

第二章 系统的数学模型

2-1 模型总论

2-2 微分方程的建立

2-3 传递函数模型

2-4 框图模型

2-5 信号流图模型

2-6 模型总结

第四讲：系统的数学模型

（ 2-3、 2-4 单元， 2 学时）

2-3 传递函数模型

2-4 框图模型

2-3 传递函数模型

一 定义与性质

设一般线性定常系统的微分方程为

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} y(t) + a_n y(t) \\ & = b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t) \end{aligned}$$

其中， $y(t)$ 为系统的输出， $r(t)$ 为系统输入，
且在零初始条件下，对上式两边取拉氏变换，
则有：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

[定义]

在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量拉氏变换的比值，称为该系统的传递函数，用 $G(s)$ 表示。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

[性质]

(1) 传递函数的概念只适用于线性定常系统，它是在零初始条件下定义的。

(2) 传递函数是复变量 S 的有理分式函数，即： $n \geq m$ 各系数均为实数。



是系统元件参
数的函数

物理系统的固有特性是因果性；若 $m > n$ ，
则这是物理不可实现的系统。

(3) 传递函数是系统的数学描述。物理性质不同的系统可以具有相同的传递函数（相似系统）。在同一系统中，当取不同的物理量作输入或输出时，其传递函数也可以不同。

(4) 传递函数表示线性定常系统传递、变换输入信号的能力，全面反映系统本身的性能。它只与系统的结构和参数有关，而与输入作用的形式无关。

(5) 传递函数的拉氏反变换是系统的脉冲响应。

$$g(t) = L^{-1}(G(s))$$

↓
→ 也可表征系统的动态特性

(6) 可以将

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

Kr根轨迹增益，首项系数归一

表示成如下形式：

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$s = z_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是 $M(s) = 0$ 的根，称为传递函数的零点， $s = p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $N(s) = 0$ 的根是传递函数的极点。

实数或复数

特征方程

例2.10 系统运动的微分方程模型为：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 6y = r$$

其中， y 为输出， r 为输入，请确定系统的传递函数。

解：对方程两端取拉氏变换，得：

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 6Y(s) = R(s)$$

代入零初始条件，得：

$$(s^2 + 3s + 6)Y(s) = R(s)$$

于是，传递函数为：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 6}$$

例2.11 系统运动的微分方程模型为：

$$\dot{y} + 3y = x$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \dot{r} + 2r$$

