t)=1(t)$ 时，零初始条件下的输出响应 $c(t)=1-e^{-2t}+e^{-t}$ ，试求系统的传递函数和脉冲响应。

解：对输出响应取拉氏变换的：

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)} \quad \text{因为： } C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{s}\Phi(s)$$

$$\text{所以系统的传递函数为： } \Phi(s) = \frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{s}{(s+1)(s+2)} = 1 - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$\text{系统的脉冲响应为： } g(t) = \delta(t) - e^{-t} + e^{-2t}$$

2-10 设系统传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

且初始条件 $c(0)=1$, $\dot{c}(0)=0$ 。试求阶跃输入 $r(t)=1(t)$ 时，系统的输出响应 $c(t)$ 。

解：由系统的传递函数得：

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 2r(t) \quad (1)$$

对式 (1) 取拉氏变换得：

$$s^2C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) + 3sC(s) - 3c(0) + 2C(s) = 2R(s) \quad (2)$$

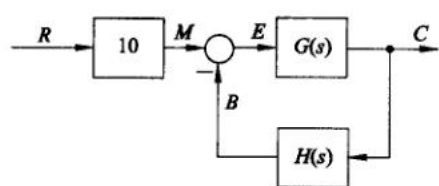
将初始条件代入 (2) 式得

$$(s^2+3s+2)C(s) + s + 3 = 2\frac{1}{s}$$

$$\text{即： } C(s) = \frac{2-s^2-3s}{s(s^2+3s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{2s+6}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$\text{所以： } c(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

2-11 在图 2-60 中，已知和两方框相对应的微分方程分别是



$$6 \frac{dc(t)}{dt} + 10c(t) = 20e(t)$$

$$20 \frac{db(t)}{dt} + 5b(t) = 10c(t)$$

图 2-60 题 2-11 系统结构图

且初始条件均为零，试求传递函数 $C(s)/R(s)$ 及 $E(s)/R(s)$

解：系统结构图及微分方程得：

$$G(s) = \frac{20}{6s+10} \quad H(s) = \frac{10}{20s+5}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{10 \frac{20}{6s+10}}{1 + \frac{20}{6s+10} \frac{10}{20s+5}}$$

$$= \frac{200(20s+5)}{(6s+10)(20s+5) + 200} = \frac{200(20s+5)}{120s^2 + 230s + 250} = \frac{10(20s+5)(6s+10)}{(6s+10)(20s+5) + 200} = \frac{1200s^2 + 1500s + 500}{120s^2 + 230s + 250}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{10}{1+G(s)H(s)} = \frac{10}{1 + \frac{20}{6s+10} \frac{10}{20s+5}}$$

2-12 求图 2-61 所示有源网络的传递函数

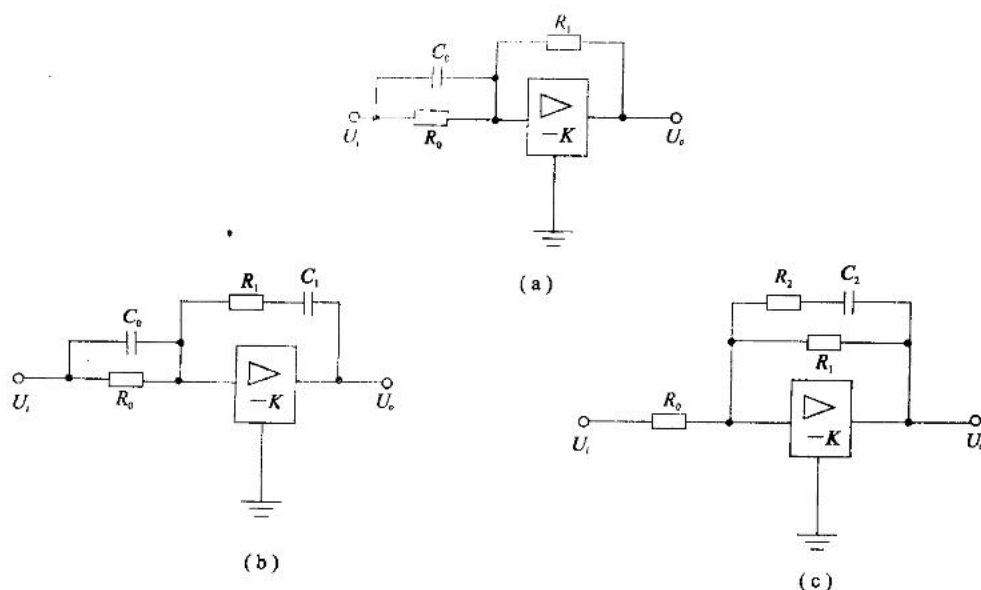


图 2-61 有源网络

解：(a) $Z_0 = R_0 // \frac{1}{C_0 s} = \frac{R_0 \frac{1}{C_0 s}}{R_0 + \frac{1}{C_0 s}} = \frac{R_0}{T_0 s + 1} \quad T_0 = R_0 C_0$

$$\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_1}{Z_0} = -\frac{R_1}{R_0}(T_0s+1)$$

$$(b) \quad Z_0 = R_0 // \frac{1}{C_0s} = \frac{R_0 \frac{1}{C_0s}}{R_0 + \frac{1}{C_0s}} = \frac{R_0}{T_0s+1} \quad T_0 = R_0C_0$$

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{C_1s} = \frac{T_1s+1}{C_1s} \quad T_1 = R_1C_1$$

$$\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_1}{Z_0} = -\frac{1}{R_0C_1s}(T_1s+1)(T_0s+1)$$

$$Z_{12} = R_1 // (R_2 + \frac{1}{C_2s}) = R_1 // \frac{T_2s+1}{C_2s}$$

$$(c) \quad \frac{R_1 \frac{T_2s+1}{C_2s}}{R_1 + \frac{T_2s+1}{C_2s}} = \frac{R_1(T_2s+1)}{T_2s+R_1+1} \quad T_2 = R_2C_2$$

$$\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_{12}}{R_0} = -\frac{R_1}{R_0} \frac{T_2s+1}{T_2s+R_1+1}$$

2-13 由运算放大器组成的控制系统模拟电路如图2-62所示，试求闭环传递函数 $U_c(s) / U_r(s)$ 。

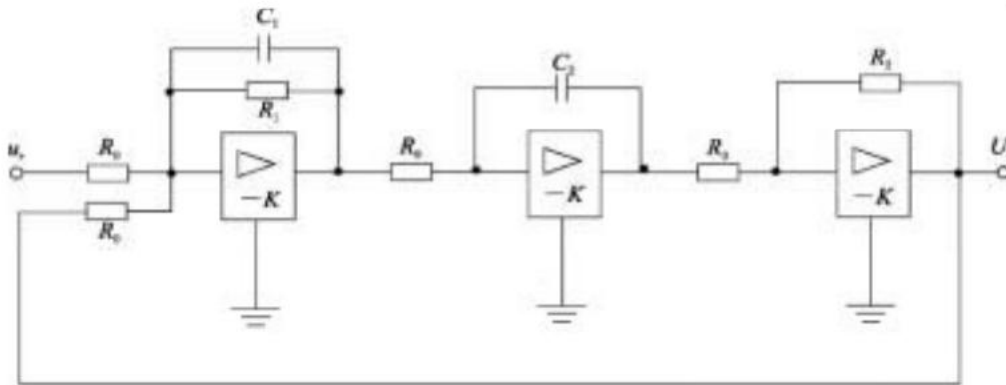


图2-62 控制系统模拟电路

$$\text{解: } \frac{U_1(s)}{U_0(s)+U_i(s)} = -\frac{Z_1}{R_0} \quad (1) \quad \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2}{R_0} \quad (2) \quad \frac{U_0(s)}{U_2(s)} = -\frac{R_2}{R_0} \quad (3)$$

式 (1) (2) (3) 左右两边分别相乘得

$$\frac{U_0(s)}{U_0(s) + U_i(s)} = -\frac{Z_1 Z_2 R_2}{R_0 R_0 R_0} \text{ 即}$$

$$\frac{U_0(s) + U_i(s)}{U_0(s)} = -\frac{R_0^3}{Z_1 Z_2 R_2} \quad 1 + \frac{U_i(s)}{U_0(s)} = -\frac{R_0^3}{Z_1 Z_2 R_2}$$

$$\text{所以: } \frac{U_i(s)}{U_0(s)} = -\frac{R_0^3}{Z_1 Z_2 R_2} - 1$$

$$\begin{aligned} \frac{U_0(s)}{U_i(s)} &= -\frac{1}{\frac{R_0^3}{Z_1 Z_2 R_2} + 1} = -\frac{Z_1 Z_2 R_2}{R_0^3 + Z_1 Z_2 R_2} = -\frac{\frac{R_1}{T_1 s + 1} \frac{1}{C_2 s} R_2}{R_0^3 + \frac{R_1}{T_1 s + 1} \frac{1}{C_2 s} R_2} \\ &= -\frac{R_1 R_2}{(T_1 s + 1) C_2 s R_0^3 + R_1 R_2} \end{aligned}$$

2-14 试参照例2-2给出的电枢控制直流电动机的三组微分方程式，画出直流电动机的结构图，并由结构图等效变换求出电动机的传递函数 $\Omega_m(s)/U_a(s)$ 和 $\Omega_m(s)/M_c(s)$

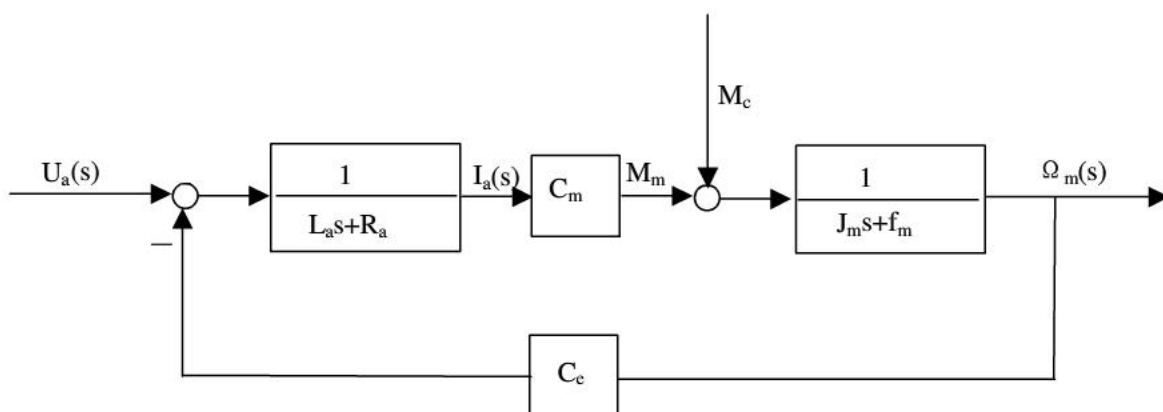
解：由公式 (2-2)、(2-3)、(2-4) 取拉氏变换

$$\frac{U_a(s) - E_a(s)}{L_a s + R_a} = I_a(s) \quad E_a(s) = C_e \Omega_m(s)$$

$$C_m I_a(s) = M_m(s)$$

$$\frac{M_m(s) - M_c(s)}{J_m s + f_m} = \Omega_m(s)$$

得到系统结构图如下：



$$\frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{C_m}{L_a s + R_a} \frac{1}{J_m s + f_m}}{1 + \frac{C_e C_m}{L_a s + R_a} \frac{1}{J_m s + f_m}} = \frac{C_m}{(L_a s + R_a)(J_m s + f_m) + C_e C_m}$$

$$\frac{\Omega_m(s)}{M_c(s)} = \frac{\frac{1}{J_m s + f_m}}{1 + \frac{C_e C_m}{L_a s + R_a} \frac{1}{J_m s + f_m}} = \frac{L_a s + R_a}{(L_a s + R_a)(J_m s + f_m) + C_e C_m}$$

2-15 某位置随动系统原理方块图如图2-63所示。已知电位器最大工作角度 $\theta_{\max} = 330^\circ$ ，功率放大级放大系数为 K_3 ，要求：

- (1) 分别求出电位器传递系数 K_0 、第一级和第二级放大器的比例系数 K_1 和 K_2 ；
- (2) 画出系统结构图；
- (3) 简化结构图，求系统传递函数 $\theta_0(s)/\theta_i(s)$ 。

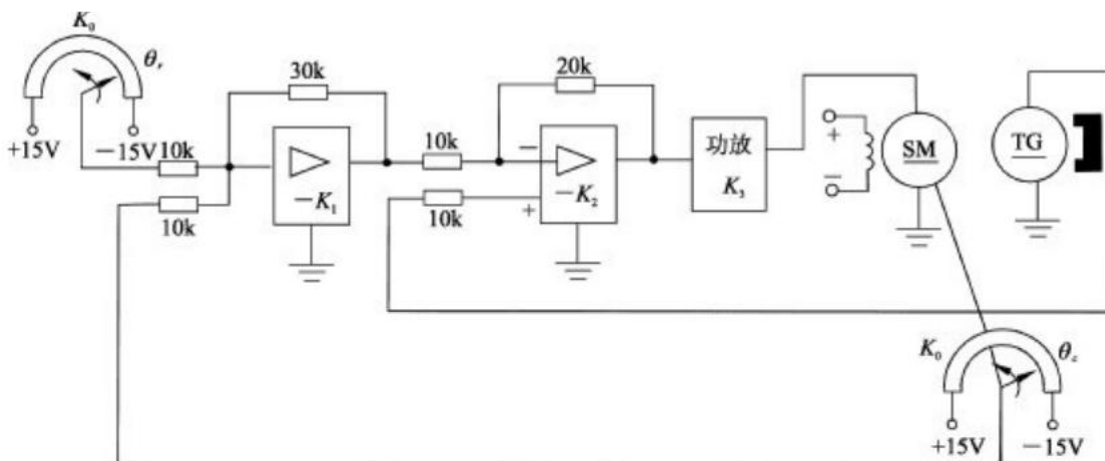


图2-63 位置随动系统原理图

解：

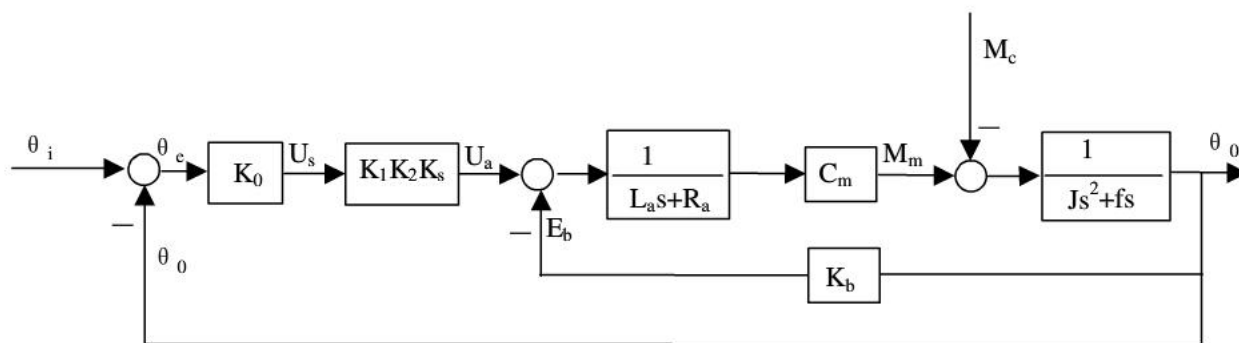
$$(1) K_0 = \frac{15V}{165^\circ} \quad K_1 = \frac{30}{10} = 3 \quad K_2 = \frac{20}{10} = 2$$

$$(2) \theta_e(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s) \quad U_s(s) = K_0 \theta_e(s) \quad U_a(s) = K_1 K_2 K_3 U_s(s)$$

$$U_a(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + E_b(s) \quad M_m(s) = C_m I_a(s)$$

$$J s^2 \theta_0(s) + f s \theta_0(s) = M_m(s) - M_c(s) \quad E_b(s) = K_b \theta_0(s)$$

