一　参考系　质点

1 参考系

为描述物体的运动而选择的标准物叫做参考系.

选取的参考系不同，对物体运动情况的描述不同，这就是运动描述的相对性.（直角，极，自然）

2 质点

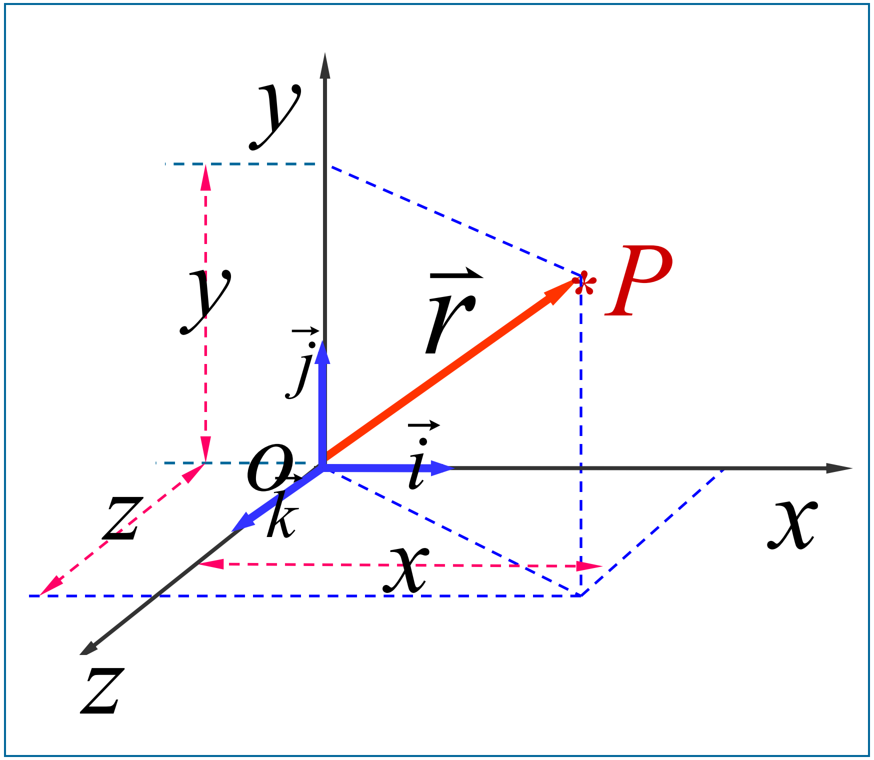
如果我们研究某一物体的运动，而可以忽略其大小和形状对物体运动的影响，若不涉及物体的转动和形变，我们就可以把物体当作是一个具有质量的点（即**质点**）来处理 .(平动，刚体)

质点是经过科学抽象而形成的理想化的物理模型．目的是为了突出研究对象的主要性质，暂不考虑一些次要的因素．

二 位置矢量 运动方程 位移

1 位置矢量

确定质点P某一时刻在坐标系里的位置的物理量称位置矢量，简称位矢$\vec{r}$.



$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

式中$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别为x、y、z方向的单位矢量.

位矢$\vec{r}$的值为 $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

位矢 $\vec{r}$ 的方向余弦

$$\begin{cases} \cos\alpha = x/r \\ \cos\beta = y/r \\ \cos\gamma = z/r \end{cases}$$