其中， y 为输出， x 为中间变量， r 为输入，请确定系统的传递函数。

解：将中间变量消除，得： $\ddot{y} + 5\dot{y} + 8y = \dot{r} + 2r$

代入零初始条件并作变换，得：

$$(s^3 + 5s^2 + 8s + 6)Y(s) = (s + 2)R(s)$$

于是，传递函数为：

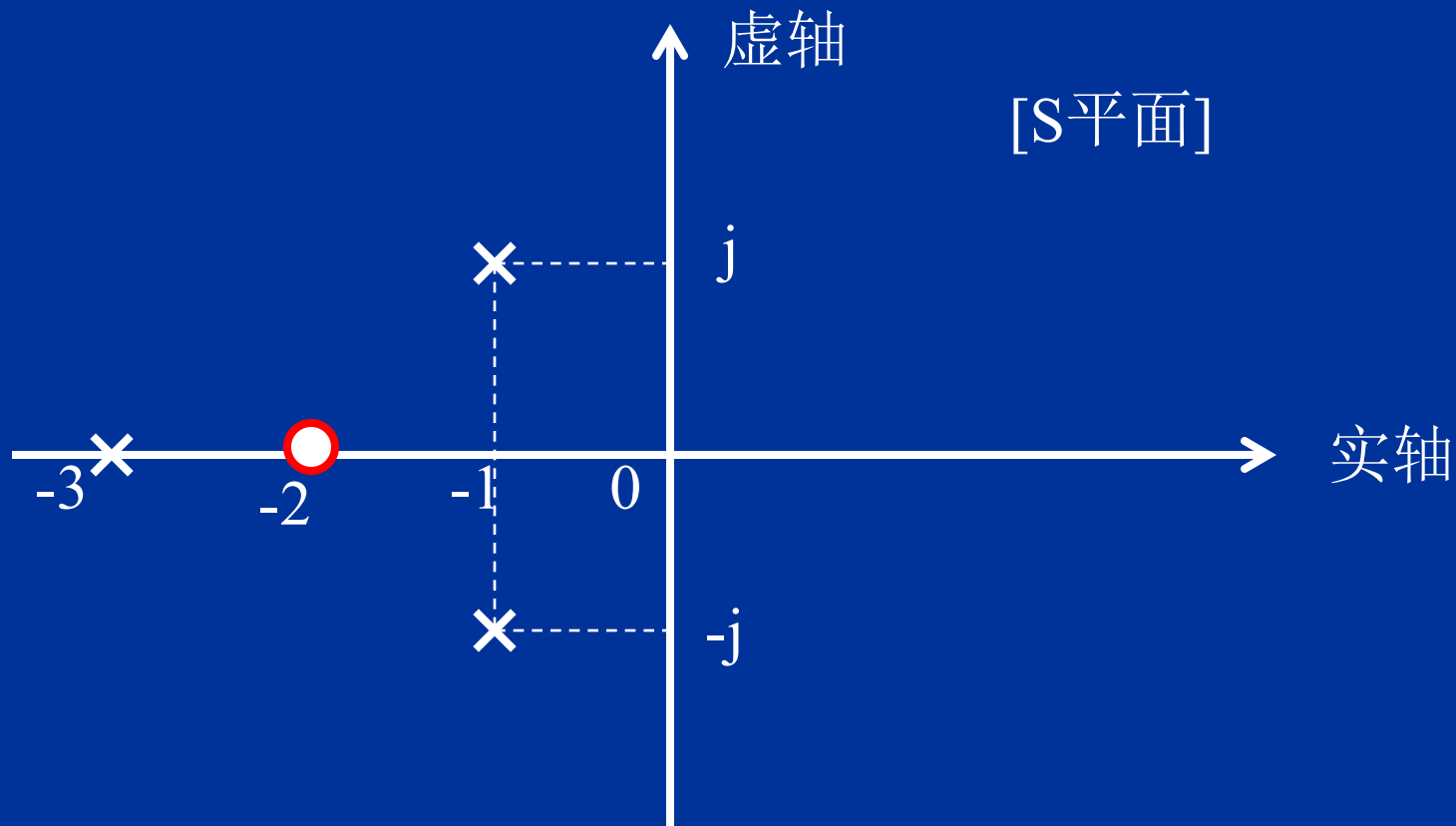
$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s + 2}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}$$

分别求取从输入到中间变量，从中间变量到输出的传递函数，也可以得到：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \cdot \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{s + 2}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}$$

例2.12 $G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

$z_1 = -2$; $p_1 = -3$, $p_2 = -1+j$, $p_3 = -1-j$ 。



也可将传递函数表示为因式分解的形式：

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^l (\tau_i s + 1) \prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(m-l)} (\tau_i^2 s^2 + 2\rho_i \tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^h (T_j s + 1) \prod_{j=1}^{\frac{1}{2}(n-h)} (T_j^2 s^2 + 2\xi_j T_j s + 1)}$$

注意！

K 传递系数或
静态增益，常
数项归一

$$K = K_r \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)}$$

如果在原点有 v 个重极点，则传递函数可表示为如下形式：

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^l (\tau_i s + 1) \prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(m-l)} (\tau_i^2 s^2 + 2\rho_i \tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^h (T_j s + 1) \prod_{j=1}^{\frac{1}{2}(n-v-h)} (T_j^2 s^2 + 2\xi_j T_j s + 1)}$$

