

中国科学院 2003 年数学分析真题解析

1.(15 分) 设 A, B 为常数，求

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^{\frac{A}{x}} + e^{\frac{B}{x}})$$

【解答】

若 $A = B$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^{\frac{A}{x}} + e^{\frac{B}{x}}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2e^{\frac{A}{x}}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln 2 + \frac{A}{x}) = \begin{cases} +\infty, A > 0 \\ \ln 2, A = 0 \\ -\infty, A < 0 \end{cases}$$

若 $A \neq B$ ，不妨设 $B > A$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^{\frac{A}{x}} + e^{\frac{B}{x}}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^{\frac{A-B}{x}} \cdot e^{\frac{B}{x}} \cdot e^{(\frac{A-B}{x})}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{A-B}{x} + \ln(e^{\frac{B}{x}} \cdot e^{(\frac{A-B}{x})})) = \begin{cases} +\infty, B > 0 \\ 0, B = 0 \\ -\infty, B < 0 \end{cases}$$