系统结构图如下：



(3) 系统传递函数 $\theta_0(s)/\theta_i(s)$

$$\begin{aligned} \frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)} &= \frac{K_0 K_1 K_2 K_s \frac{C_m}{s(L_a s + R_a)(Js + f)}}{1 + \frac{C_m K_b}{s(L_a s + R_a)(Js + f)}} = \frac{K_0 K_1 K_2 K_s C_m}{s(L_a s + R_a)(Js + f) + C_m K_b} \\ &= \frac{K_0 K_1 K_2 K_s \frac{C_m}{s(L_a s + R_a)(Js + f)}}{1 + \frac{C_m K_b}{s(L_a s + R_a)(Js + f)}} = \frac{K_0 K_1 K_2 K_s C_m}{s(L_a s + R_a)(Js + f) + C_m K_b + K_0 K_1 K_2 K_s C_m} \end{aligned}$$

2-16 设直流电动机双闭环调速系统的原理线路如图 2-64 所示：要求

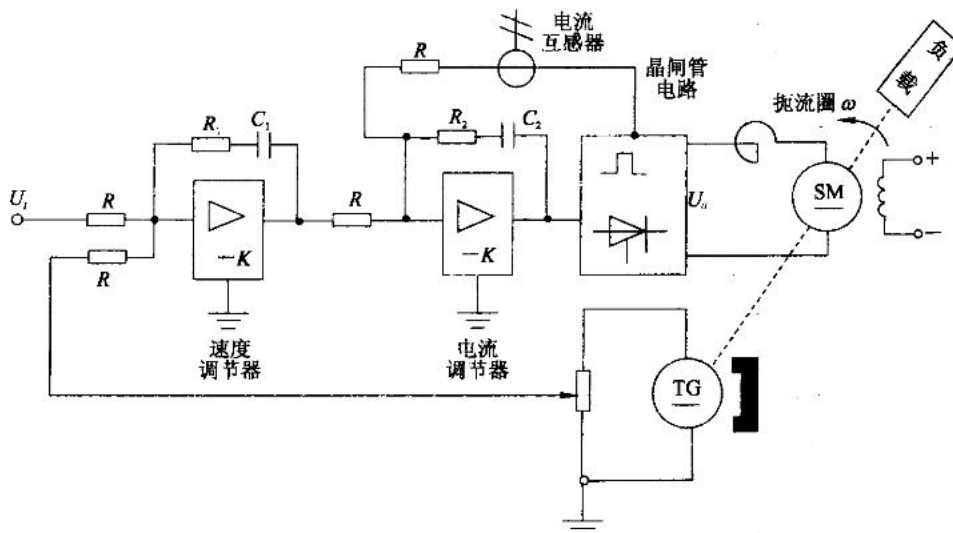


图 2-64 直流电动机调速系统原理图

- (1) 分别求速度调节器和电流调节器的传递函数
- (2) 画出系统结构图（设可控硅电路传递函数为 $K_3/(\tau_3 s + 1)$ ；电流互感器和测速发电机的传递函数分别为 K_4 和 K_5 ；直流电动机的结构图用题 2-14 的结果）；

(3) 简化结构图，求系统传递函数 $\Omega(s)/U_i(s)$

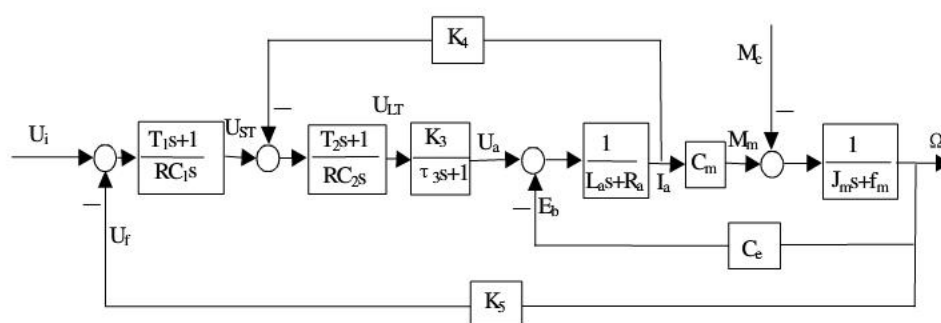
解：(1) 速调

$$\frac{U_{ST}(s)}{U_i(s) - U_f(s)} = \frac{Z_1}{R} = \frac{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{R} = \frac{R_1 C_1 s + 1}{R C_1 s} = \frac{T_1 s + 1}{R C_1 s}$$

流调

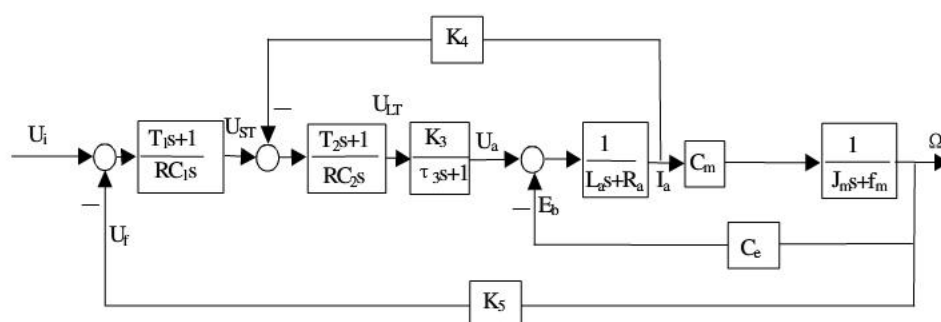
$$\frac{U_{LT}(s)}{U_{ST}(s) - U_{dfk}(s)} = \frac{Z_2}{R} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{R C_2 s} = \frac{T_2 s + 1}{R C_2 s}$$

(2) 系统结构图如下：

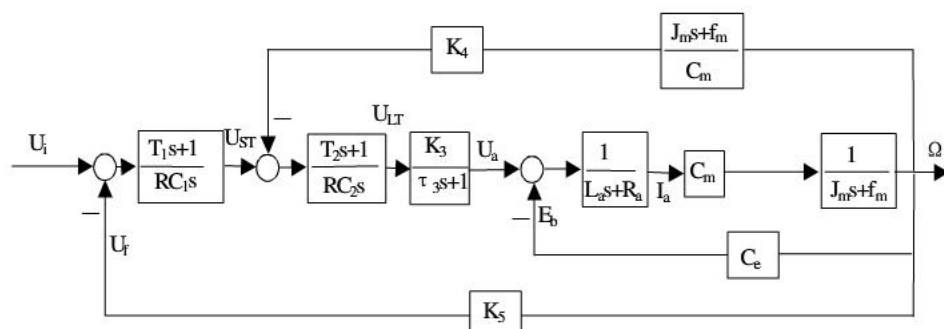


(3) 简化结构图，求系统传递函数 $\Omega(s)/U_i(s)$

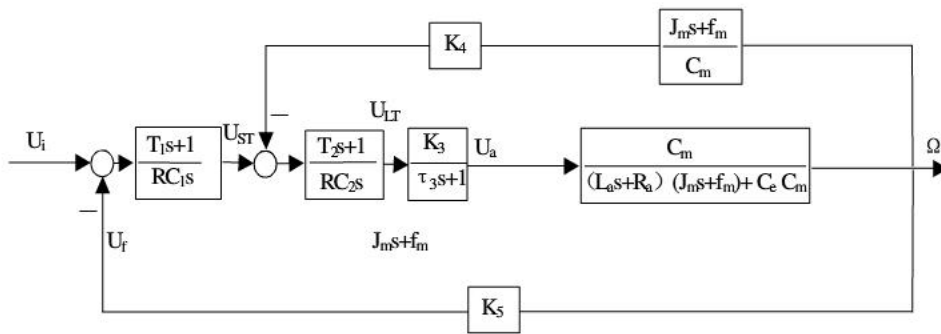
因为求系统传递函数 $\Omega(s)/U_i(s)$ ，所以令 $M_c = 0$ ，系统结构图如下：



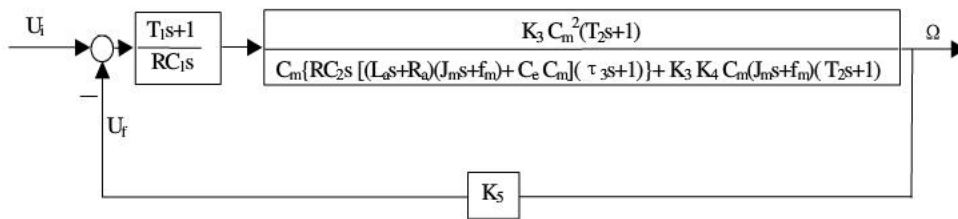
将 K4 后移到输出 Ω ，系统结构图化简如下：



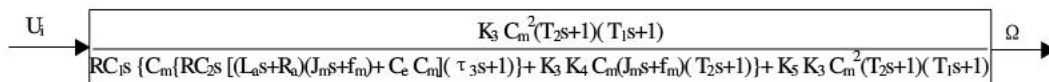
进一步化简得：



进一步化简得：



进一步化简得：



所以：

$$\frac{\Omega(s)}{U_i(s)} = \frac{K_3 C_m^2 (T_2 s + 1)(T_1 s + 1)}{RC_1 s \{C_m [RC_2 s [(L_a s + R_a)(J_m s + f_m) + C_e C_m] (\tau_3 s + 1)] + K_3 K_4 C_m (J_m s + f_m) (T_2 s + 1)\} + K_5 K_3 C_m^2 (T_2 s + 1)(T_1 s + 1)}$$

2-17 已知控制系统结构图如图2-65所示。试通过结构图等效变换求系统传递函数 $Q(s)/R(s)$ 。

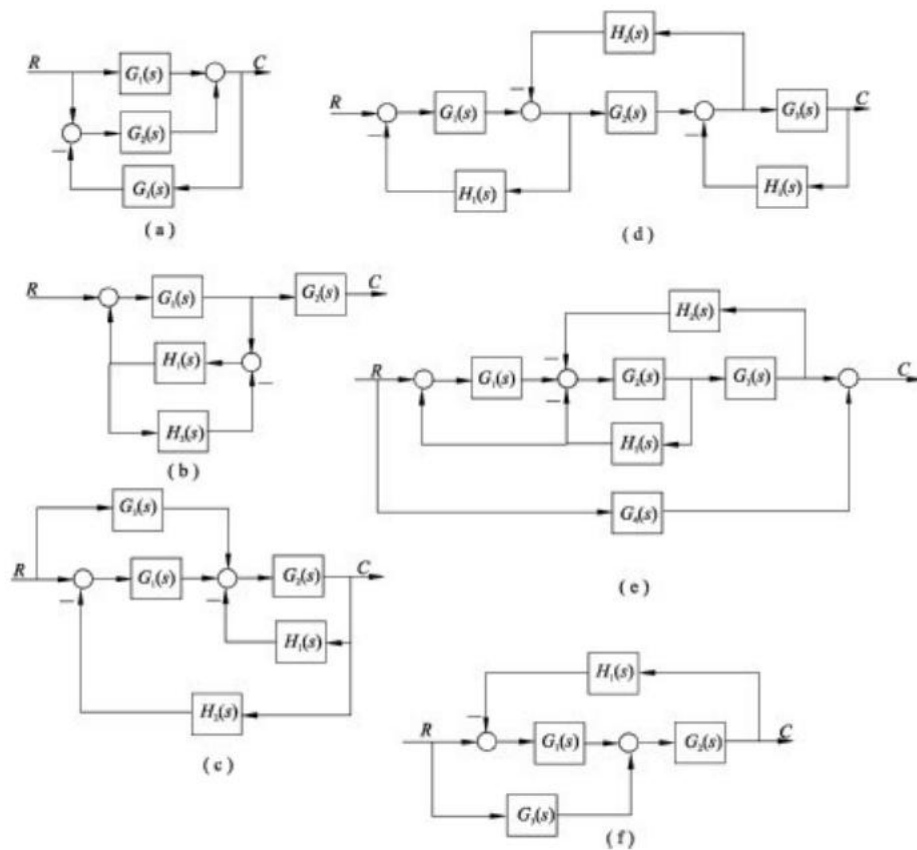
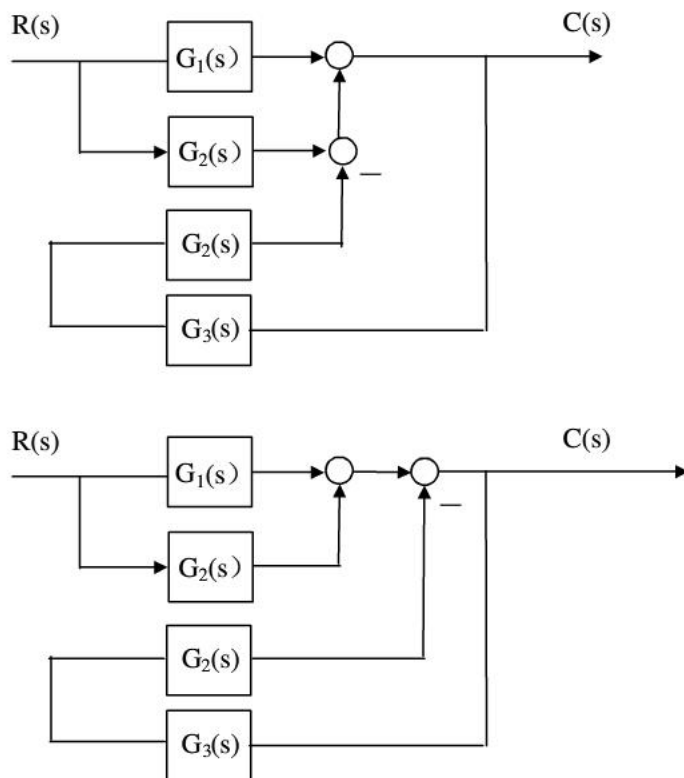
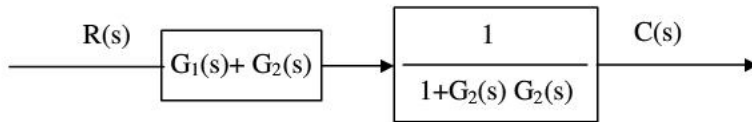