所以，归纳起来有如下典型环节。

二、典型环节

(1) 比例环节	$G(s) = K$
(2) 积分环节	$G(s) = \frac{1}{s}$
(3) 惯性环节	$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$
(4) 微分环节	$G(s) = s$
(5) 振荡环节	$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$
(6) 延迟环节	$G(s) = e^{-\tau s}$
(7) 一阶微分	$G(s) = \tau s + 1$
(8) 二阶微分	$G(s) = \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1$

二、典型环节

更多的典型环节或系统的传递函数，请参见书上表2.7，P48。

要求熟悉典型环节，能从系统传递函数中，辨识出有哪些典型环节。

2-4 框图模型

一 框图的概念和组成

1. 概念

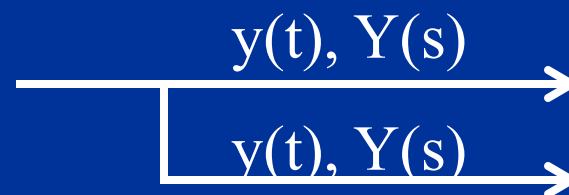
描述系统及各组成元件之间信号传递关系的数学图形，它表示系统中各变量之间的因果关系及各变量所进行的数学变换。

2. 组成

(1) 信号线

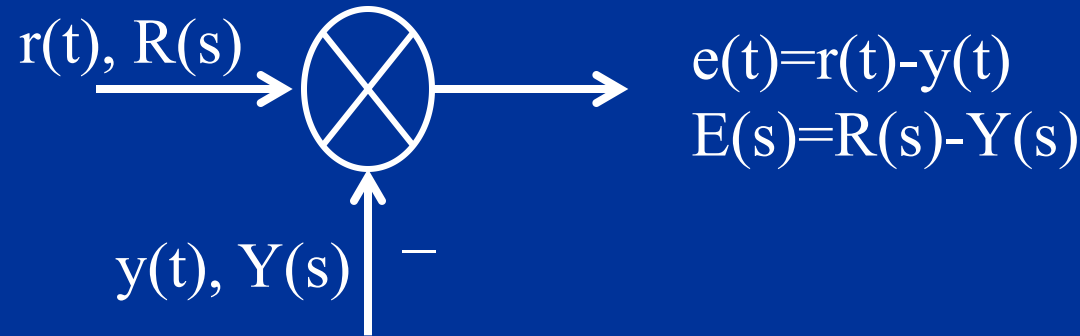


(2) 引出线



(3) 比较点（综合点或相加点）

一般加号常省略，负号必须标出。

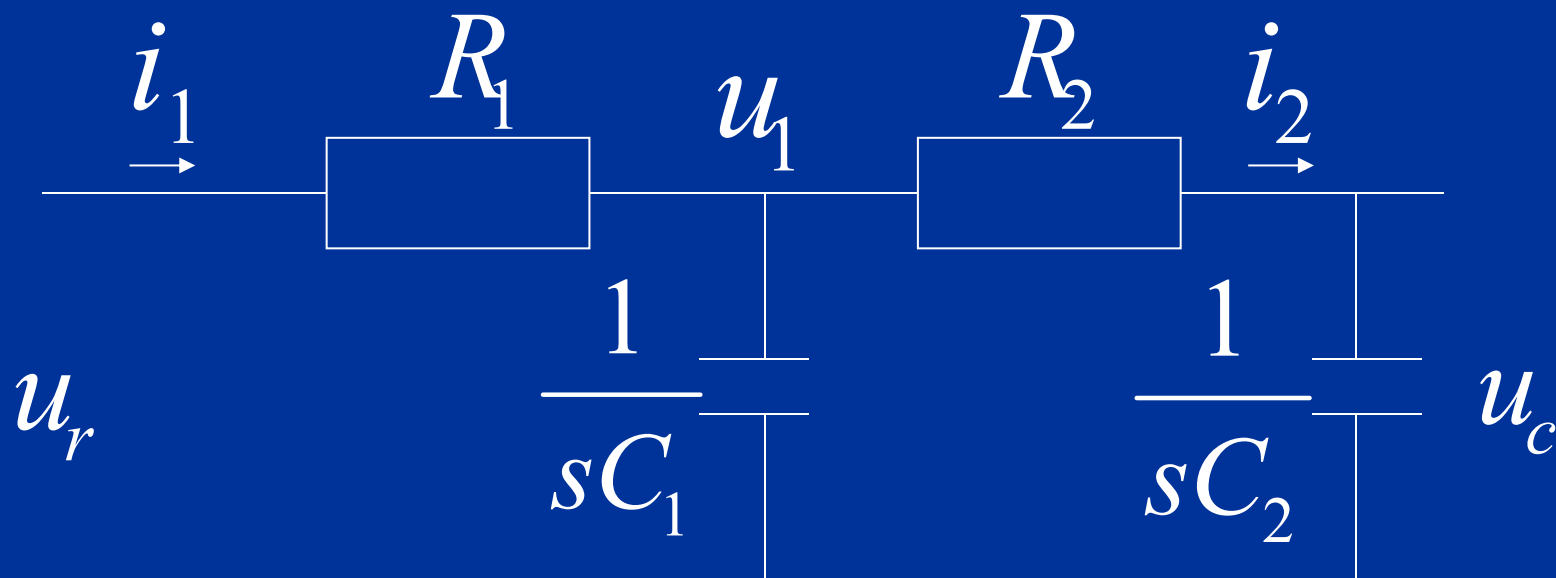


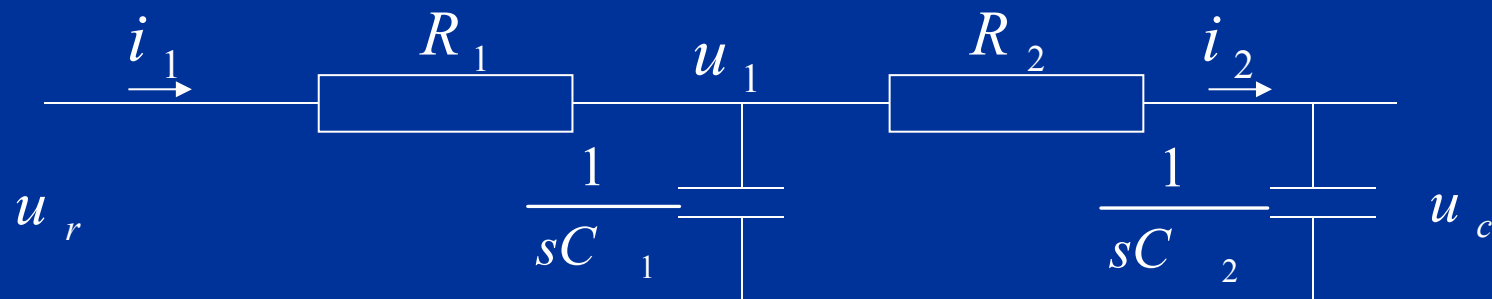
(4) 方框 表示对信号进行的数学变换，方框中写入元件或系统的传递函数，并用信号线将其连接起来。



