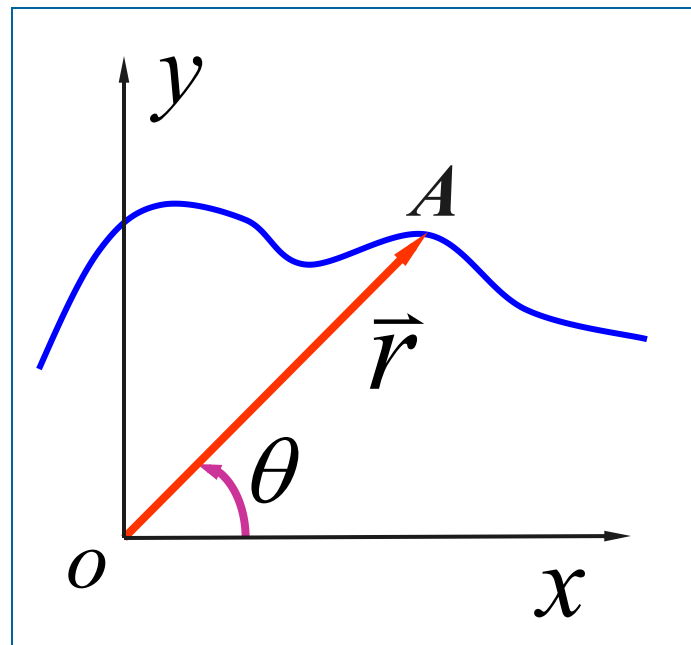


## 一 平面极坐标

设一质点在  $Oxy$  平面内运动，某时刻它位于点  $A$ . 矢径  $\vec{r}$  与  $x$  轴之间的夹角为  $\theta$ . 于是质点在点  $A$  的位置可由  $A(r, \theta)$  来确定.



以  $(r, \theta)$  为坐标的参考系为平面极坐标系.

它与直角坐标系之间的变换关系为

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

## 极坐标描述下的圆周运动( $\mathbf{r}(t)=r$ )

角坐标  $\theta(t)$ ，逆时针为正

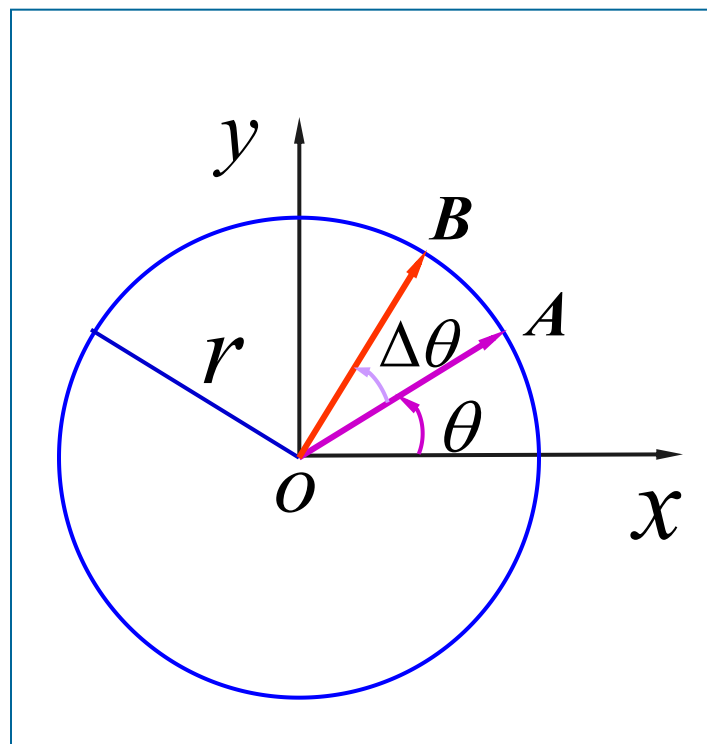
$$\text{角速度 } \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