图2-65 题2-17系统结构图

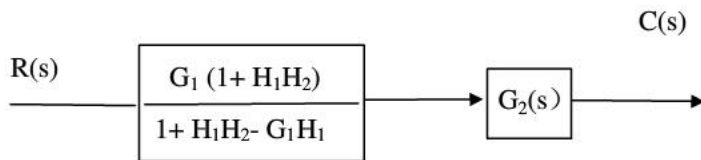
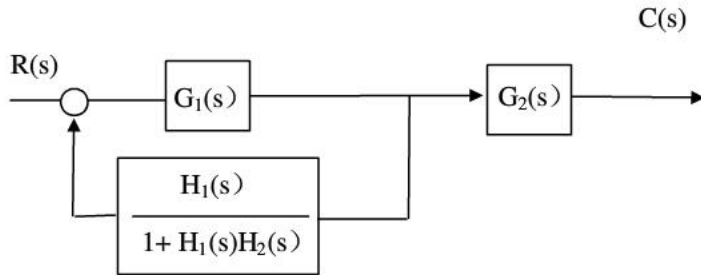
解：(a)





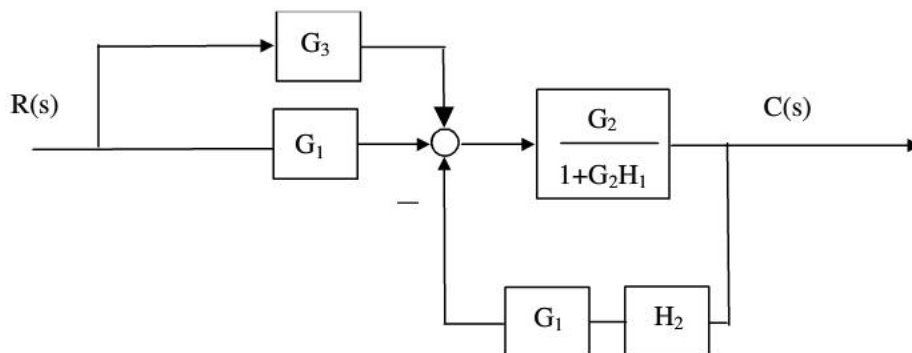
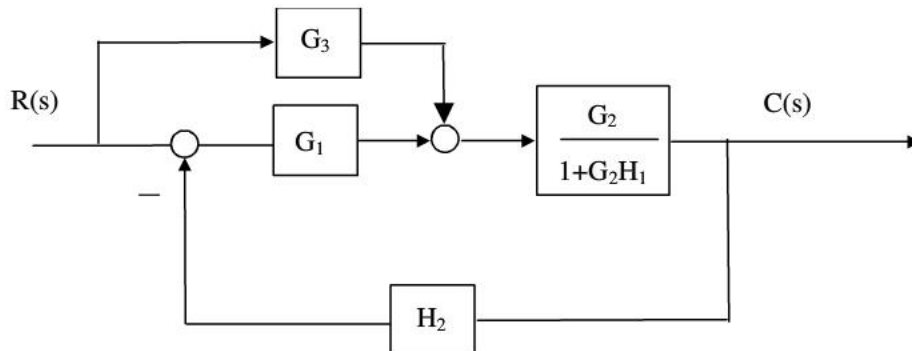
所以:
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_2 G_3}$$

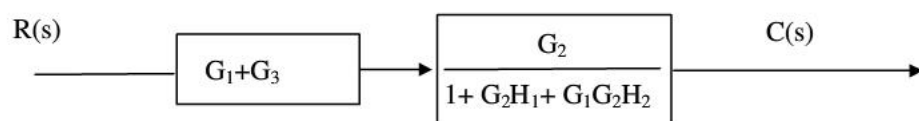
(b)



所以:
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 (1 + H_1 H_2)}{1 + H_1 H_2 - G_1 H_1}$$

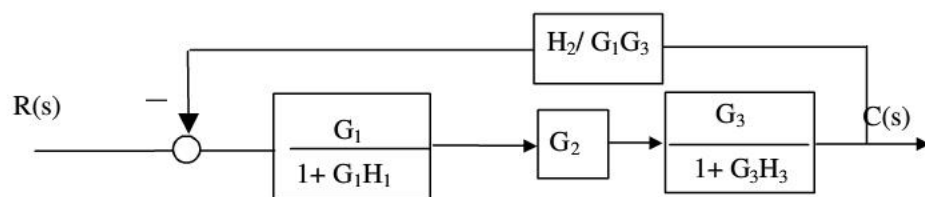
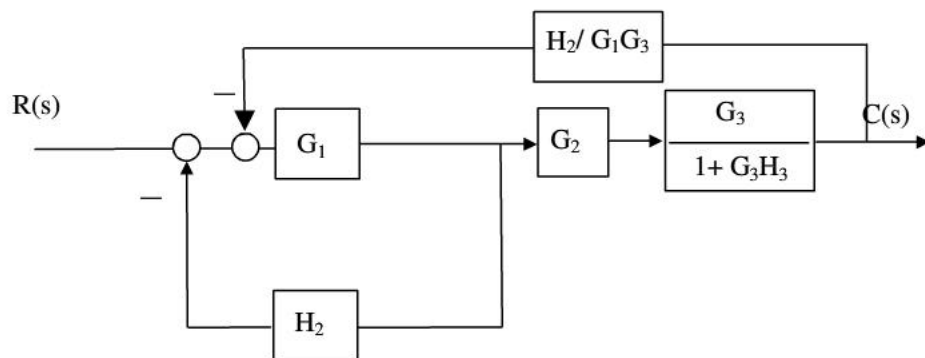
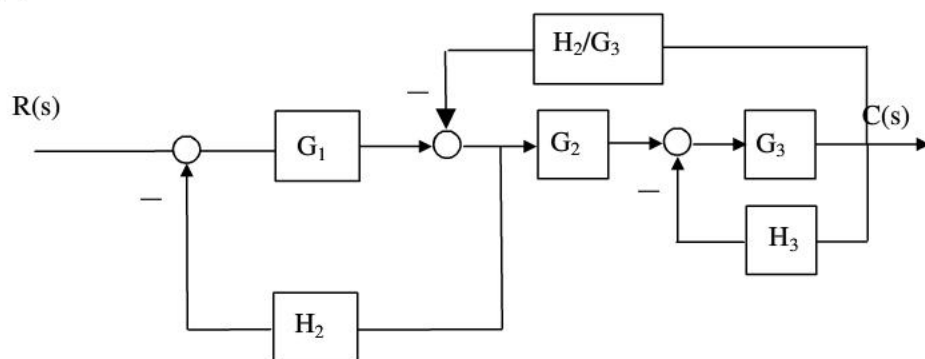
(c)





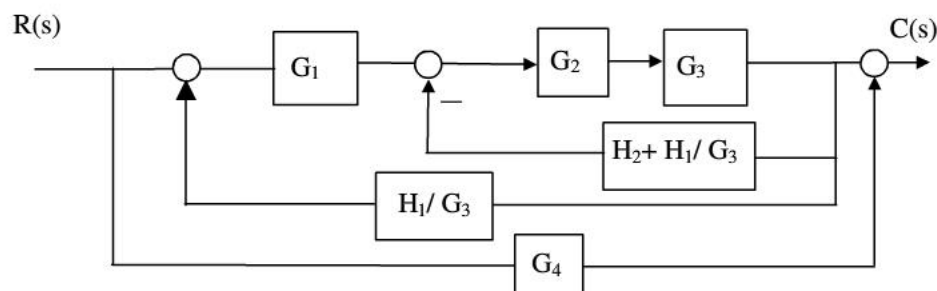
所以: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2(G_1 + G_3)}{1 + G_2H_1 + G_1G_2H_2}$

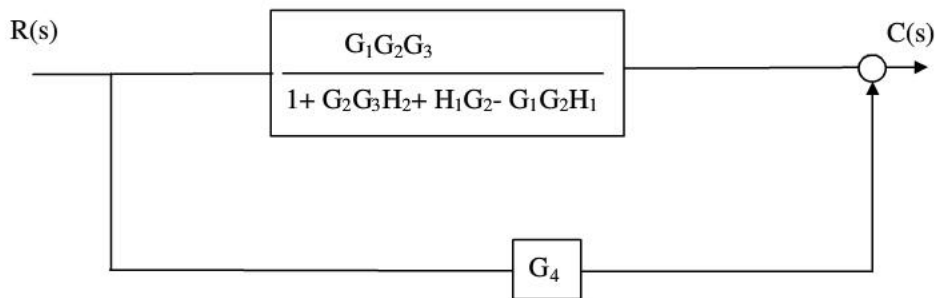
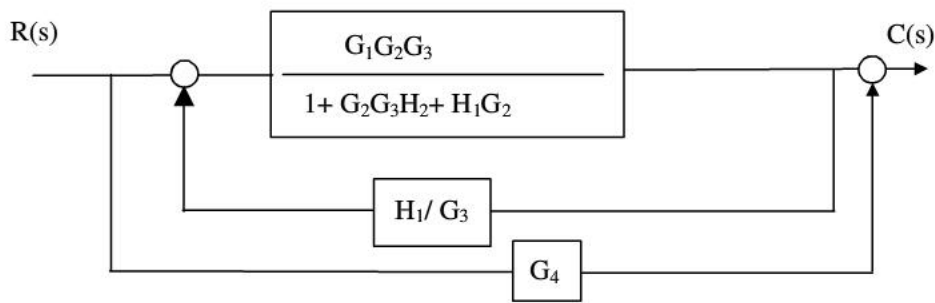
(d)



所以: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3}{(1 + G_1H_1)(1 + G_3H_3) + G_2H_2}$

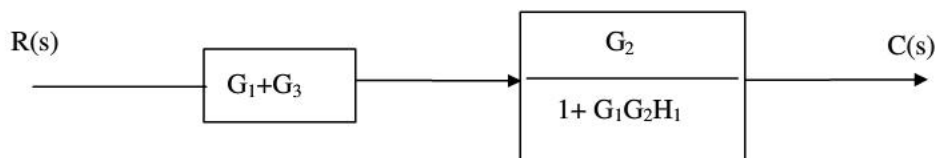
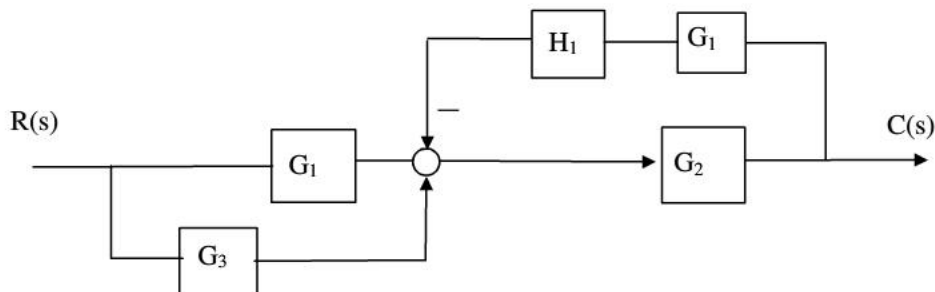
(e)





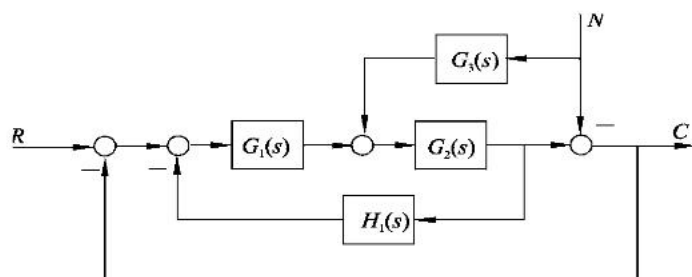
所以:
$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_4 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 H_2 + H_1 G_2 - G_1 G_2 H_1}$$

(f)



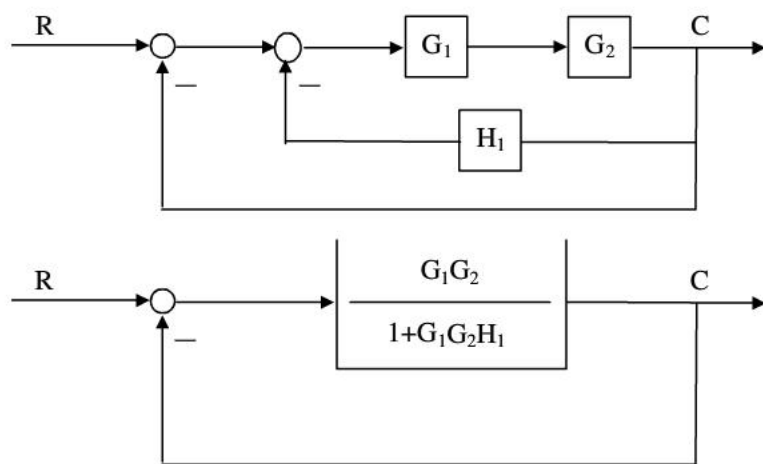
所以:
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(G_1 + G_3)G_2}{1 + G_1 G_2 H_1}$$

