

中国科学院 2011 年数学分析真题解析

一.30 分

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} \right)^x$

【解答】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} - 1 \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right)^x = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln 2}{x} = 1 + \ln 2$$

因此， $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} \right)^x = 2e$ 。

2. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$