二 框图的绘制

例2.13 绘制双T网络的框图





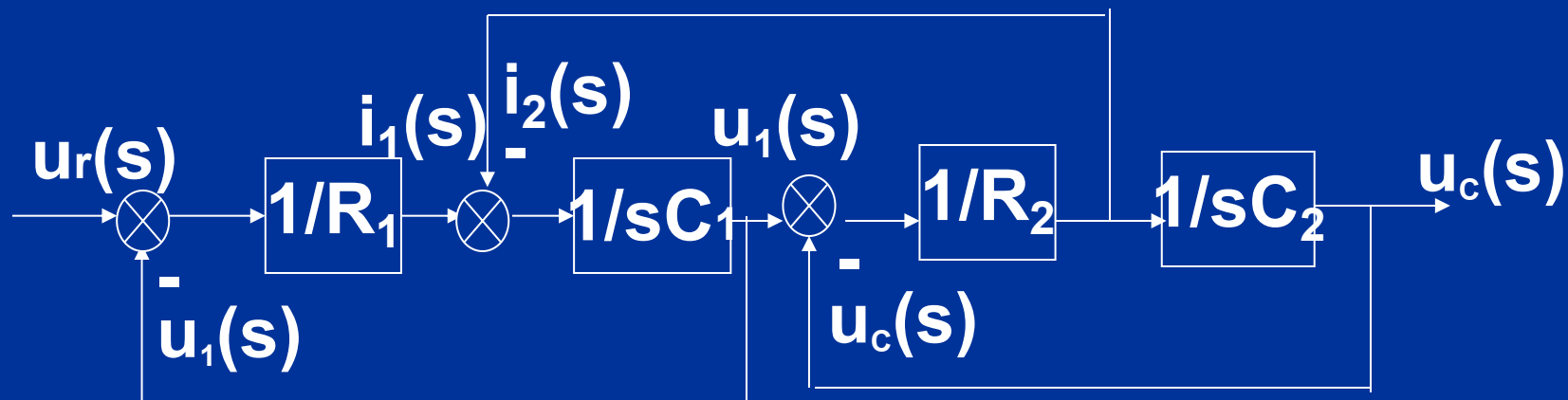
从左向右列出方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1(s) = \frac{u_r(s) - u_1(s)}{R_1} \\ u_1(s) = [I_1(s) - I_2(s)] \cdot \frac{1}{sC_1} \\ I_2(s) = \frac{u_1(s) - u_c(s)}{R_2} \\ u_c(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{sC_2} \end{array} \right.$$

将上面的方程改写为如下相乘的形式：

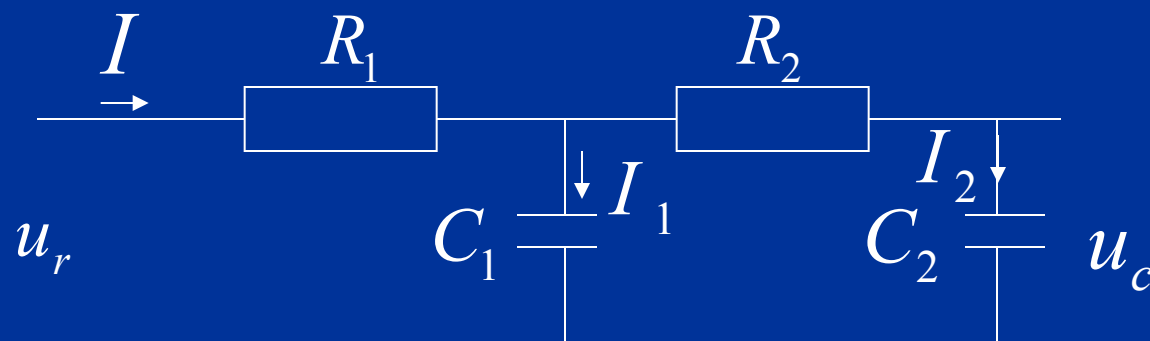
$$\left\{ \begin{array}{l} [u_r(s) - u_1(s)] \frac{1}{R_1} = I_1(s) \\ [I_1(s) - I_2(s)] \cdot \frac{1}{sC_1} = u_1(s) \\ [u_1(s) - u_c(s)] \cdot \frac{1}{R_2} = I_2(s) \\ I_2(s) \cdot \frac{1}{sC_2} = u_c(s) \end{array} \right.$$