2-18 试简化图2-66中的系统结构图，并求传递函数 $Q(s)/R(s)$ 和 $Q(s)/N(s)$ 。



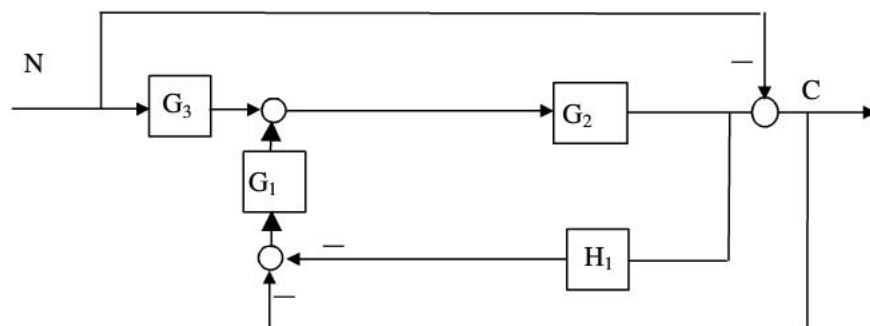
(a)

解：(1) 求 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 时， $N = 0$ 这时结构图变为：

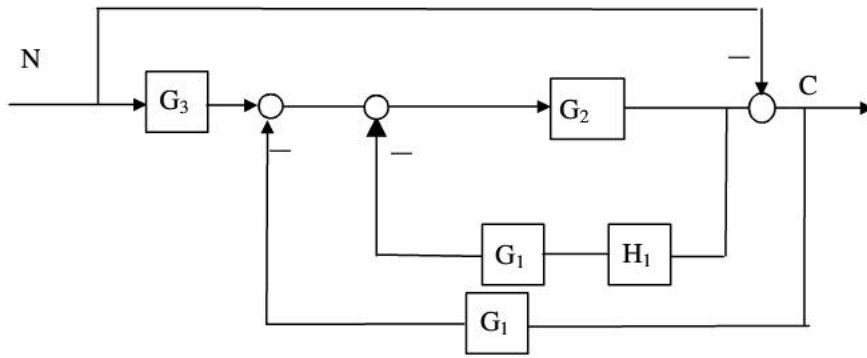


所以：
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2}$$

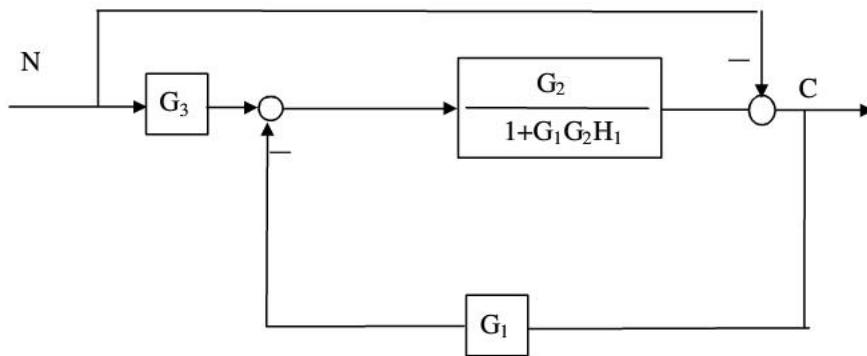
(2) 求 $\frac{C(s)}{N(s)}$ 时， $R = 0$ 这时结构图变为：



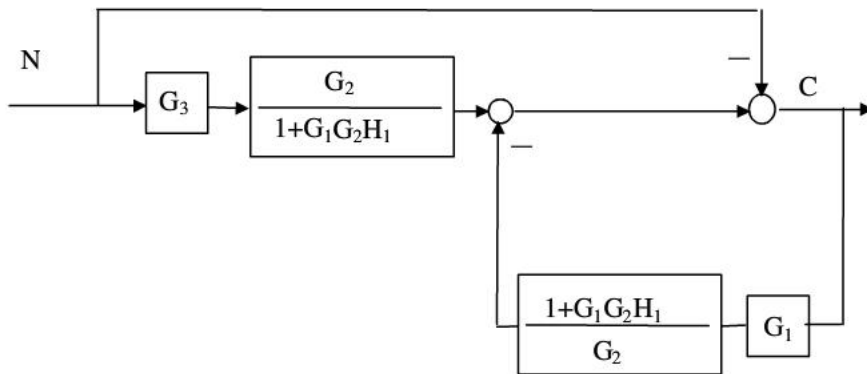
进一步化简得



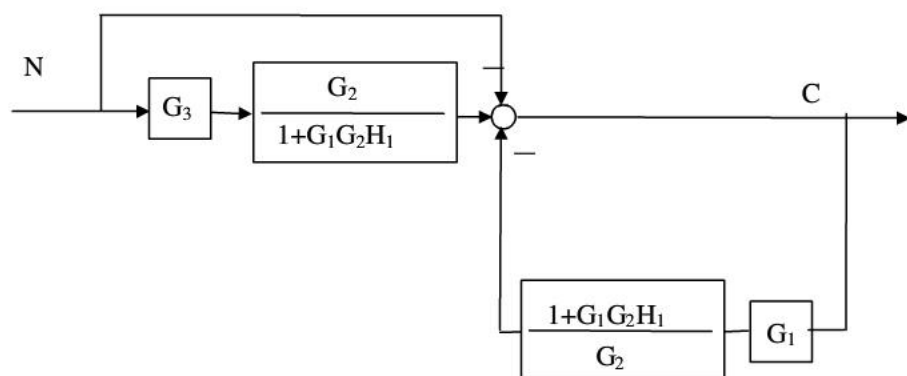
再进一步化简得：



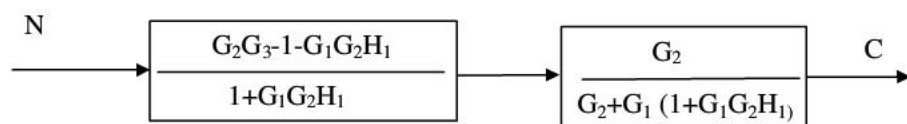
再进一步化简得：



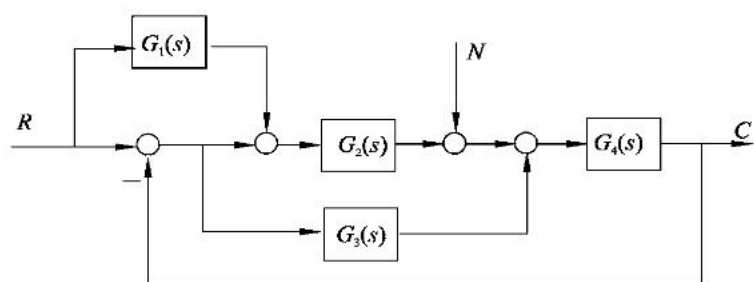
再进一步化简得：



再进一步化简得：



所以：
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2(G_2G_3 - 1 - G_1G_2H_1)}{(1 + G_1G_2H_1)[G_2 + G_1(1 + G_1G_2H_1)]}$$

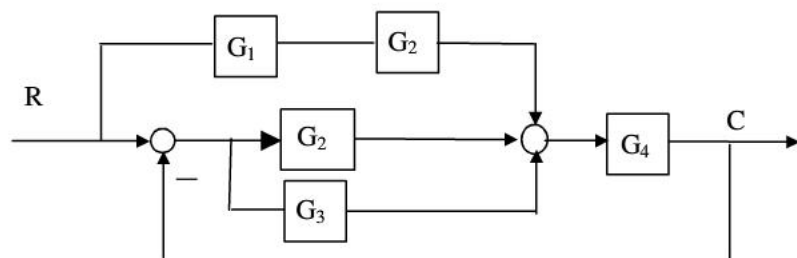


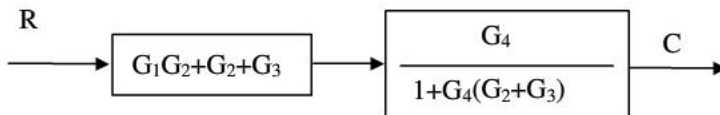
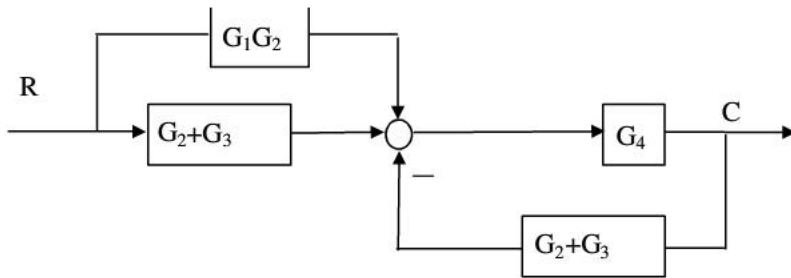
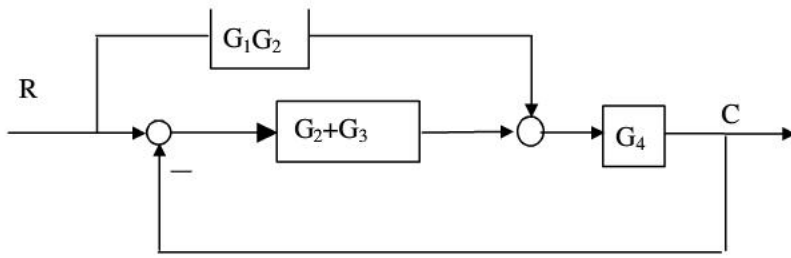
(b)

图2-66 题2-18系统结构图

解：

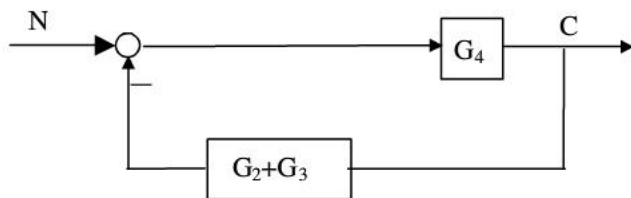
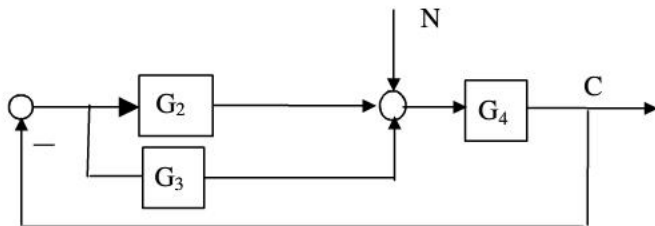
(1) 求 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 时， $N = 0$ 这时结构图变为：





所以:
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_4(G_1G_2 + G_2 + G_3)}{1 + G_4(G_2 + G_3)}$$

(2) 求 $\frac{C(s)}{N(s)}$ 时, $R = 0$ 这时结构图变为:



所以:
$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_4}{1 + G_4(G_2 + G_3)}$$

3-1 设随动系统的微分方程为： $T\ddot{x}_0 + \dot{x}_0 = K_2 u$

$$u = K_1[r(t) - x_f]$$

$$T_f \dot{x}_f + x_f = x_0$$

其中 T, T_f, K_2 为正常数。如果在外作用 $r(t)=1+t$ 的情况下，使 x_0 对 $r(t)$ 的稳态误差不大于正常数

ε_0 ，试问 k_1 应满足什么条件？

见习题 3-20 解答

3-2 设系统的微分方程式如下：

$$(1) \quad 0.2\dot{c}(t) = 2r(t)$$

$$(2) \quad 0.04\ddot{c}(t) + 0.24\dot{c}(t) + c(t) = r(t)$$

试求系统的单位脉冲响应 $k(t)$ 和单位阶跃响应 $h(t)$ 。已知全部初始条件为零。
解：

$$(1) \quad \text{因为 } 0.2sC(s) = 2R(s)$$

$$\text{单位脉冲响应： } C(s) = 10/s \quad k(t) = 10 \quad t \geq 0$$

$$\text{单位阶跃响应 } h(t) \quad C(s) = 10/s^2 \quad h(t) = 10t \quad t \geq 0$$

$$(2) \quad (0.04s^2 + 0.24s + 1)C(s) = R(s) \quad C(s) = \frac{R(s)}{0.04s^2 + 0.24s + 1}$$

$$\text{单位脉冲响应： } C(s) = \frac{1}{0.04s^2 + 0.24s + 1} \quad k(t) = \frac{25}{3} e^{-3t} \sin 4t$$

$$\text{单位阶跃响应 } h(t) \quad C(s) = \frac{25}{s[(s+3)^2 + 16]} = \frac{1}{s} - \frac{s+6}{(s+3)^2 + 16}$$

$$h(t) = 1 - e^{-3t} \cos 4t - \frac{3}{4} e^{-3t} \sin 4t$$

3-3 已知系统脉冲响应如下，试求系统闭环传递函数 $\Phi(s)$ 。

$$(1) \quad k(t) = 0.0125e^{-1.25t}$$

$$(2) \quad k(t) = 5t + 10\sin(4t + 45^\circ)$$

$$(3) \quad k(t) = 0.1(1 - e^{-t/3})$$

解：

$$(1) \quad \Phi(s) = \frac{0.0125}{s + 1.25}$$

$$(2) k(t) = 5t + 10\sin 4t \cos 45^\circ + 10\cos 4t \sin 45^\circ$$

$$\Phi(s) = \frac{5}{s^2} + 5\sqrt{2} \frac{4}{s^2 + 16} + 5\sqrt{2} \frac{s}{s^2 + 16} = \frac{5}{s^2} + 5\sqrt{2} \frac{s+4}{s^2 + 16}$$

$$(3) \Phi(s) = \frac{0.1}{s} - \frac{0.1}{s+1/3}$$

3-4 已知二阶系统的单位阶跃响应为



$$h(t) = 10 - 12.5e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)$$

试求系统的超调量 $\sigma\%$ 、峰值时间 t_p 和调节时间 t_s 。

$$\text{解: } h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \beta)$$

$$\beta = \arccos \xi \quad \sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} \quad t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

$$\xi = \cos \beta = \cos 53.1^\circ = 0.6$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = e^{-\pi \cdot 0.6/\sqrt{1-0.6^2}} = e^{-\pi \cdot 0.6/\sqrt{1-0.6^2}} = 9.5\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} = \frac{\pi}{1.6} = 1.96(s)$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = \frac{3.5}{1.2} = 2.92(s)$$