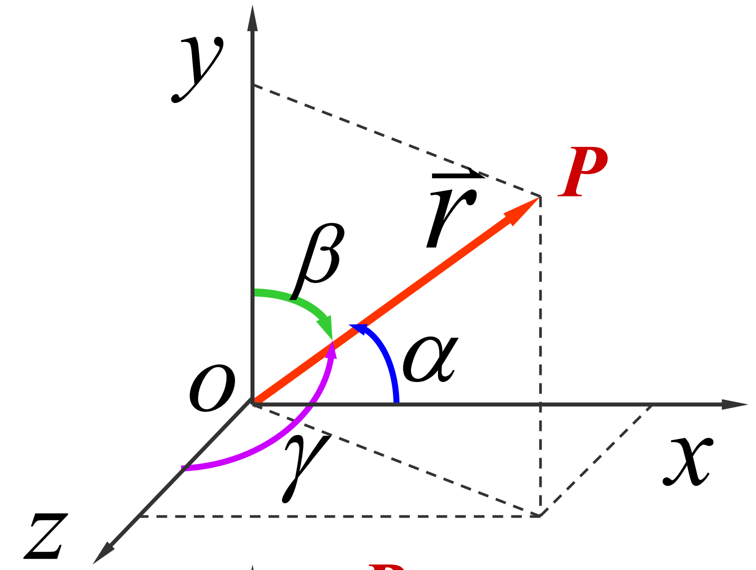
2 运动方程

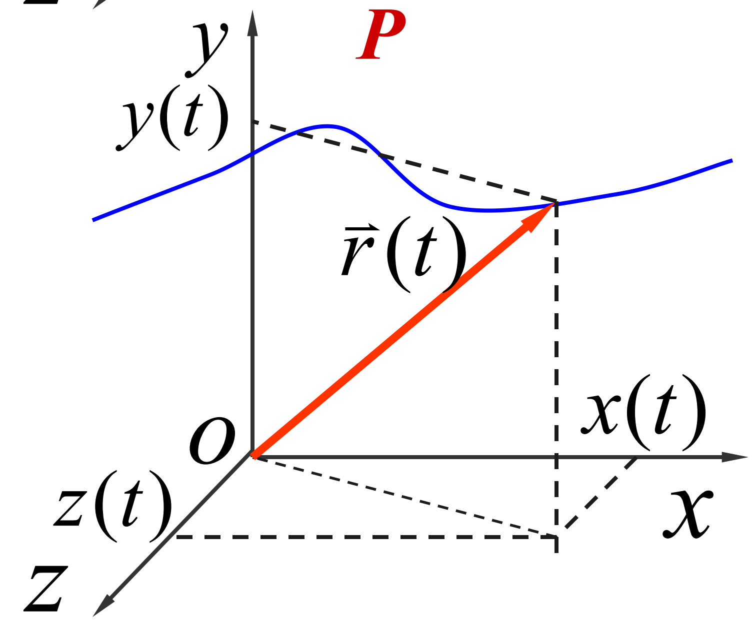
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

分量式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

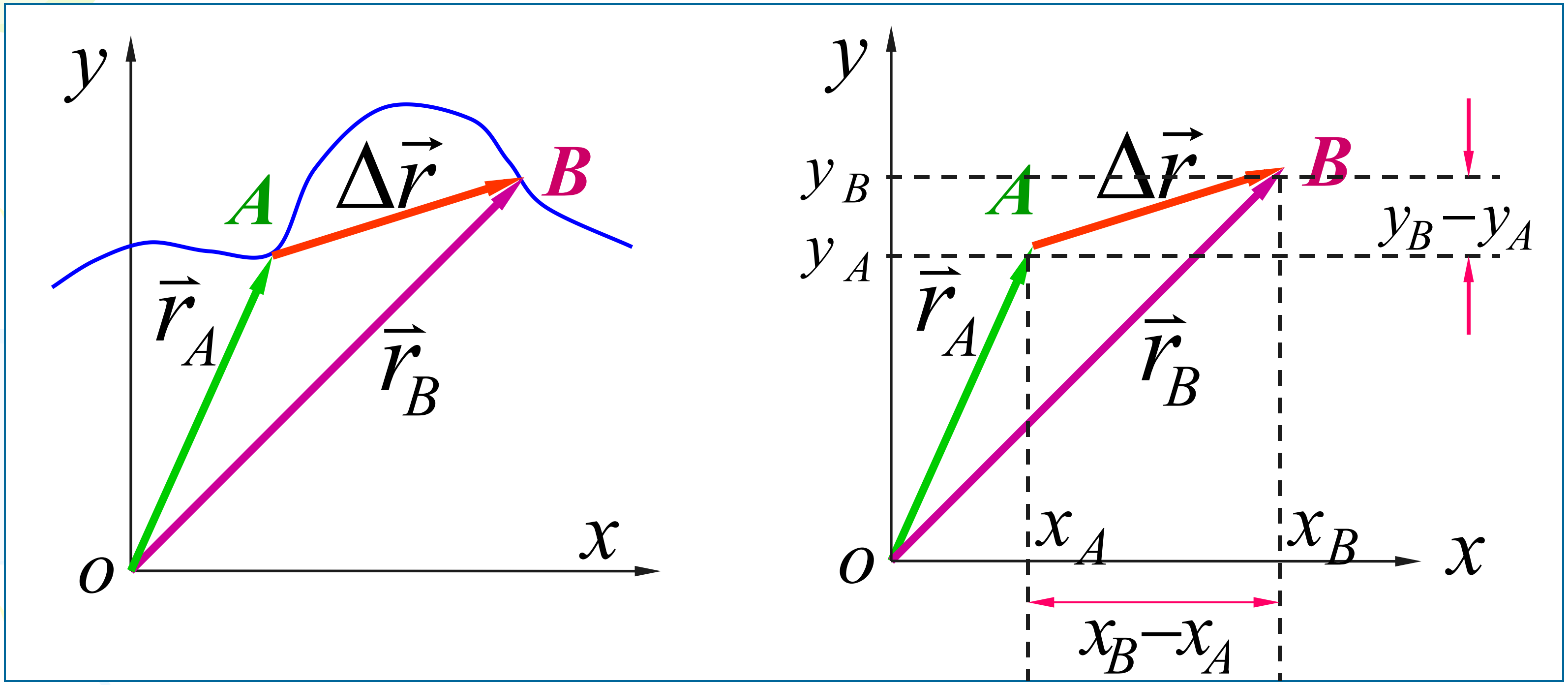
从中消去参数 t 得轨迹方程

$$f(x,y,z) = 0$$





3 位移



经过时间间隔Δt后，质点位置矢量发生变化，由始点 A 指向终点 B 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 称为点 A 到 B 的位移矢量$\Delta\vec{r}$. 位移矢量也简称位移.