速率

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v(t) = r\omega(t)$$

$$\text{角加速度 } \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$



## 二自然坐标系下的圆周运动

匀速  $\vec{v} = v \vec{e}_t = r \omega \vec{e}_t$

质点作变速率圆周运动时

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

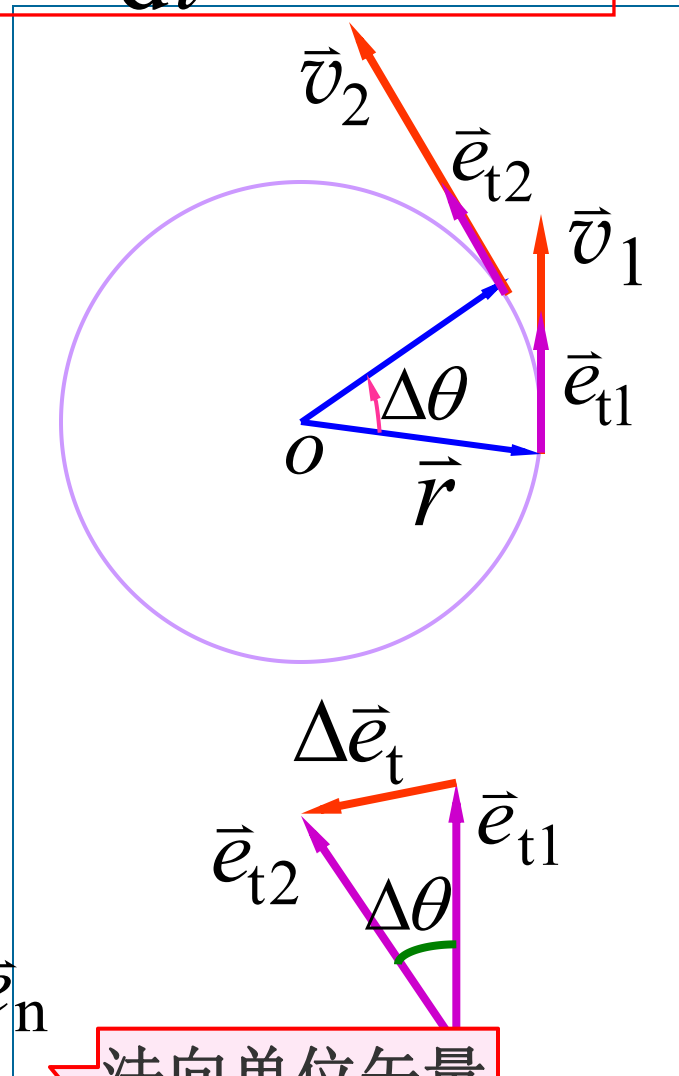
切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \alpha$$

切向单位矢量的时间变化率

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \vec{e}_n = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_n$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \omega \vec{e}_n$$



