

中国科学院 2013 年数学分析真题解析

1.(本题满分 25 分) 计算：

(1)(满分 10 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \sqrt{n^2 + n\pi}$ 。

(2)(满分 15 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ，其中设 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} (n \geq 1)$ 。

【解答】

$$(1) \sin^2 \sqrt{n^2 + n\pi} = \frac{1 - \cos(2\sqrt{n^2 + n\pi} - 2n)\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$