绘图： $u_r(s)$ 为输入，画在最左边。



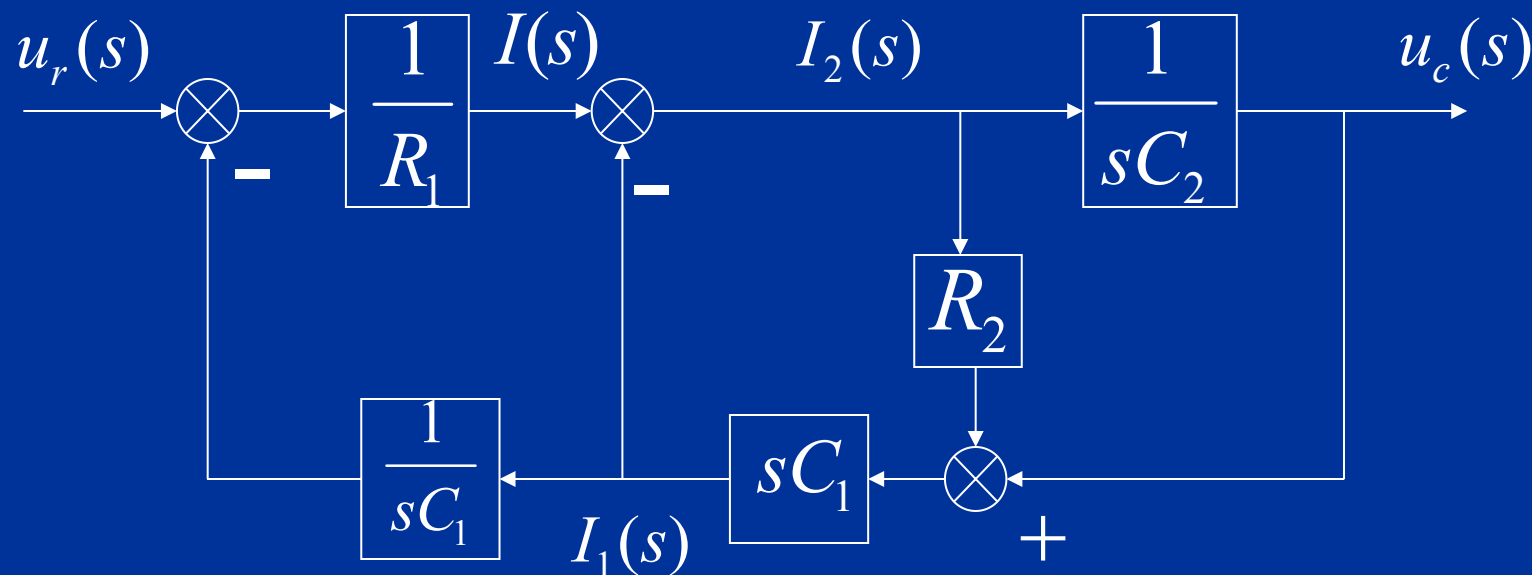
这个例子不是按微分方程组——代数方程组——框图顺序列写，而是直接列写s域中的代数方程，画出了框图。

若重新选择一组中间变量，会有什么结果呢？（刚才中间变量为 i_1, u_1, i_2 ，现在改为 I, I_1, I_2 ）



从右到左列方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{sC_2} \\ I_2(s) = I(s) - I_1(s) \\ I_1(s) = [u_c(s) + I_2(s) \cdot R_2] \cdot sC_1 \\ I(s) = [u_r(s) - I_1(s) \cdot \frac{1}{sC_1}] \cdot \frac{1}{R_1} \end{array} \right.$$

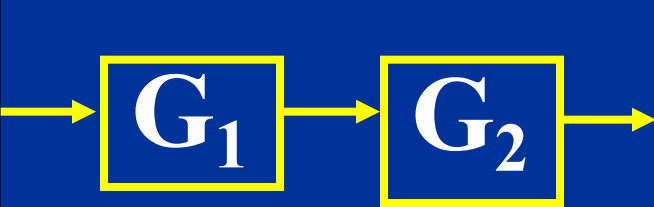


这个框图与前一个框图不一样，可见选择不同的中间变量，结构框图也不一样，但是整个系统的输入输出关系并不改变的。

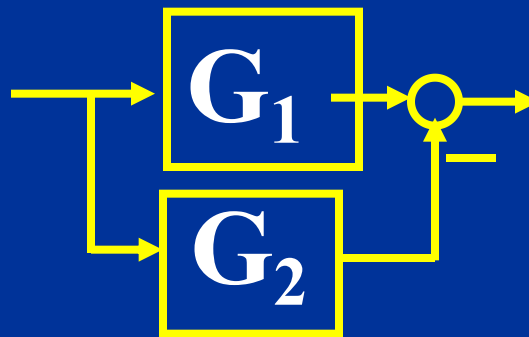
$$G(s) = \frac{u_c(s)}{u_r(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