法向单位矢量

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \omega \vec{e}_n$$

切向加速度（速度大小变化引起）

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\alpha$$

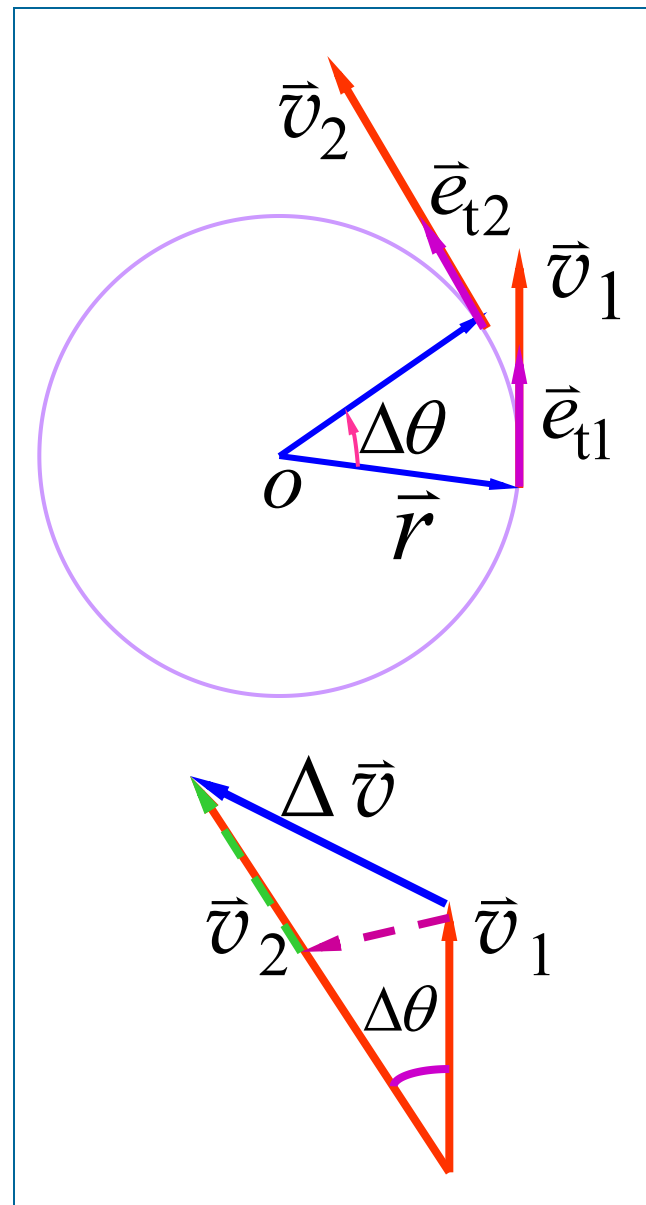
法向加速度（速度方向变化引起）

$$a_n = v\omega = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

圆周运动加速度

$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

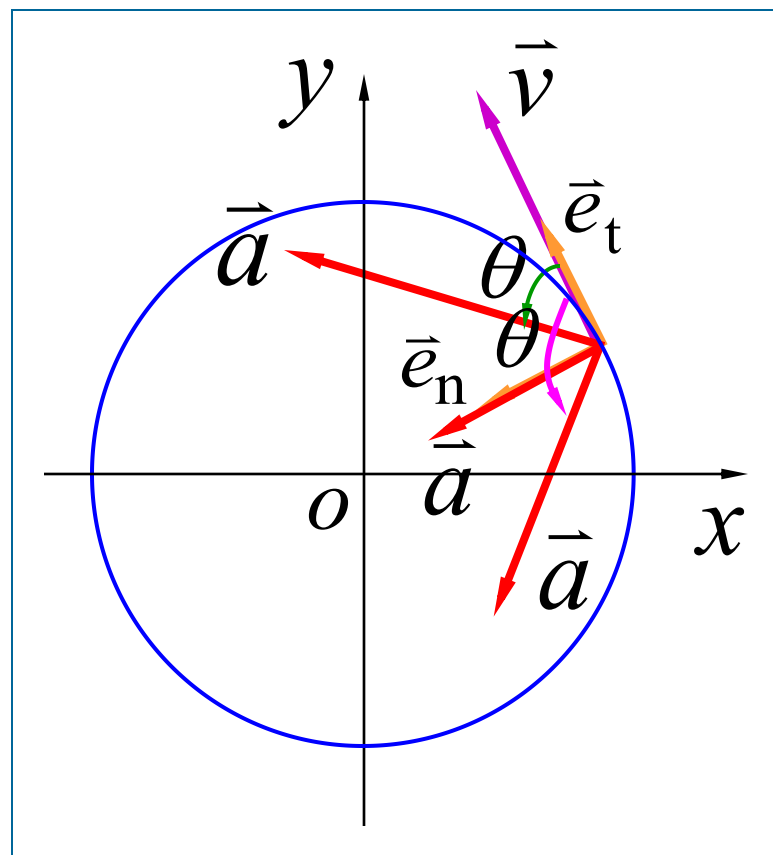
$$\because a_n > 0 \therefore 0 < \theta < \pi$$

切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\alpha$$

$$a_t \begin{cases} > 0, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, & v \text{ 增大} \\ = 0, & \theta = \frac{\pi}{2}, & v \equiv \text{常量} \\ < 0, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, & v \text{ 减小} \end{cases}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_n}{a_t}$$



$$\Delta s = r \Delta \theta, \quad \text{弧长}$$

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = v\omega = r\omega^2$$

- 速度只有切向分量，没有法向分量；
- 加速度的方向是变化的；
- 加速度的法向分量永远指向圆心。

一般曲线运动（自然坐标）

“以直代曲”一求速度      “以圆代曲”一求加速度

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

其中  $\rho = \frac{ds}{d\theta}$  曲率半径。

### 三 匀速率圆周运动和匀变速率圆周运动

**1** 匀速率圆周运动：速率  $v$  和角速度  $\omega$  都为常量。

$$a_t = 0 \quad \vec{a} = a_n \vec{e}_n = r \omega^2 \vec{e}_n$$

**2** 匀变速率圆周运动

类似于匀变速率直线运动

$$a_t = \text{常量} \quad \alpha = \text{常量}$$

如  $t=0$  时,  $\theta = \theta_0, \omega = \omega_0$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