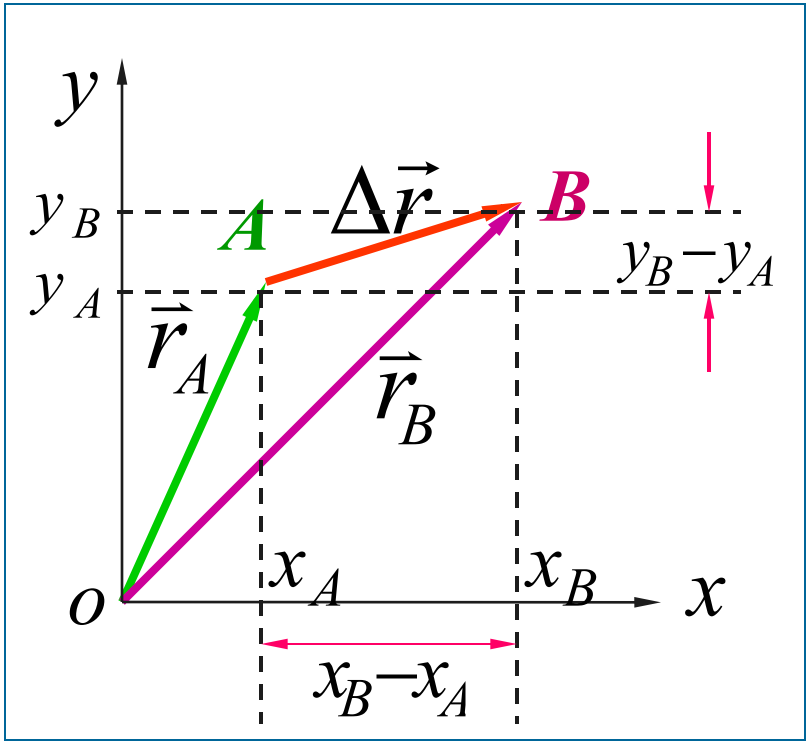
$$\because \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \Delta\vec{r} \qquad \therefore \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

又 $\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$

$\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$

所以位移 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$



若质点在三维空间中运动，则在直角坐标系 $Oxyz$ 中其位移为

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

位移的大小为 $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

4 路程（Δs）：质点实际运动轨迹的长度.

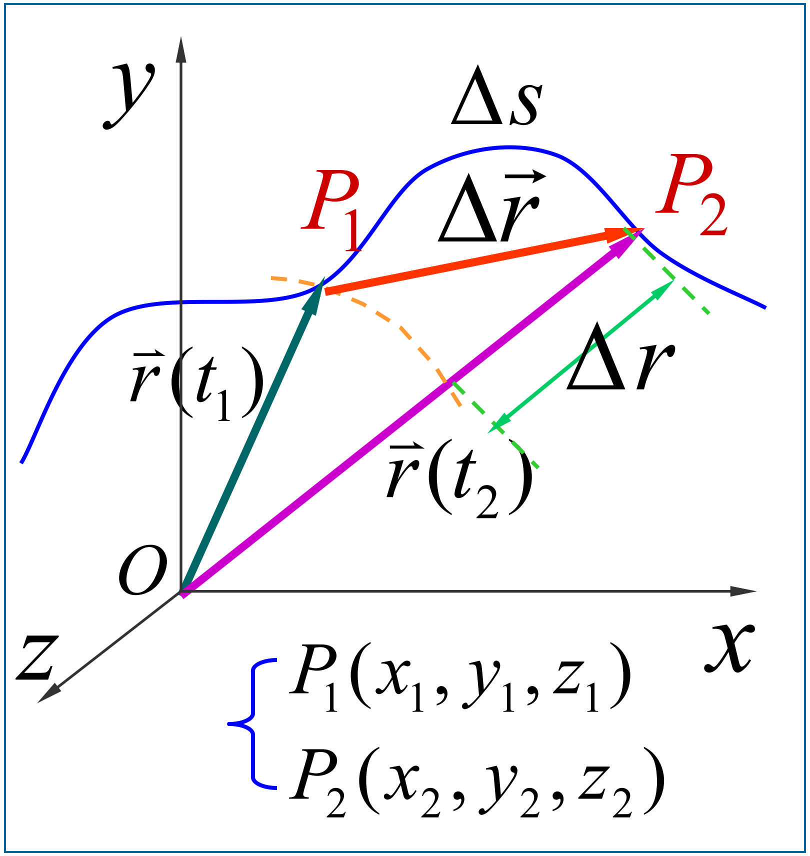
位移的物理意义

A) 确切反映物体在空间位置的变化，与路径无关，只决定于质点的始末位置.

B） 反映了运动的矢量性和叠加性.

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$



注意

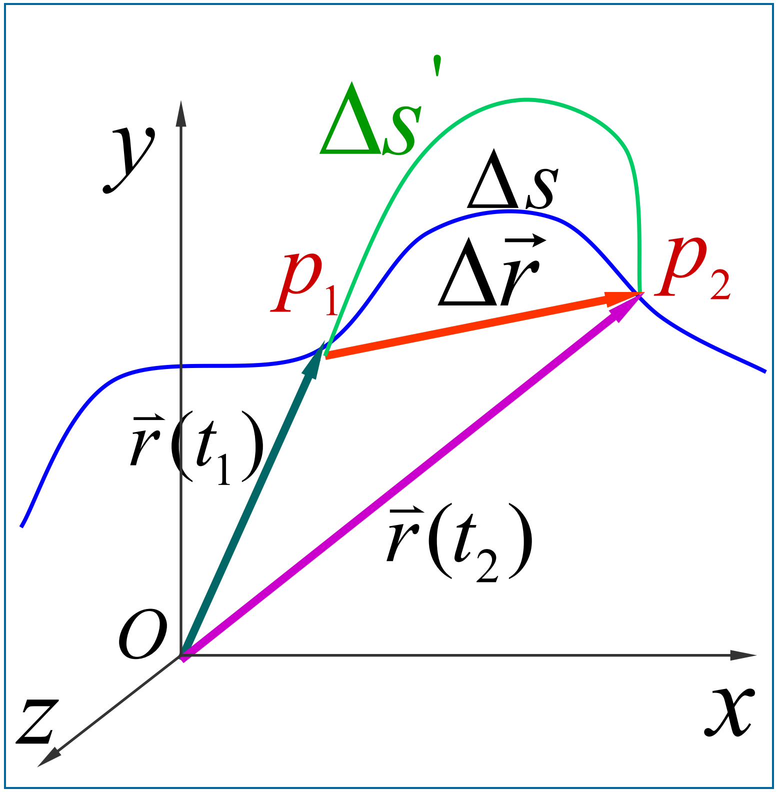
$$\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta r$$