3-5 设单位反馈系统的开环传递函数为



$$G(s) = \frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}$$

试求系统在单位阶跃输入下的动态性能。

解：闭环传递函数

$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}}{1+\frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}} = \frac{0.4s+1}{s^2+s+1}$$

$$\begin{aligned} C(s) &= G_B(s)R(s) = \frac{1}{s} \frac{0.4s+1}{s^2+s+1} = \frac{0.4}{s^2+s+1} + \frac{1}{s(s^2+s+1)} \\ &= \frac{0.4}{s^2+s+1} + \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+0.6}{s^2+s+1} \end{aligned}$$

$$c(t) = 1 - e^{-0.5t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{2 \times 0.6}{\sqrt{3}} e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$= 1 - 1.22 e^{-0.5t} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + 55.3^\circ \right)$$

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2} \omega_n t + \beta)$$

$$\beta = \arccos \xi \quad \sigma\% = e^{-\pi \xi / \sqrt{1-\xi^2}} \quad t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n} \quad t_s = \frac{3.5}{\xi \omega_n}$$

$$\xi = \cos \beta = \cos 55.3^\circ = 0.569$$

$$\sigma\% = e^{-\pi \xi / \sqrt{1-\xi^2}} = 11.37\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n} = \frac{\pi \times 2}{\sqrt{3}} = 3.63s$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi \omega_n} = \frac{3.5}{0.5} = 7s$$

3-6 已知控制系统的单位阶跃响应为



$$h(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t}$$

试确定系统的阻尼比 ξ 和自然频率 ω_n 。

解：

求拉氏变换得

$$H(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.2}{s+60} - \frac{1.2}{s+10} = \frac{(s+60)(s+10)}{s(s+60)(s+10)} + \frac{0.2s(s+10)}{s(s+60)(s+10)} - \frac{1.2s(s+60)}{s(s+60)(s+10)}$$

$$= \frac{600}{s(s+60)(s+10)} = \frac{600}{s(s^2+70s+600)} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2)}$$

显然闭环传递函数为 $\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2)}$

其中 $\omega_n^2 = 600$ $\omega_n = 10\sqrt{6}$ $2\xi\omega_n = 70$ $\xi = \frac{7}{2\sqrt{6}}$

根据 (3-17)

$$h(t) = 1 + \frac{e^{-t/T_1}}{T_2/T_1 - 1} + \frac{e^{-t/T_{12}}}{T_1/T_2 - 1}$$

解：根据公式 (3-17)

$$h(t) = 1 + \frac{e^{-\frac{t}{T_1}}}{T_2/T_1 - 1} + \frac{e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1/T_2 - 1}$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \quad T_2 = \frac{1}{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$\text{显然: } T_1 = \frac{1}{10} \quad T_2 = \frac{1}{60}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} = 6 = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta^2}}} \quad \text{解方程得 } \zeta = \frac{7}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{由 } T_1 = \frac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} = \frac{1}{10} \quad \text{得到 } \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) = 10$$

$$\text{所以 } \omega_n = \frac{10}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{10}{\frac{7}{2\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{49}{24} - 1}} = \frac{10 \times 2\sqrt{6}}{2} = 10\sqrt{6}$$

3-7 设图 3-42 是简化的飞行控制系统结构图，试选择参数 K_1 和 K_t ，使系统 $\omega_n = 6$ 、 $\zeta = 1$ ✓

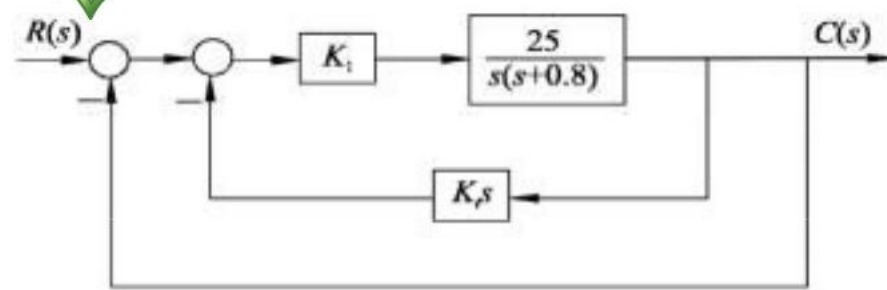


图 3-42 飞行控制系统

解：系统开环传递函数

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{25K_1}{s(s+0.8)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{25K_1}{s(s+0.8)} K_t s} = \frac{25K_1}{s(s+0.8) + 25K_1 K_t s} \\ &= \frac{25K_1}{s(s+0.8+25K_1 K_t s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \end{aligned}$$

$$\omega_n^2 = 36 = 25K_1 \quad K_t = \frac{36}{25}$$

$$2\xi\omega_n = 0.8 + 25K_1K_t = 12 \quad \text{所以 } K_t = \frac{14}{45}$$

3-8 试分别求出图 3-43 各系统的自然频率和阻尼比，并列表比较其动态性能。

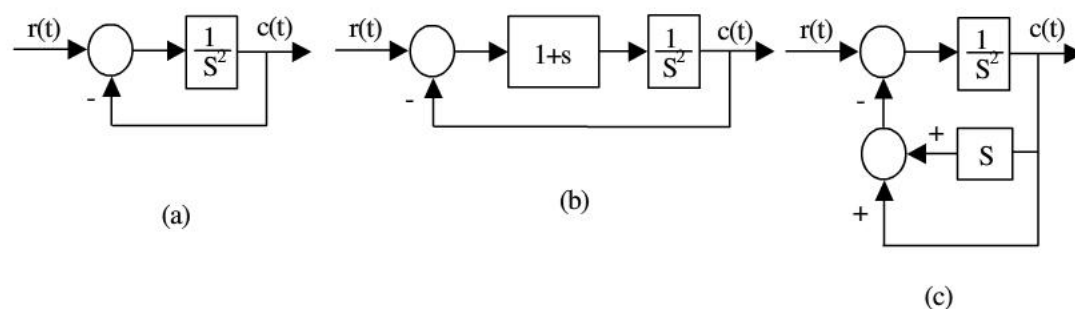


图 3-43 控制系统

解：

(a) $\omega_n = 1$ $\xi = 0$ 系统临界稳定。

(b) $\Phi(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ $\omega_n = 1$ $\xi = 0.5$ $\sigma\% = 29.8\%$ $t_s = 7.51s$

(c) $\Phi(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ $\omega_n = 1$ $\xi = 0.5$ $\sigma\% = 16.3\%$ $t_s = 8.08s$

3-9 设控制系统如图 3-44 所示。要求：

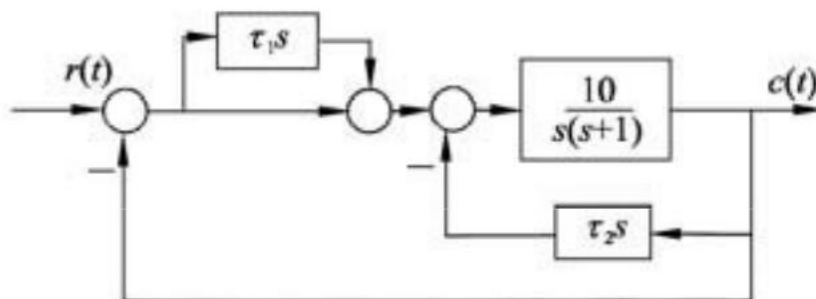


图 3-44 控制系统

- (1) 取 $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0.1$, 计算测速反馈校正系统的超调量、调节时间和速度误差；
 (2) 取 $\tau_1 = 0.1$, $\tau_2 = 0$, 计算比例-微分校正系统的超调量、调节时间和速度误差。

解：(1) 系统开环传递函数

$$G_0(s) = (1 + \tau_1 s) \frac{10}{s(s+1)} \frac{1}{1 + \frac{10\tau_2 s}{s(s+1)}} = \frac{10(1 + \tau_1 s)}{s(s+1) + 10\tau_2 s} = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

$$\omega_n^2 = 10 \quad \omega_n = \sqrt{10} \quad 2\xi\omega_n = 2 \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 35.1\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi \omega_n} = 3.5s$$

$$K_V = 5$$

(2)

3-10 图 3-45 所示控制系统有 (a) 和 (b) 两种不同的结构方案，其中 $T > 0$ 不可变。要求：

(1) 在这两种方案中，应如何调整 K_1 ， K_2 和 K_3 ，才能使系统获得较好的动态性能。

比较说明两种结构方案的特点。

解：

3-11 已知系统特征方程为

 $3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$

试用劳思稳定判据和赫尔维茨判据确定系统的稳定性。

解：

列劳思表如下：

s^4	3	5	2
s^3	10	1	
s^2	$\frac{47}{10}$	2	
s^1	$-\frac{1530}{47}$	0	
s^0	2		

由劳思表可以得到该系统不稳定。

3-12 已知系统特征方程如下，试求系统在 s 右半平面的根数及虚根值。

(1) $s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

(2) $s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$

(3) $s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 35s + 25 = 0$

解：(1) 列劳思表如下：

s^5	1	12	32
s^4	3	24	48
s^3	4	16	
s^2	12	48	
s^1			
s^0			

有一对虚根，系统不稳定

(2) 列劳思表如下：

$$\begin{array}{rcl}
 s^6 & 1 & -4 \quad -7 \quad 10 \\
 s^5 & 4 & 4 \quad -8 \\
 s^4 & -5 & -5 \quad 10 \\
 s^3 & & \\
 s^2 & & \\
 s^1 & & \\
 s^0 & &
 \end{array}$$

系统不稳定

(3) 列劳思表如下:

$$\begin{array}{rcl}
 s^5 & 1 & 12 \quad 35 \\
 s^4 & 3 & 20 \quad 25 \\
 s^3 & \frac{16}{3} & \frac{80}{3} \\
 s^2 & 5 & 25 \\
 s^1 & 10 & \\
 s^0 & 25 &
 \end{array}$$

有一对虚根，系统不稳定

3-13 已知单位反馈系统的开环传递函数



$$G(s) = \frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(0.5s^2+s+1)}$$

试确定系统稳定时的 K 值范围。

解：系统特征方程为

$$s(s+1)(0.5s^2+s+1) + K(0.5s+1) = 0$$

将上述方程化简得到：

$$0.5s^4 + 1.5s^3 + 2s^2 + (1+0.5K)s + K = 0$$

劳思表如下：

$$\begin{array}{rcl}
 s^4 & 0.5 & 2 \quad K \\
 s^3 & 1.5 & 1+0.5K \\
 s^2 & \frac{2.5-0.25K}{1.5} & K \\
 s^1 & \frac{2.5-1.25K-0.125K^2}{2.5-0.25K} & \\
 s^0 & K &
 \end{array}$$

3-14 已知系统结构图如图 3-46 所示。试用劳思稳定判据确定能使系统稳定反馈参数 τ 的取值范围。

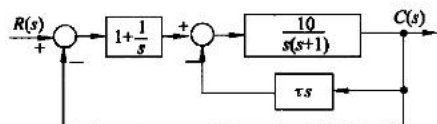


图 3-46 控制系统

解：系统开环传递函数为

$$G_0(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right) \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{10\tau s}{s(s+1)}} = \frac{s+1}{s} \frac{10}{s(s+1) + 10\tau s} = \frac{10s+10}{s^3 + (1+10\tau)s^2}$$

系统特征方程为：

$$s^3 + (1+10\tau)s^2 + 10s + 10 = 0$$

劳思表如下：

s^3	1	10
s^2	$1+10\tau$	10
s^1	$\frac{10\tau}{1+10\tau}$	
s^0	10	

所以能使系统稳定反馈参数 τ 的取值范围为 $\tau > 0$

3-15 已知单位反馈系统的开环传递函数

$$(1) \quad G(s) = \frac{100}{(0.1s+1)(s+5)}$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)}$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$$

试求输入分别为 $r(t) = 2t$ 和 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ 时，系统的稳态误差。

解：

(1) 因为是二阶系统，且系数大于零，所以系统稳定。

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 20 \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0 \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

$$\text{所以当 } r(t) = 2t \text{ 时 } e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = \infty$$

$$\text{当 } r(t) = 2 + 2t + t^2 \text{ 时 } e_{ss} = \frac{R_1}{1+K_p} + \frac{R_2}{K_v} + \frac{R_3}{K_a} = \infty$$

(2) 应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 10 \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

所以当 $r(t) = 2t$ 时 $e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = 0.2$

当 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ $e_{ss} = \frac{R_1}{1 + K_p} + \frac{R_2}{K_v} + \frac{R_3}{K_a} = \infty$

(3) 应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0.1$$

所以当 $r(t) = 2t$ 时 $e_{ss} = \frac{R_2}{K_v} = 0$

当 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ $e_{ss} = \frac{R_1}{1 + K_p} + \frac{R_2}{K_v} + \frac{R_3}{K_a} = 20$

3-16 已知单位反馈系统的开环传递函数

$$(1) G(s) = \frac{50}{(0.1s + 1)(2s + 1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10(2s + 1)(4s + 1)}{s^2(s^2 + 2s + 10)}$$

试求位置误差系数 K_p ，速度误差系数 K_v ，加速度误差系数 K_a 。

解：

(1) 应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 50 \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0 \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

(2) 应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K}{200} \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0$$

(3) 应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 1$$

3-17 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = 1/Ts$ 。试用动态误差系统法求出当输入信

号分别为 $r(t) = t^2/2$ 和 $r(t) = \sin 2t$ 时，系统的稳态误差。

3-18 设控制系统如图 3-47 所示。其中

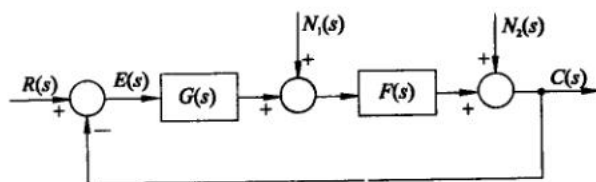


图 3-47 控制系统

$$G(s) = K_p + \frac{K}{s} \quad F(s) = \frac{1}{Js}$$

输入 $r(t)$ 以及扰动 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 均为单位阶跃函数。试求：

- (1) 在 $r(t)$ 作用下系统的稳态误差
- (2) 在 $n_1(t)$ 作用下系统的稳态误差
- (3) 在 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 同时作用下系统的稳态误差

