

中国科学院 2004 年数学分析真题解析

1.(15 分) 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \arctan t^2 dt$, $g(x) = \int_0^x (3t^2 + t^3 \cos t) dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 。

【解答】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \arctan t^2 dt}{\int_0^x (3t^2 + t^3 \cos t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} t^2 dt}{3 \int_0^x t^2 dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \sin^3 x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

2.(15 分) 计算 $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)x^n$, 其中 $|x| < 1$ 。

【解答】