位矢长度的变化

$$\Delta r = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

讨论 位移与路程

（**A**）P_1P_2 两点间的路程是不唯一的，可以是 Δs 或 $\Delta s'$ 而位移 $\Delta\vec{r}$ 是唯一的.



（**B**） 一般情况，位移大小不等于路程.

$$\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta s$$

（**C**）什么情况 $\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta s$？

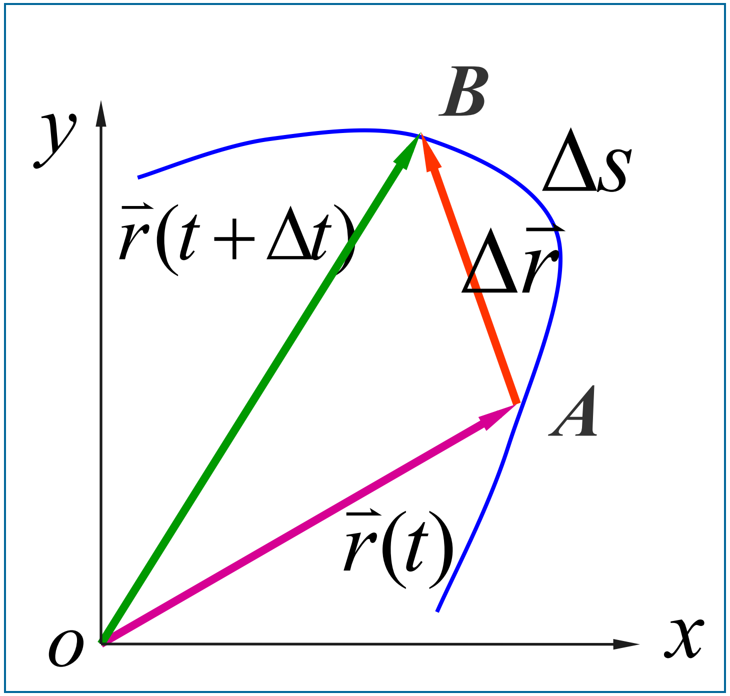
不改变方向的直线运动；当 $\Delta t \to 0$ 时 $\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta s$.

（**D**）位移是矢量，路程是标量.

三　速度

1　平均速度

在Δt时间内，质点从点 A 运动到点 B，其位移为



$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

Δt时间内，质点的平均速度

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

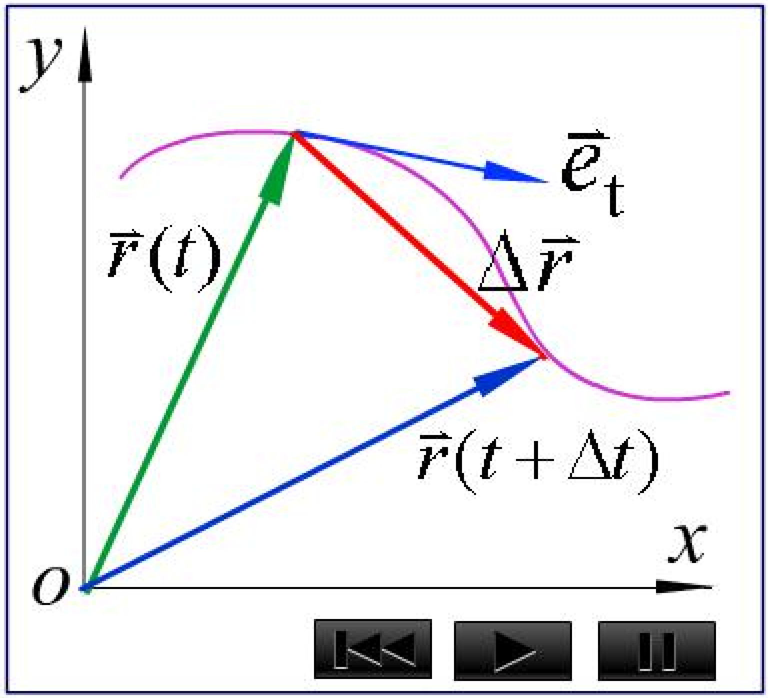
或　$\bar{\vec{v}}=\bar{v}_x\vec{i}+\bar{v}_y\vec{j}$　　平均速度 $\bar{\vec{v}}$ 与 $\Delta\vec{r}$ 同方向.