解：

- (1) 在 $r(t)$ 作用下系统的稳态误差

这时系统的开环传递函数为：

$$G_0(s) = G(s)F(s) = \frac{K_p s + K}{Js^2}$$

系统位置误差系数为 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$

$$\text{在 } r(t) \text{ 作用下系统的稳态误差 } e_{ssr} = \frac{R_1}{1 + K_p} = 0$$

- (2) 在 $n_1(t)$ 作用下系统的稳态误差

这时系统的开环传递函数为：

$$G_0(s) = G(s)F(s) = \frac{K_p s + K}{Js^2}$$

系统位置误差系数为 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$

$$\text{在 } n_1(t) \text{ 作用下系统的稳态误差 } e_{ssn1} = \frac{R_1}{1 + K_p} = 0$$

- (3) 在 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 同时作用下系统的稳态误差

已完成

$n_2(t)$ 作用下系统的稳态误差

这时系统的开环传递函数为：

$$G_0(s) = G(s)F(s) = \frac{K_p s + K}{Js^2}$$

系统位置误差系数为 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$

$$\text{在 } n_2(t) \text{ 作用下系统的稳态误差 } e_{ss2} = \frac{R_1}{1 + K_p} = 0$$

所以在 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 同时作用下系统的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = 0 + 0 = 0$$

3-19 设闭环传递函数的一般形式为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

误差定义取 $e(t) = r(t) - c(t)$ 。试证：

(1) 系统在阶跃信号输入下，稳态误差为零的充分条件是： $b_0 = a_0, b_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$

(2) 系统在斜坡信号输入下，稳态误差为零的充分条件是：

$$b_0 = a_0, b_1 = a_1, b_i = 0 (i = 2, 3, \cdots, m)$$

解：(1) 系统在阶跃信号输入下这时

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad C(s) = R(s)\Phi(s) = \frac{1}{s} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{1}{s} \left[1 - \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \right] \\ &= \frac{1}{s} \frac{(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) - (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{1}{s} \frac{(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s) - (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s) + (a_0 - b_0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s) - (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s) + (a_0 - b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

如果 $e_{ss} = 0$ 则 $a_0 = b_0$ 且 $a_0 \neq 0$

(2) 系统在斜坡信号输入下这时

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad C(s) = R(s)\Phi(s) = \frac{1}{s^2} \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \\ &= \frac{1}{s^2} \left[1 - \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \right] \\ &= \frac{1}{s^2} \frac{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0) - (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \\ &= \frac{1}{s^2} \frac{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2s^2) + -(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_2s^2) + (a_1 - b_1)s + (a_0 - b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \end{aligned}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} = \frac{1}{s} \frac{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2s^2) + -(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_2s^2) + (a_1 - b_1)s + (a_0 - b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

如果 $e_{ss} = 0$ 则 $a_0 = b_0$ $a_1 = b_1$ 且 $a_0 \neq 0$

3-20 设随动系统的微分方程为

$$T_1 \frac{d^2c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} = K_2 u(t)$$

$$u(t) = K_1[r(t) - b(t)]$$

$$T_2 \frac{db(t)}{dt} + b(t) = c(t)$$

其中， T_1 、 T_2 和 K_2 为正常数。若要求 $r(t)=1+t$ 时， $c(t)$ 对 $r(t)$ 的稳态误差不大于正常数 $\varepsilon > 0$ ，试问 K_1 应满足什么条件？已知全部初始条件为零。

解：

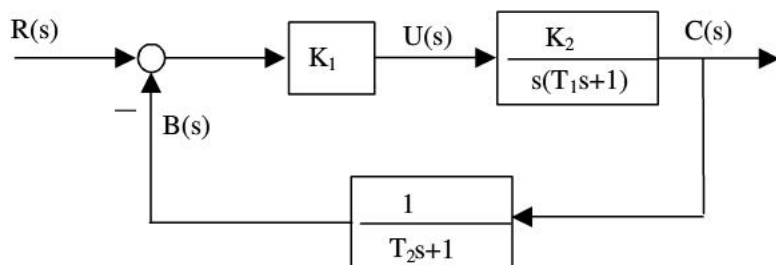
由上述方程得到拉氏变换如下：

$$(T_1s^2 + s)C(s) = K_2U(s) \quad C(s) = \frac{K_2}{T_1s^2 + s}U(s)$$

$$U(s) = K_1[R(s) - B(s)]$$

$$(T_2s+1)B(s) = C(s) \quad B(s) = \frac{1}{T_2s+1} C(s)$$

由此得到系统结构图如下：



系统闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{\frac{K_1 K_2}{s(T_1s+1)}}{1 + \frac{K_1 K_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}} = \frac{K_1 K_2 (T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2}$$

$$\text{当 } r(t) = 1+t \text{ 时 } R(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{s+1}{s^2}$$

$$C(s) = R(s)\Phi(s) = \frac{s+1}{s^2} \frac{K_1 K_2 (T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2}$$

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) = \frac{s+1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2} \frac{K_1 K_2 (T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2} \\ &= \frac{s+1}{s^2} \left[1 - \frac{K_1 K_2 (T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2} \right] \\ &= \frac{s+1}{s^2} \left[\frac{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2 - K_1 K_2 (T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2} \right] \\ &= \frac{s+1}{s} \left[\frac{(T_1s+1)(T_2s+1) - K_1 K_2 T_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2} \right] \end{aligned}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) =$$

$$\begin{aligned} &\lim_{s \rightarrow 0} (s+1) \left[\frac{(T_1s+1)(T_2s+1) - K_1 K_2 T_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(T_1s+1)(T_2s+1) - K_1 K_2 T_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1 K_2} \\ &= \frac{1 - K_1 K_2 T_2}{K_1 K_2} \leq \varepsilon_0 \end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{K_2(T_2 + \varepsilon_0)} \leq K_1$$

系统特征方程为：

$$s(T_1s+1)(T_2s+1) + K_1K_2 = T_1T_2s^3 + (T_1+T_2)s^2 + s + K_1K_2 = 0$$

劳思表如下：

s^3	T_1T_2	1
s^2	T_1+T_2	K_1K_2
s^1	$\frac{T_1+T_2-K_1K_2T_1T_2}{T_1+T_2}$	0
s^0	K_1K_2	

如果系统稳定，则

$$\frac{T_1+T_2-K_1K_2T_1T_2}{T_1+T_2} > 0 \text{ 即 } K_1 < \frac{T_1+T_2}{K_2T_1T_2}$$

所以

$$\frac{1}{K_2(T_2 + \varepsilon_0)} \leq K_1 < \frac{T_1+T_2}{K_2T_1T_2}$$

4-1 设单位反馈控制系统的开环传递函数

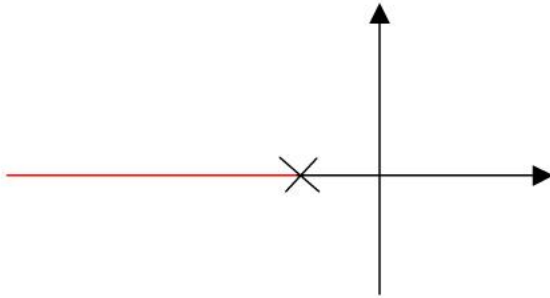
$$G(s) = \frac{K^*}{s+1}$$

试用解析法绘出 K^* 从零变到无穷时的闭环根轨迹图，并判断下列点是否在根轨迹上：

$$(-2 + j0), \quad (0 + j1), \quad (-3 + j2)$$

解：

有一个极点： $(-1 + j0)$ ，没有零点。根轨迹如图中红线所示。



$(-2 + j0)$ 点在根轨迹上，而 $(0 + j1)$ ， $(-3 + j2)$ 点不在根轨迹上。

4-2 设单位反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K(3s+1)}{s(2s+1)}$$

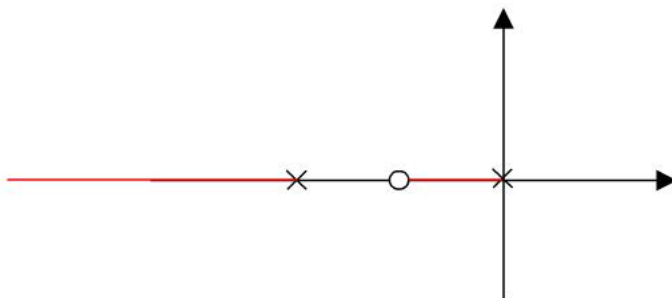
试用解析法绘出开环增益 K 从零增加到无穷时的闭环根轨迹图。

解：

$$\text{系统开环传递函数为 } G(s) = \frac{3K/2(s+1/3)}{s(s+1/2)} = \frac{K_g(s+1/3)}{s(s+1/2)}$$

有两个极点： $(0 + j0)$ ， $(-1/2 + j0)$ ，有一个零点 $(-1/3, j0)$ 。

根轨迹如图中红线所示。



4-3 已知开环零、极点分布如图 4-28 所示，试概略绘出相应的闭环根轨迹图。



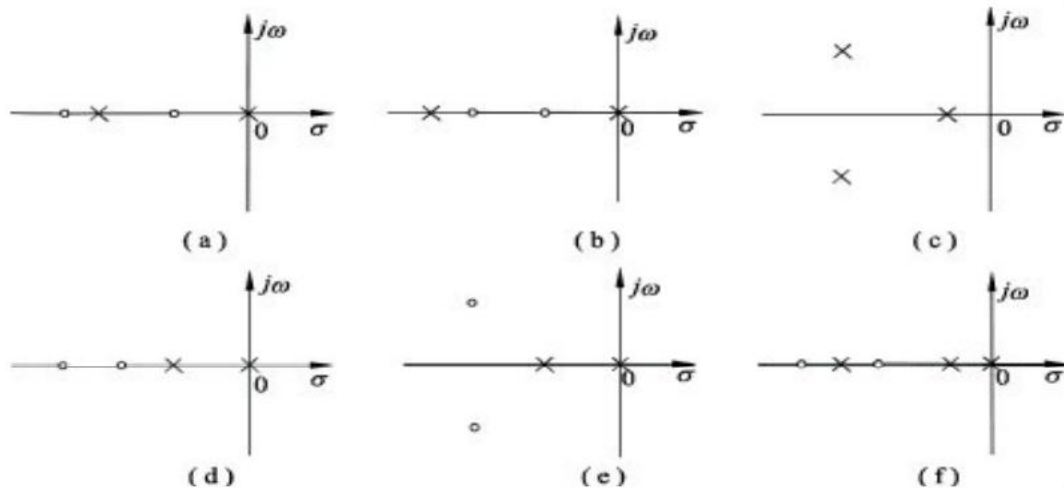
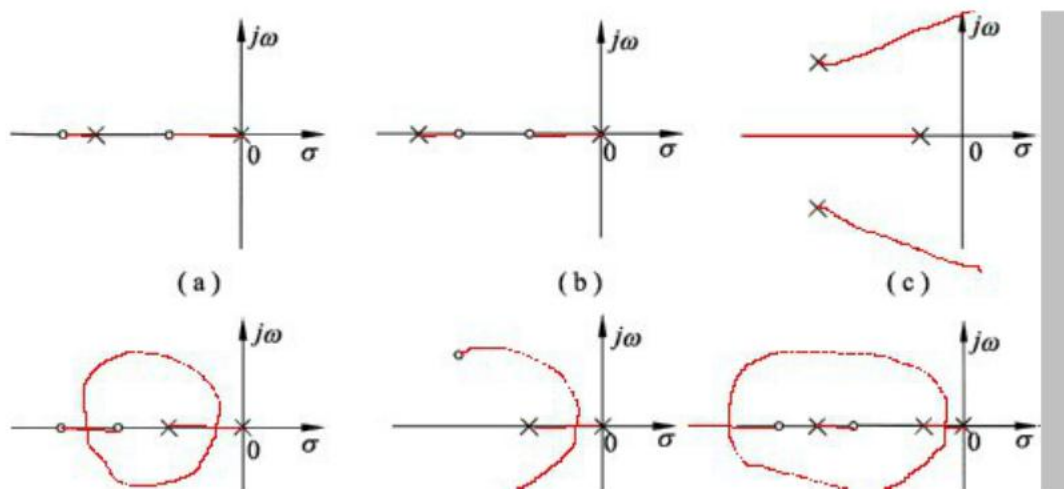


图 4-28 开环零、极点分布图



4-4 设单位反馈控制系统开环传递函数如下，试概略绘出相应的闭环根轨迹图(要求确定分离点坐标 d)：

(1) $G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$

解：

系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{10K}{s(s+5)(s+2)} = \frac{K_g}{s(s+5)(s+2)}$

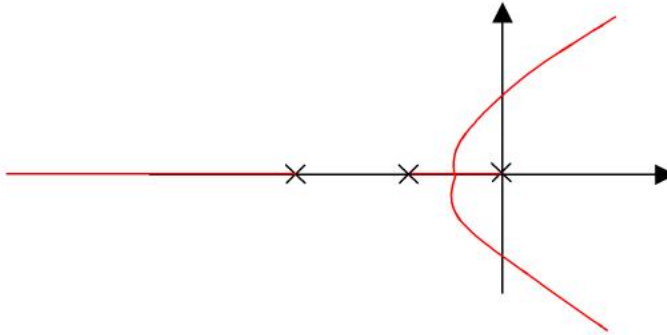
有三个极点：(0 + j 0)，(-2 + j 0)，(-5 + j 0) 没有零点。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+5} = 0 \quad 3d^2 + 14d + 10 = 0 \text{ 解方程的 } d_1 = -3.7863, \quad d_2 = -0.88$$

取分离点为 $d = -0.88$

根轨迹如图中红线所示。



$$(2) \quad G(s) = \frac{K(s+1)}{s(2s+1)}$$

解：

$$\text{系统开环传递函数为 } G(s) = \frac{K/2(s+1)}{s(s+0.5)} = \frac{K_g(s+1)}{s(s+0.5)}$$

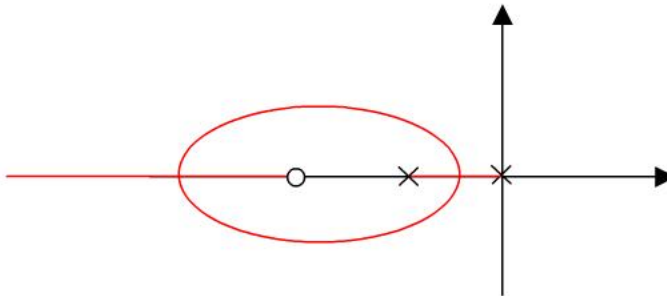
有两个极点： $(0+j0)$ ， $(-0.5+j0)$ ，有一个零点 $(-1+j0)$ 。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+0.5} = \frac{1}{d+1} \quad d^2 + 2d + 0.5 = 0 \text{ 解方程的 } d_1 = -1.7, \quad d_2 = -0.29$$