## 讨论

对于作曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

(A) 切向加速度必不为零；



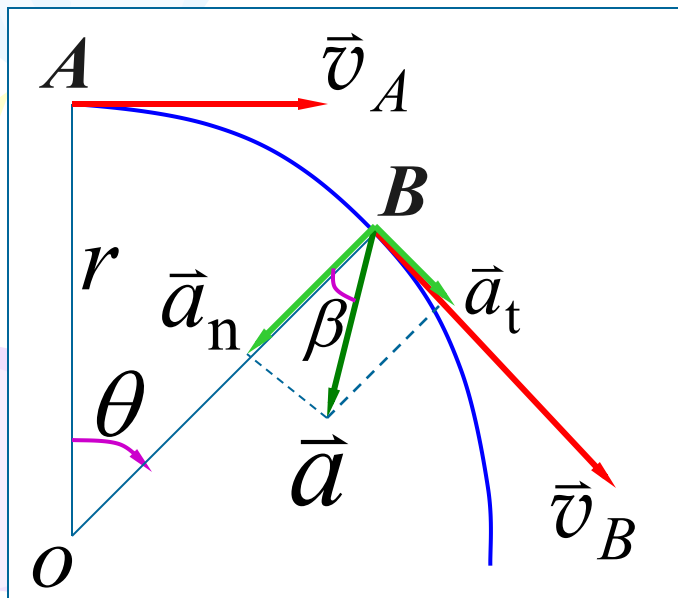
(B) 法向加速度必不为零（拐点处除外）；

(C) 由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

(D) 若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；

(E) 若物体的加速度  $\vec{a}$  为恒矢量，它一定作匀变速率运动。

**例** 如图一超音速歼击机在高空  $A$  时的水平速率为  $1940 \text{ km/h}$ ，沿近似于圆弧的曲线俯冲到点  $B$ ，其速率为  $2192 \text{ km/h}$ ，所经历的时间为  $3 \text{ s}$ ，设圆弧  $\widehat{AB}$  的半径约为  $3.5 \text{ km}$ ，且飞机从  $A$  到  $B$  的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动，若不计重力加速度的影响，求：(1) 飞机在点  $B$  的加速度；(2) 飞机由点  $A$  到点  $B$  所经历的路程。



**解** (1) 因飞机作匀变速率运动所以  $a_t$  和  $\alpha$  为常量。

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

分离变量有 
$$\int_{v_A}^{v_B} dv = \int_0^t a_t dt$$

已知:  $v_A = 1940 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$   $v_B = 2192 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

$$t = 3 \text{ s}$$

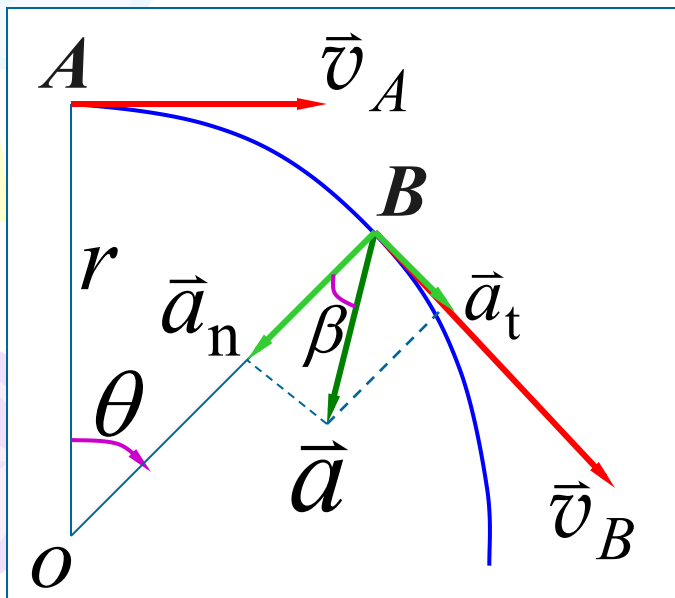
$$\widehat{AO} = 3.5 \text{ km}$$

$$\int_{v_A}^{v_B} dv = \int_0^t a_t dt$$

$$a_t = \frac{v_B - v_A}{t} = 23.3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = \frac{v_B^2}{r} = 106 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