平均速度大小　$|\bar{\vec{v}}|=\sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2+(\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}$

2　瞬时速度

当 $\Delta t \to 0$ 时平均速度的极限值叫做瞬时速度，简称速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

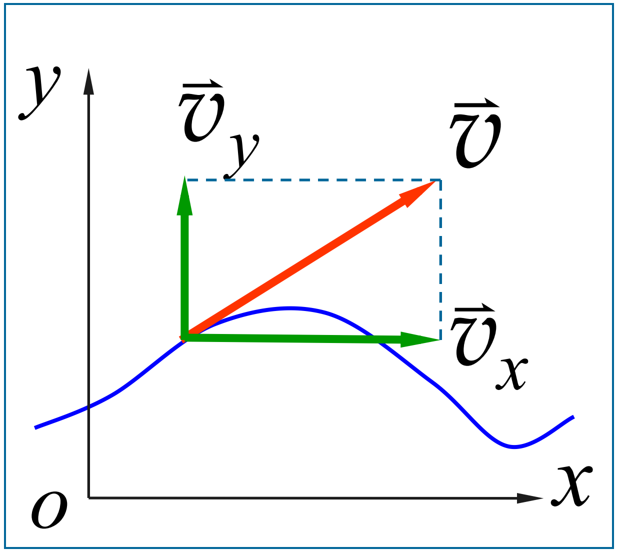
当 $\Delta t \to 0$ 时，$|d\vec{r}| = ds$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$$

当质点做曲线运动时，质点在某一点的速度方向就是沿该点曲线的切线方向.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$



若质点在三维空间中运动，其速度为

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

瞬时速率：速度 $\vec{v}$ 的大小称为速率

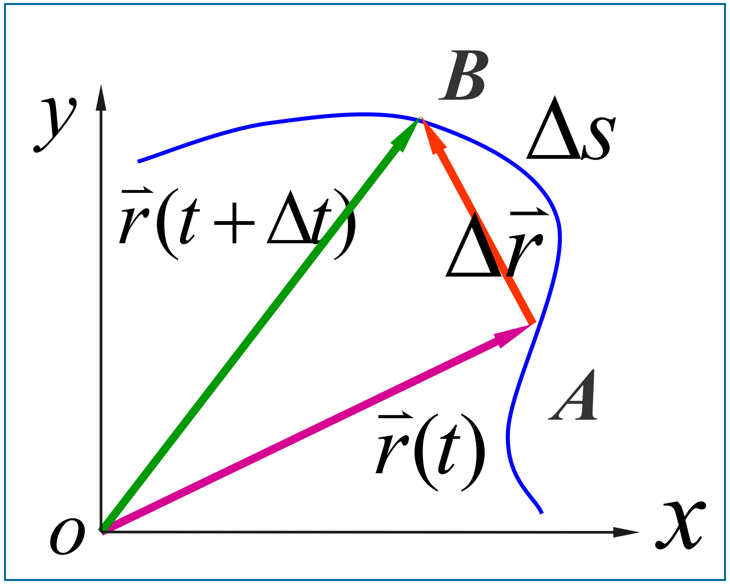
$$\because \vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}$$

$$\therefore v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

平均速率 $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速率 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$



讨论

一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为

（A）$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　（B）$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

（C）$\dfrac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$　　★（D）$\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

例 1　设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$，其中 $x(t)=(1\mathrm{m\cdot s^{-1}})t+2\mathrm{m}$, $y(t)=(\frac{1}{4}\mathrm{m\cdot s^{-2}})t^2+2\mathrm{m}$.（**1**）求 t=3 s 时的速度.（**2**）作出质点的运动轨迹图.

解　（**1**）由题意可得速度分量分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1\mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(\frac{1}{2}\mathrm{m\cdot s^{-2}})t$$

t=3 s 时速度为 $\vec{v}=(1\mathrm{m\cdot s^{-1}})\vec{i}+(1.5\mathrm{m\cdot s^{-1}})\vec{j}$

速度 $\vec{v}$ 与 x 轴之间的夹角

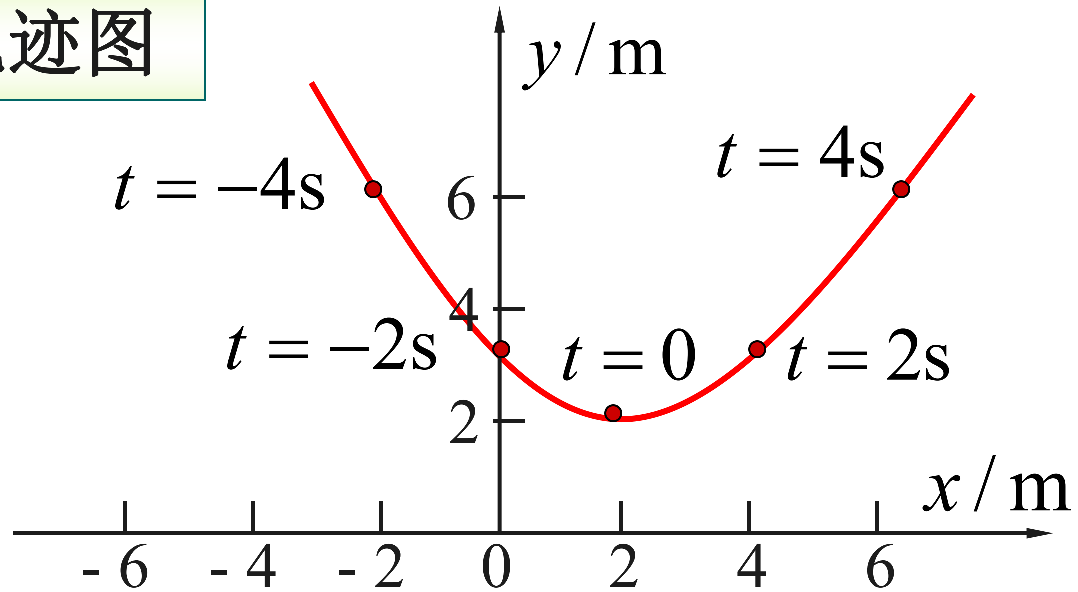
$$\theta=\arctan\frac{1.5}{1}=56.3^\circ$$