取分离点为 $d_1 = -1.7$ ， $d_2 = -0.29$

根轨迹如图中红线所示。



$$(3) \quad G(s) = \frac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$$

解：

$$\text{系统开环传递函数为 } G(s) = \frac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$$

有三个极点： $(0+j0)$ ， $(-2+j0)$ ， $(-3+j0)$ ，有一个零点 $(-5+j0)$ 。

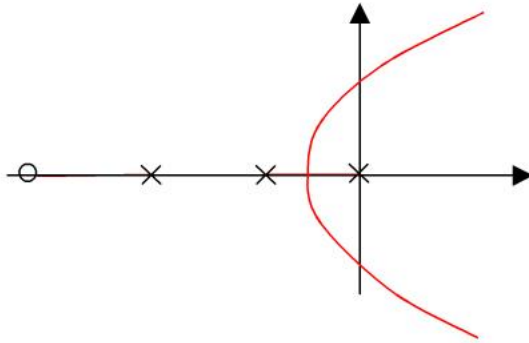
分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = \frac{1}{d+5} \quad d^3 + 10d^2 + 25d + 15 = 0 \text{ 解方程的 } d_1 = -6.5171,$$

$$d_2 = -2.5964, \quad d_3 = -0.8865$$

取分离点为 $d = -0.8865$

根轨迹如图中红线所示。



4-5 已知单位反馈控制系统开环传递函数如下，试概略画出相应的闭环根轨迹图(要求算出起始角 θ_{pi})：

(1)  $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$

解：

系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)} \frac{K_g(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$

有两个极点： $p_1 = (-1+j2)$ ， $p_2 = (-1-j2)$ ，有一个零点 $(-2, j0)$ 。

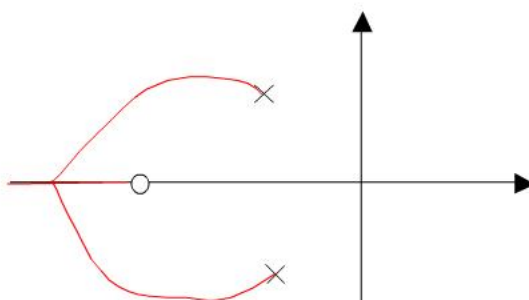
起始角：

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\theta_{p_1} = \pi + \varphi_{z_1 p_1} - \theta_{p_2 p_1} = 180^\circ + 45^\circ - 90^\circ = 135^\circ$$

$$\theta_{p_2} = \pi + \varphi_{z_1 p_2} - \theta_{p_1 p_2} = 180^\circ - 45^\circ + 90^\circ = 225^\circ$$

根轨迹如图中红线所示。



$$(2) \quad G(s) = \frac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}。$$

解：

$$\text{系统开环传递函数为 } G(s) = \frac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$$

有三个极点： $p_1 = (0, j0)$ ， $p_2 = (-10+j10)$ ， $p_3 = (-10-j10)$ ，有一个零点 $z_1 = (-20, j0)$ 。

起始角：

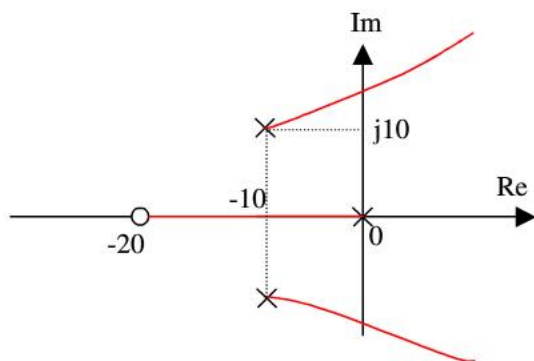
$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\theta_{p_1} = 180^\circ$$

$$\theta_{p_2} = 180^\circ + \varphi_{z_1 p_2} - \theta_{p_1 p_2} - \theta_{p_3 p_2} = 180^\circ + 45^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 0^\circ$$

$$\theta_{p_3} = 180^\circ + \varphi_{z_1 p_3} - \theta_{p_1 p_3} - \theta_{p_2 p_3} = 180^\circ - 45^\circ + 135^\circ + 90^\circ = 0^\circ$$

根轨迹如图中红线所示。



4-6 设单位反馈控制系统的开环传递函数如下，要求：

$$(1) \quad \text{确定 } G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+10)} \text{ 产生纯虚根的开环增益值。}$$

解：系统特征方程为 $s^3 + 11s^2 + 10s + K^* = 0$

令 $s = j\omega$ 代入特征方程中得：

$$\text{实部方程为：} K^* - 11\omega^2 = 0$$

$$\text{虚部方程为：} 10\omega - \omega^3 = 0$$

解上述方程得： $\omega^2 = 10$ $K^* = 110$ 开环增益按一般定义： $K = K^* / 10 = 11$

(2) 确定 $G(s) = \frac{K^*(s+z)}{s^2(s+10)(s+20)}$ 产生纯虚根为 $\pm j1$ 的 z 值和 K^* 值。

解：系统特征方程为 $s^4 + 30s^3 + 200s^2 + K^*s + K^*z = 0$

令 $s = j1$ 代入特征方程中得：

实部方程为： $K^*z + 1 - 200 = 0$

虚部方程为： $K^* - 30 = 0$

解上述方程得： $K^* = 30$ $z = 199/30$

(3) 概略绘出确定 $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$ 的闭环根轨迹图。(要求确定根轨迹的分离点、起始角和与虚轴的交点)。

解：系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$

有五个极点： $p_1 = (0, j0)$, $p_2 = (-1, j0)$, $p_3 = (-3.5, j0)$, $p_4 = (-3, j2)$,

$p_5 = (-3, -j2)$, 没有零点。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+3.5} + \frac{1}{d+3+j2} + \frac{1}{d+3-j2} = 0$$

$4d^4 + 35d^3 + 111.5d^2 + 146d + 45.5 = 0$ 解方程的 $d_1 = -3.5$, $d_2 = -0.44$,

$d_3 = -2.4 + j1.265$ $d_4 = -2.4 - j1.265$

取分离点为 $d = -0.44$

起始角：

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

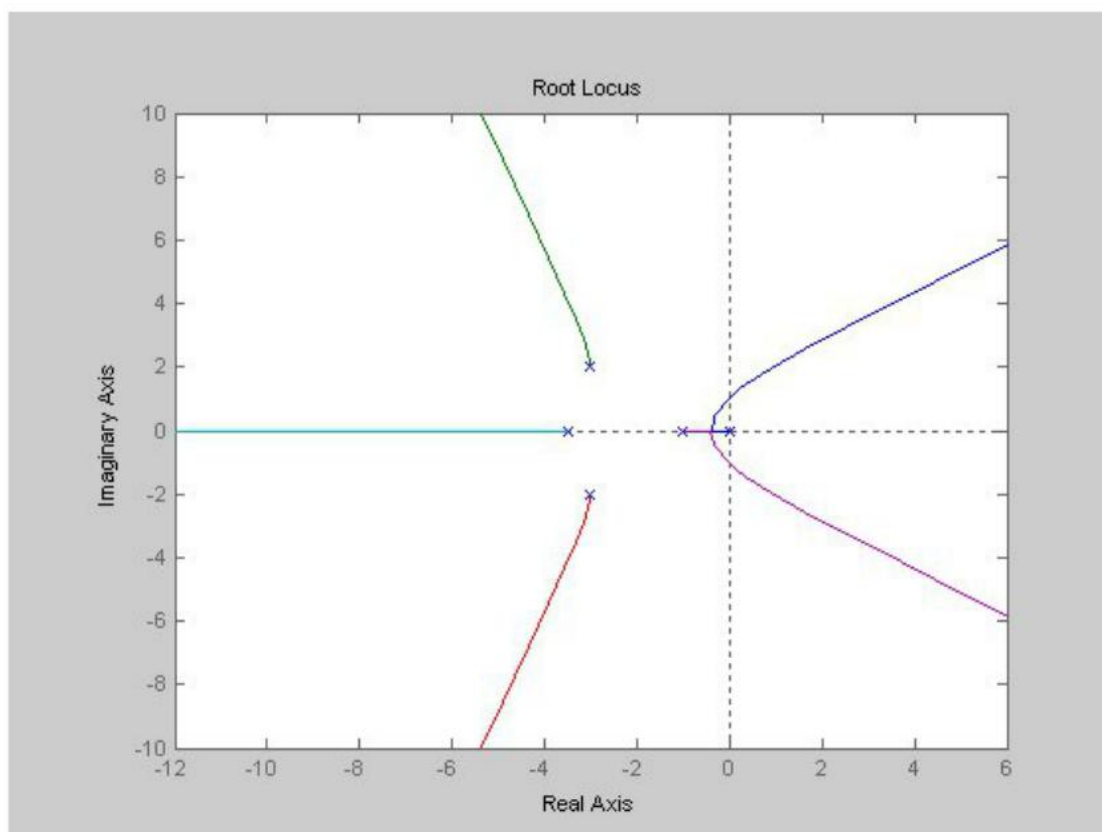
$$\theta_{p_1} = 180^\circ$$

$$\theta_{p_2} = 0^\circ$$

$$\theta_{p_3} = 180^\circ - \theta_{p_1 p_3} - \theta_{p_2 p_3} - \theta_{p_4 p_3} - \theta_{p_5 p_3} = 180^\circ - 146.45^\circ - 135^\circ - 90^\circ - 75.7^\circ = 93^\circ$$

$$\theta_{p_4} = 180^\circ - \theta_{p_1 p_4} - \theta_{p_2 p_4} - \theta_{p_3 p_4} - \theta_{p_5 p_4} = 180^\circ + 146.45^\circ + 135^\circ + 90^\circ + 75.7^\circ = -93^\circ$$

根轨迹如图所示。



与虚轴的交点：令 $s = j\omega$ 代入特征方程中

$$s^5 + 10.5s^4 + 43.5s^3 + 79.5s^2 + 45.5s + K^* = 0$$

得到：

实部方程为： $10.5\omega^4 - 79.5\omega^2 + K^* = 0$

虚部方程为： $\omega^5 - 43.5\omega^3 + 45.5\omega = 0$

解方程得到： $\omega_1 = 6.5136$ $\omega_2 = 1.0356$ ，将 $\omega_1 = 6.5136$ 代入实部方程得到 $K^* < 0$ 不

符合要求，将 $\omega_2 = 1.0356$ 代入实部方程得到 $K^* = 73$ 满足要求。

所以取 $\omega = 1.0356$ 即根轨迹与虚轴的交点为 $\omega = \pm 1.0356$

4-7 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$$

其根轨迹图见图 4-2。试从数学上证明：复数根轨迹部分是以 $(-2, j0)$ 为圆心，以 $\sqrt{2}$ 为半径的一个圆。

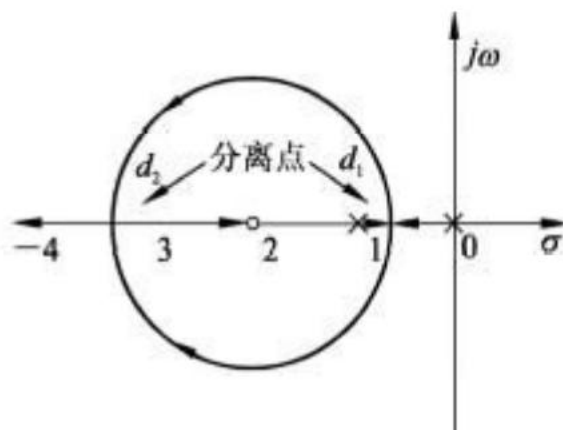


图 4-2 系统根轨迹图

解：证明如下：

根据辐角条件可知，根轨迹各点应满足

$$\angle(s+2) - \angle s - \angle(s+1) = 180^\circ$$

在复平面上 $s = \sigma + j\omega$ ，于是得

$$\angle(\sigma + j\omega + 2) - \angle(\sigma + j\omega) - \angle(\sigma + j\omega + 1) = 180^\circ$$

$$\text{亦即 } \arctan \frac{\omega}{2+\sigma} - \arctan \frac{\omega}{\sigma} = \arctan \frac{\omega}{1+\sigma} + 180^\circ$$

利用反正切公式

$$\arctan X - \arctan Y = \arctan \frac{X - Y}{1 + XY}$$

可把上式改写为

对上式的两边取正切，整理后即得圆方程式

$$(\sigma + 2)^2 + \omega^2 = 2$$

它的圆心为 $(-2, j0)$ 半径等于 $\sqrt{2}$ 。这个圆与实轴的交点即为分离点和会合点。

证毕。

4-8 已知开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

试概略画出闭环系统根轨迹图。

解：系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

有四个极点： $p_1 = (0, j0)$ ， $p_2 = (-4, j0)$ ， $p_3 = (-2, j4)$ ， $p_4 = (-2, -j4)$ ，

没有零点。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+4} + \frac{1}{d+2+j4} + \frac{1}{d+2-j4} = 0$$

即 $(2d^2 + 8d + 20)(2d + 4) = 0$ 解方程的 $d_1 = -2$ ， $d_2 = -2 + j2.45$ ， $d_3 = -2 - j2.45$