在点  $B$  的法向加速度



在点  $B$  的加速度

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 109 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$\vec{a}$  与法向之间夹角  $\beta$  为

$$\beta = \arctan \frac{a_t}{a_n} = 12.4^\circ$$

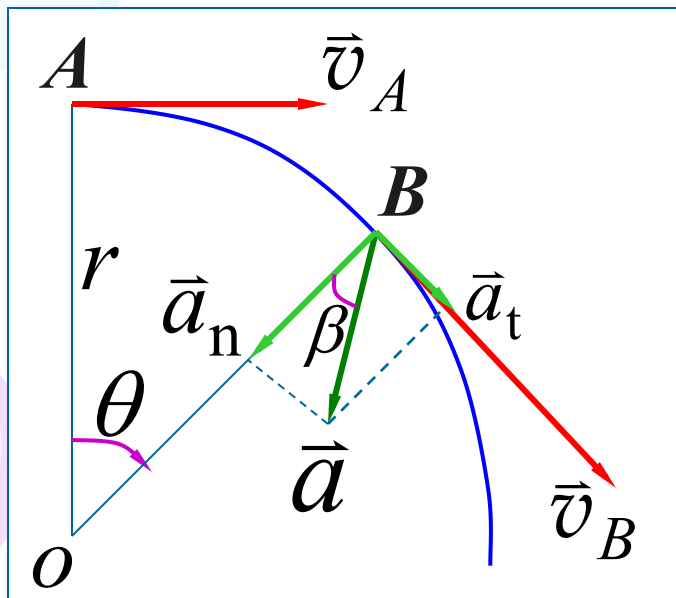
已知:  $v_A = 1940 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$   $v_B = 2192 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

$$t = 3 \text{ s}$$

$$\widehat{AO} = 3.5 \text{ km}$$

(2) 在时间  $t$  内矢径  $\vec{r}$  所转过的角度  $\theta$  为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$



飞机经过的路程为

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2} a_t t^2$$

代入数据得

$$s = 1722 \text{ m}$$

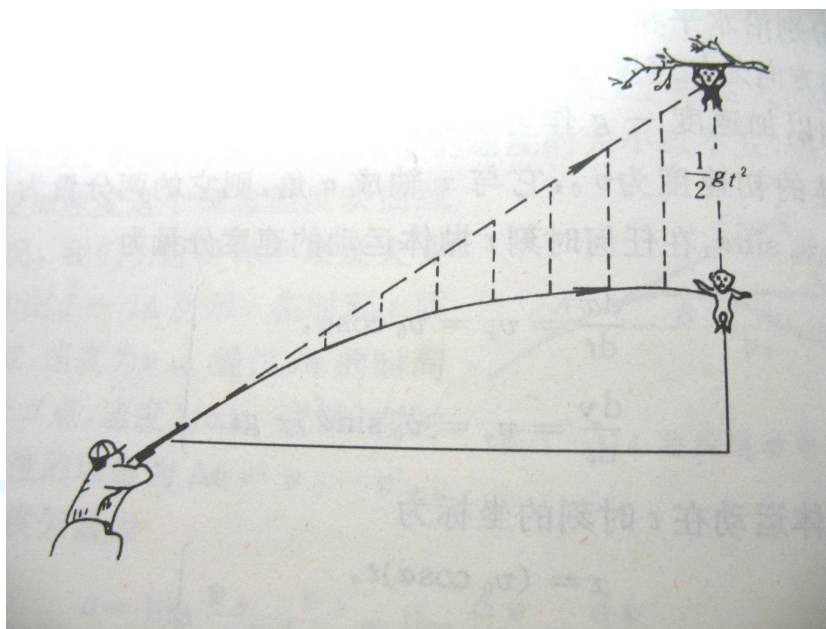
# 抛体运动

## ● 欧洲中世纪对抛体的描述



图 1 - 15 欧洲中世纪的抛体理论

- 忽略空气阻力的影响
  - 水平和垂直分量互相独立
- 猎人与猴子的老故事



猎人犯的错

猴子犯的错

# 最大射程和最大射高

初始条件

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) t \\ y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \longrightarrow x = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

当角度  $\alpha = 45^\circ$  时  $x$  有最大值  $x_{\max} = v_0^2 / g$  **最大射程**

当角度  $\alpha = 90^\circ$  时

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2} g \left( t^2 - \frac{2v_0}{g} t + \frac{v_0^2}{g^2} \right) + \frac{1}{2} g \times \frac{v_0^2}{g^2}$$

$$y_{\max} = v_0^2 / (2g)$$

**最大射高**

- **例** 大马哈鱼总是逆流而上，游到乌苏里江去产卵，游程中有时要跃上瀑布。这种鱼跃出水面的速度可达32km/h。它最高可跃上多高的瀑布？和人的跳高记录相比如何？

鱼跃出水面的速度  $v_0 = 32\text{km/h} = 8.89\text{m/s}$ ，  
若竖直跃出水面，则跃出的高度为

$$h = v_0^2 / (2g) = 4.03(\text{m})$$

对比：人跳高的世界记录是2.45m（古巴，1993）。