（2） 运动方程 $\begin{cases} x(t) = (1\text{m}\cdot\text{s}^{-1})t + 2\text{m} \\ y(t) = (\frac{1}{4}\text{m}\cdot\text{s}^{-2})t^2 + 2\text{m} \end{cases}$

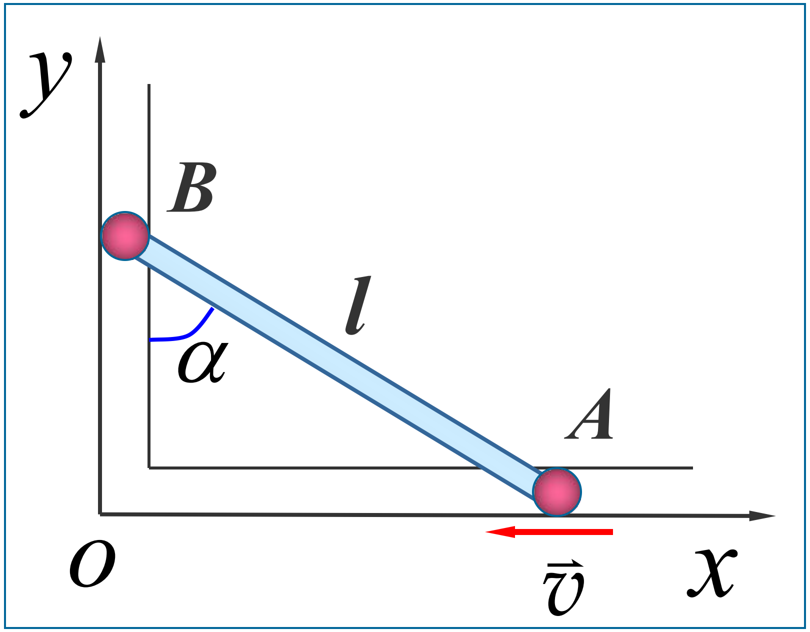
由运动方程消去参数 t 可得轨迹方程为

$$y = (\frac{1}{4}\text{m}^{-1})x^2 - x + 3\text{m}$$

轨迹图



例2　如图所示，A、B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，A、B 两物体可在光滑轨道上滑行.如物体 A 以恒定的速率 v 向左滑行，当 $\alpha=60°$ 时，物体 B 的速率为多少？



解　建立坐标系如图，

物体 A 的速度

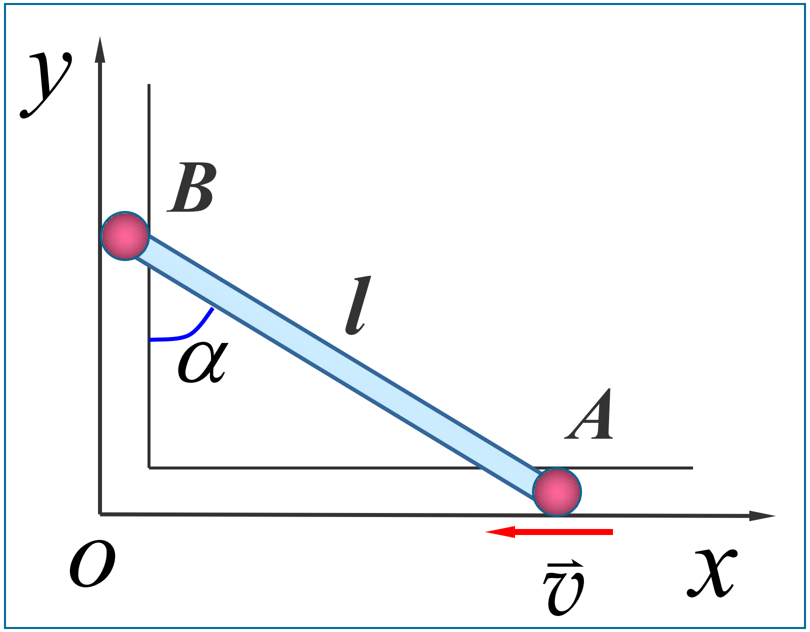
$$\vec{v}_A = v_x\vec{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} = -v\vec{i}$$

物体 B 的速度

$$\vec{v}_B = v_y\vec{i} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

OAB 为一直角三角形，刚性细杆的长度 l 为一常量

$$x^2 + y^2 = l^2$$



两边求导得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}_B = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v, \quad \tan\alpha = \frac{x}{y} \qquad \therefore \vec{v}_B = v\tan\alpha\,\vec{j}$$