取分离点为 $d_1 = -2$ ， $d_2 = -2 + j2.45$ ， $d_3 = -2 - j2.45$

起始角：

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

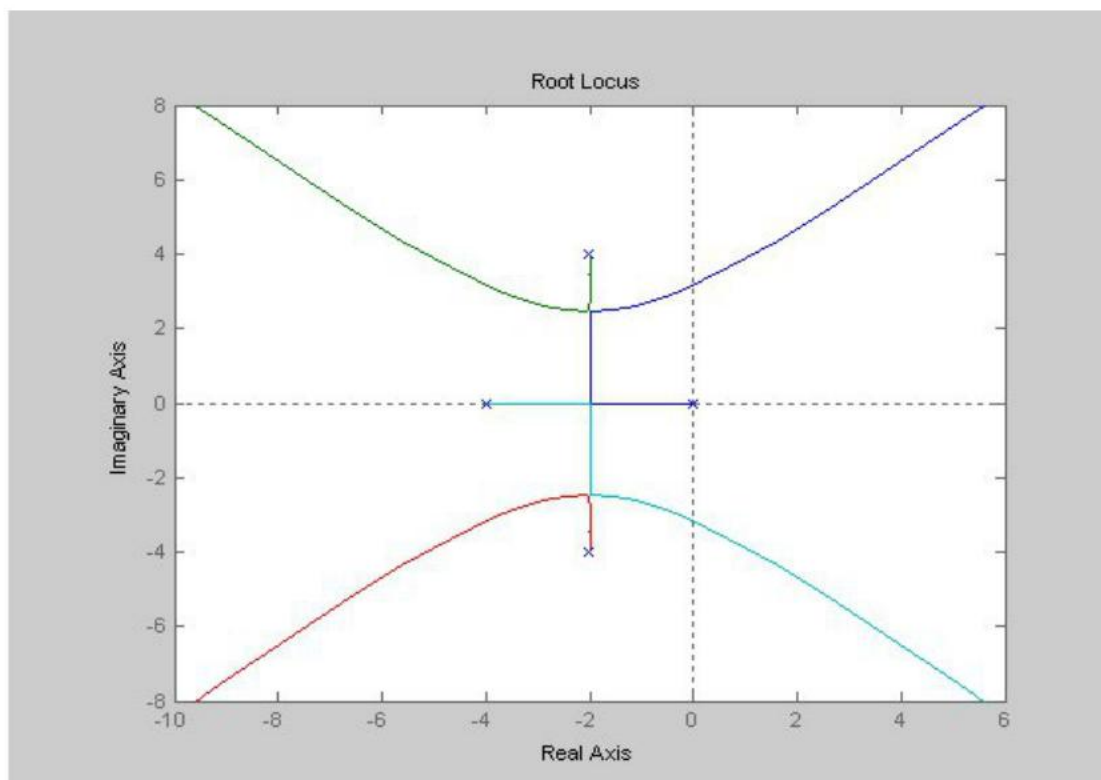
$$\theta_{p_1} = 180^\circ$$

$$\theta_{p_2} = -90^\circ$$

$$\theta_{p_3} = +90^\circ$$

$$\theta_{p_4} = 0^\circ$$

根轨迹如图所示。



4-9 已知开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s^2+4s+9)^2}$$

试概略绘制其闭环系统根轨迹。

解：系统有四个极点： $p_1 = p_2 = (-2, j2.24)$ ， $p_3 = p_4 = (-2, -j2.24)$ ，有一个零

点 $z_1 = (-2, j0)$ 。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{2}{d+2+j2.24} + \frac{2}{d+2-j2.24} = \frac{1}{d+2}$$

即 $3d^2 + 12d + 7 = 0$ 解方程的 $d_1 = -3.29$ ， $d_2 = -0.71$ ，

取分离点为 $d_1 = -3.29$

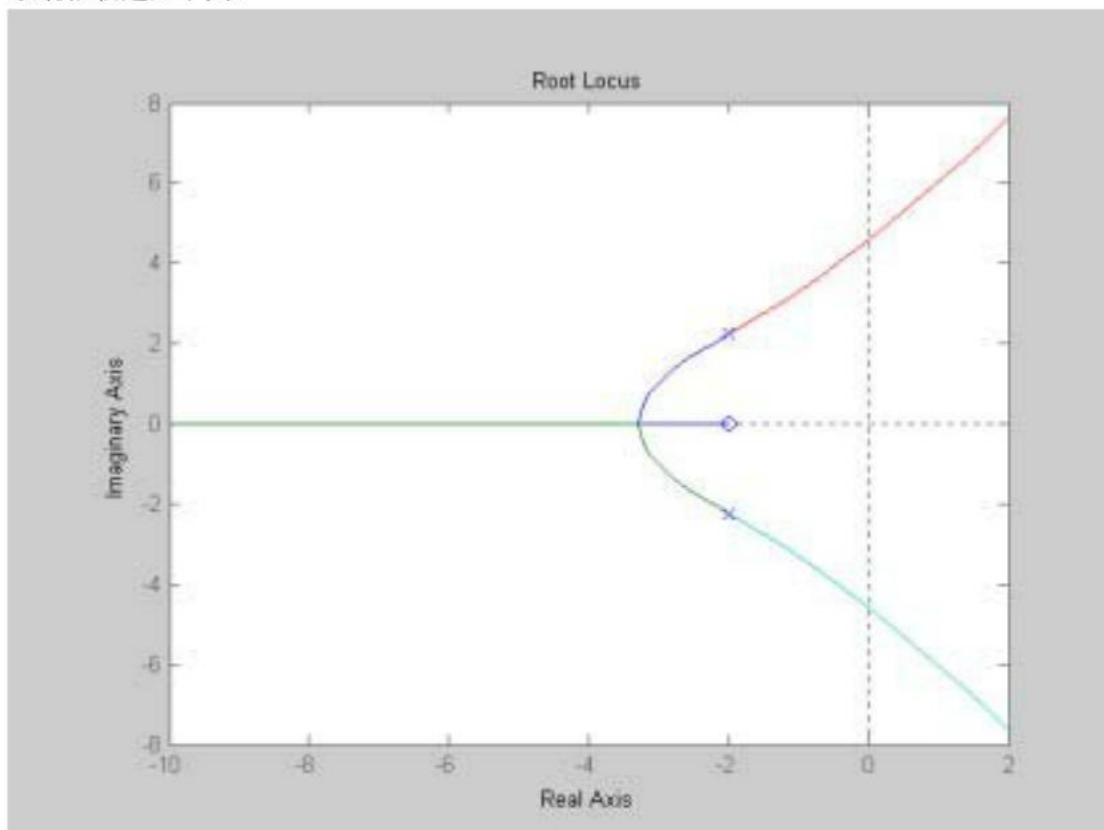
起始角：

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
 2\theta_{p_1} &= (2k+1)180^\circ + \varphi_{z,p_1} - \theta_{p_1 p_1} \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
 &= (2k+1)180^\circ + 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = (2k+1)180^\circ - 90^\circ
 \end{aligned}$$

所以： $\theta_{p_1} = 45^\circ, 225^\circ$ 同理 $\theta_{p_2} = 135^\circ, -45^\circ$

系统根轨迹如下图：



4-10 设单位反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(0.01s+1)(0.02s+1)}$$

要求：

- (1) 画出准确根轨迹(至少校验三点)；
- (2) 确定系统的临界稳定开环增益 K_c ；
- (3) 确定与系统临界阻尼比相应的开环增益 K 。

解：系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.01s+1)(0.02s+1)} = \frac{5000K}{s(s+100)(s+50)} = \frac{K^*}{s(s+100)(s+50)}$$

有三个极点： $p_1 = (0, j0)$, $p_2 = (-50, j0)$, $p_3 = (-100, j0)$ ，没有零点。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+50} + \frac{1}{d+100} = 0$$

即解方程 $3d^2 + 300d + 5000 = 0$ 得 $d_1 = -78.9$, $d_2 = -21.1$,

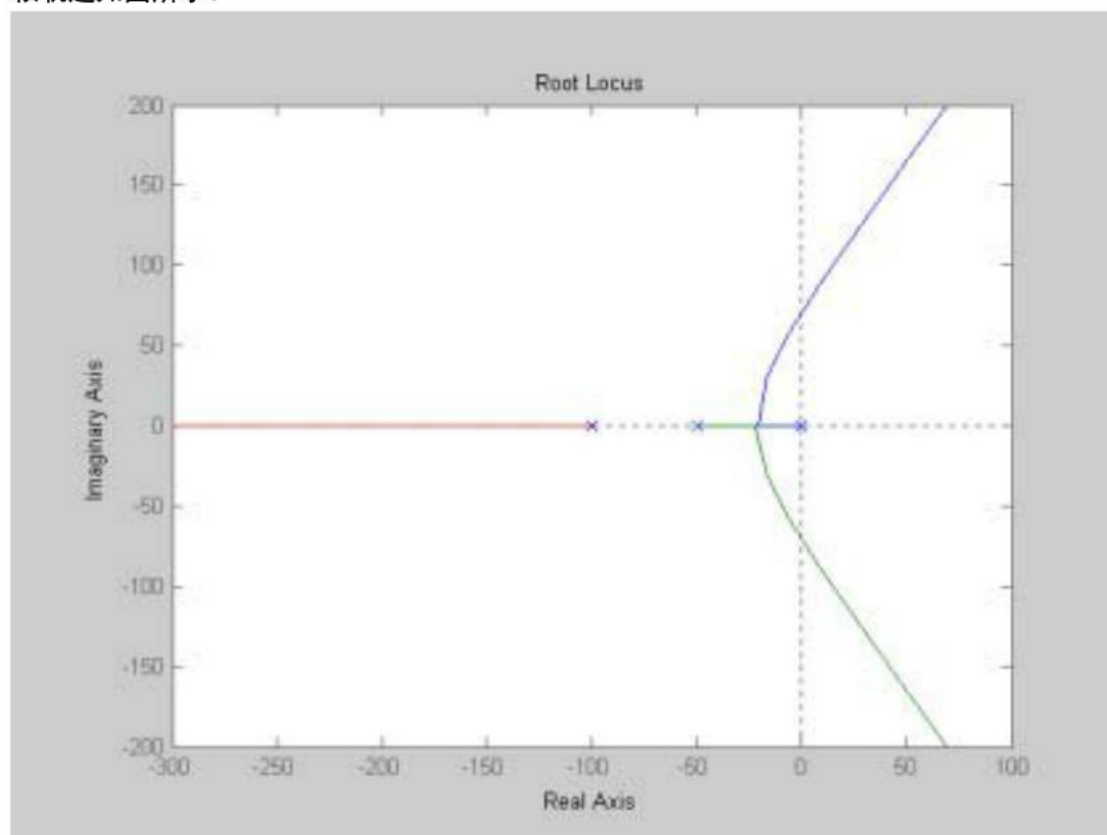
取分离点为 $d = -21.1$,

起始角:

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left(\sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \theta_{p_j p_i} \right) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\theta_{p_1} = 180^\circ \quad \theta_{p_2} = 0^\circ \quad \theta_{p_3} = 180^\circ$$

根轨迹如图所示。



(2) 令 $s = j\omega$ 代入系统特征方程中 $s^3 + 150s^2 + 5000s + K^* = 0$

得到实部方程为: $K^* - 150\omega^2 = 0$

虚部方程为: $5000\omega - \omega^3 = 0$

解方程得: $\omega = 70.7 \quad K^* = 750000 \quad$ 所以 $K_c = 150$

(3) 令 $s = -21.1$ 代入系统特征方程中 $s^3 + 150s^2 + 5000s + K^* = 0$

得到 $K^* = 48112$ 系统临界阻尼比相应的开环增益 $K = 9.62$

4-11 一单位反馈系统，其开环传递函数

$$G(s) = \frac{6.9(s^2 + 6s + 25)}{s(s^2 + 8s + 25)}$$

试用根轨迹法计算闭环系统根的位置。

解：系统特征方程为： $s(s^2 + 8s + 25) + 6.9(s^2 + 6s + 25) = 0$

即： $s^3 + 14.9s^2 + 66.4s + 172.5 = 0$

-9.9780

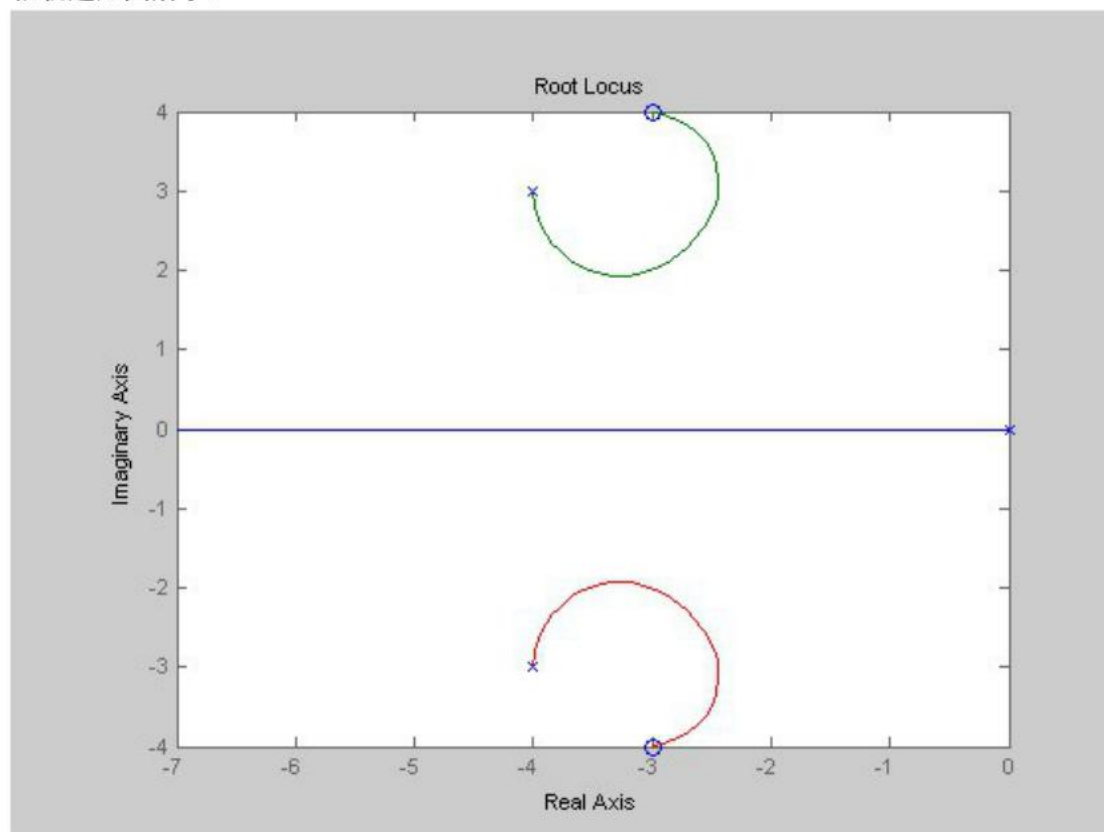
-2.4610 + 3.3513i

-2.4610 - 3.3513i

解方程得： $s_1 = -9.978$ $s_2 = -2.461 + j3.3513$ $s_3 = -2.461 - j3.3513$

所以：闭环系统根的位置为 $s_2 = -2.461 + j3.3513$ $s_3 = -2.461 - j3.3513$

根轨迹如图所示：



4-12 设反馈控制系统中

$$G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)}, \quad H(s) = 1$$

要求：

- (1) 概略绘出系统根轨迹图，并判断闭环系统的稳定性；
- (2) 如果改变反馈通路传递函数，使 $H(s) = 1 + 2s$ ，试判断 $H(s)$ 改变后的系统稳定性，