$\vec{v}_B$ 沿 y 轴正向，当 $\alpha = 60^\circ$ 时 $v_B = 1.73v$

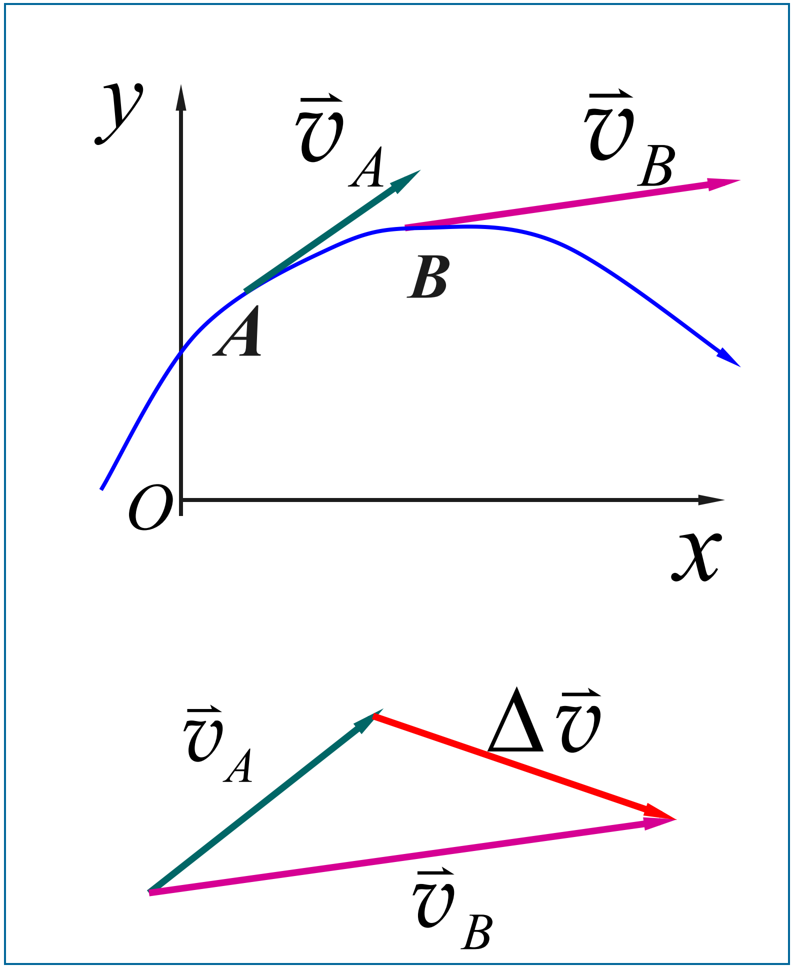
四　加速度（反映速度变化快慢的物理量）

1） 平均加速度

单位时间内的速度增量即平均加速度

$$\overline{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$\overline{\vec{a}}$ 与 $\Delta\vec{v}$ 同方向 .



2）（瞬时）加速度

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

加速度 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$

加速度大小 $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left|\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$

质点作三维运动时加速度为

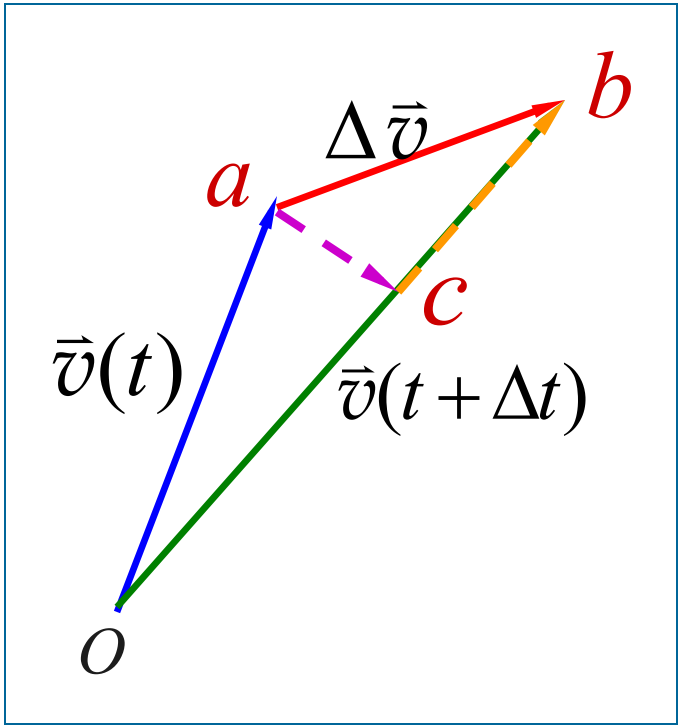
$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

加速度大小

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z=\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

讨论　$\left|\Delta\vec{v}\right| \neq \Delta v$ 吗？



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = \left|\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right|$$

在Ob上截取 $\overline{oc} = \overline{oa}$

有　$\Delta v = \overline{cb}$

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} + \Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}$$

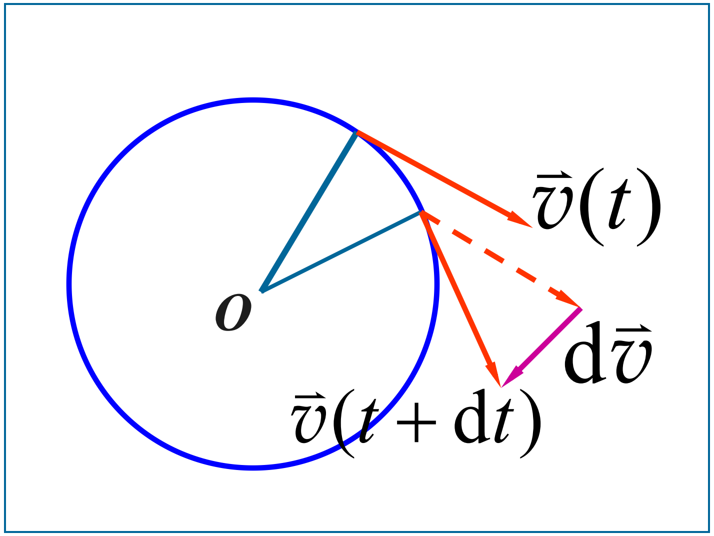
$\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} = \overrightarrow{ac}$　速度方向变化

$\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}} = \overrightarrow{cb}$　速度大小变化

讨论

问 $\left|\vec{a}\right| = a \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 吗?

例 匀速率圆周运动



因为 $v(t) = v(t+\mathrm{d}t)$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv 0$

而 $\left|\vec{a}\right| = a \neq 0$

所以 $a \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

质点运动学两类基本问题

一　由质点的运动方程可以求得质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

二　已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，可求质点速度及其运动方程．

$$\vec{r}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$$

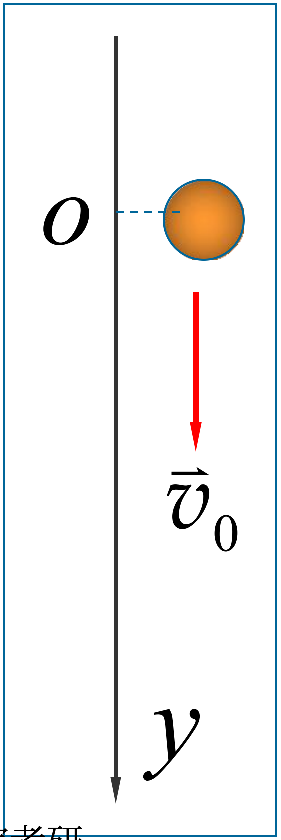
例3 有一个球体在某液体中竖直下落，其初速度为 $\vec{v}_0=(10\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})\vec{j}$，它的加速度为 $\vec{a}=(-1.0\mathrm{s}^{-1})v\vec{j}$ 问 （1）经过多少时间后可以认为小球已停止运动，（2）此球体在停止运动前经历的路程有多长？

解：由加速度定义 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(-1.0\mathrm{s}^{-1})v$

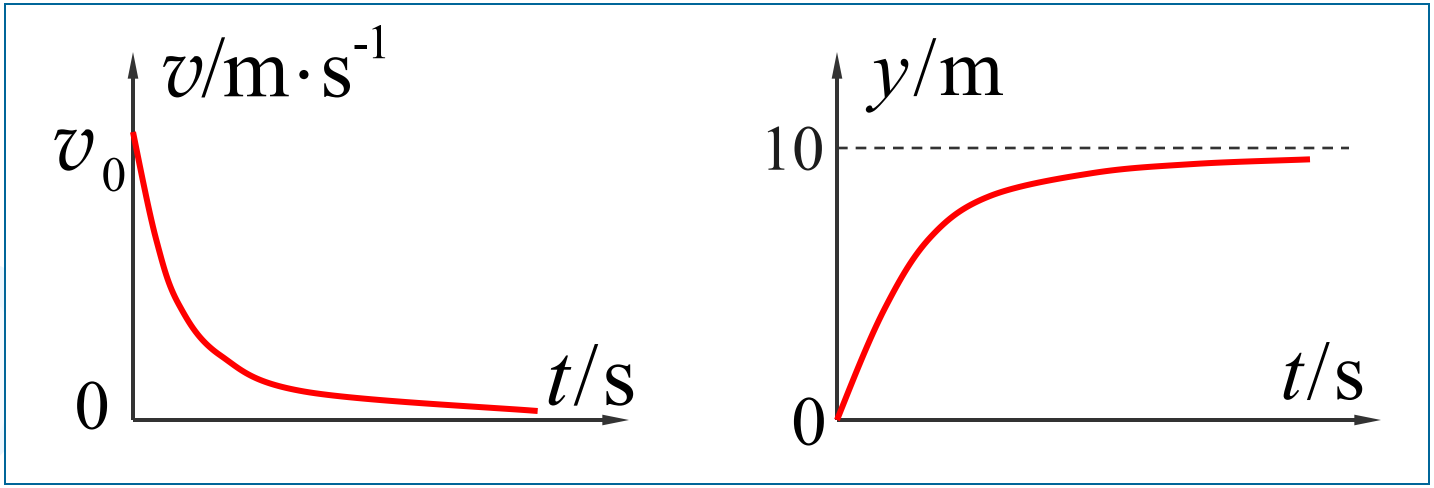
$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=(-1.0\mathrm{s}^{-1})\int_0^{t}\mathrm{d}t,\quad v=v_0\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}\qquad \int_0^{y}\mathrm{d}y=v_0\int_0^{t}\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}\mathrm{d}t$$

$$y=10[1-\mathrm{e}^{(-1.0\mathrm{s}^{-1})t}]\mathrm{m}$$



$$v = v_0 e^{(-1.0s^{-1})t} \qquad y = 10[1 - e^{(-1.0s^{-1})t}]\text{m}$$



v	$v_0/10$	$v_0/100$	$v_0/1000$	$v_0/10000$
t/s	2.3	4.6	6.9	9.2
y/m	8.9974	9.8995	9.9899	9.9990

$$t = 9.2\text{s},\quad v \approx 0,\quad y \approx 10\text{m}$$