三 框图三种典型形式

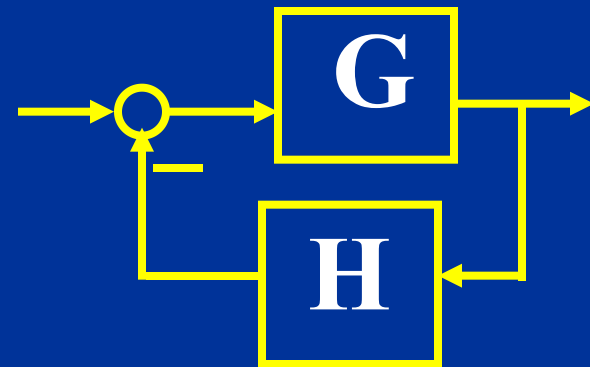
串 联



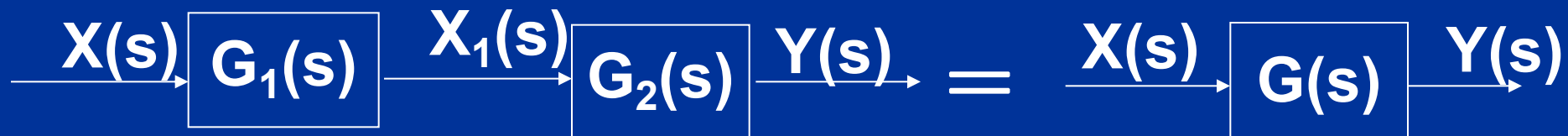
并 联



反 馈



(1) 串联

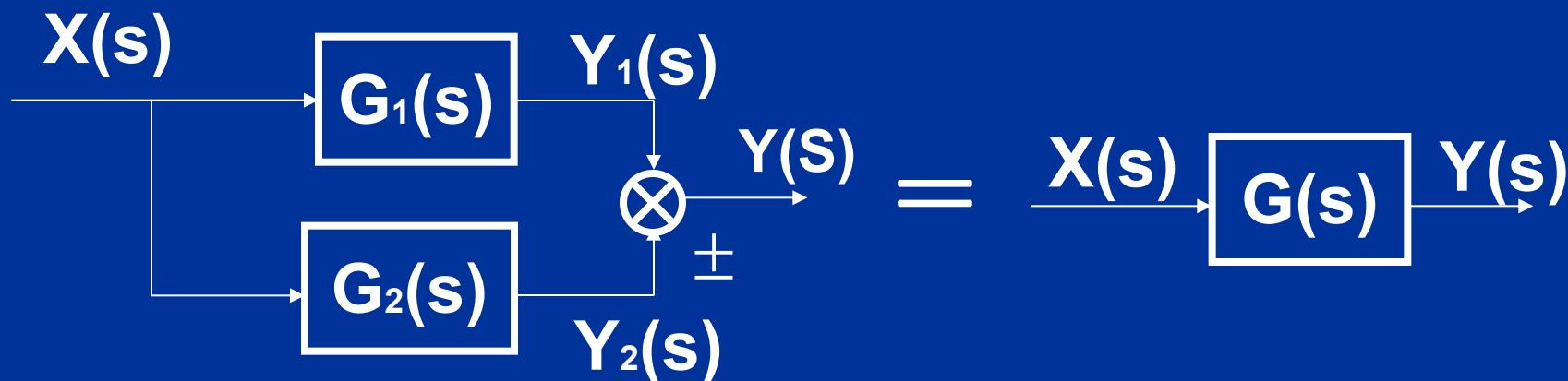


$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$\therefore \frac{X_1(s)}{X(s)} = G_1(s), \frac{Y(s)}{X_1(s)} = G_2(s)$$

$$\therefore \frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

(2) 并联



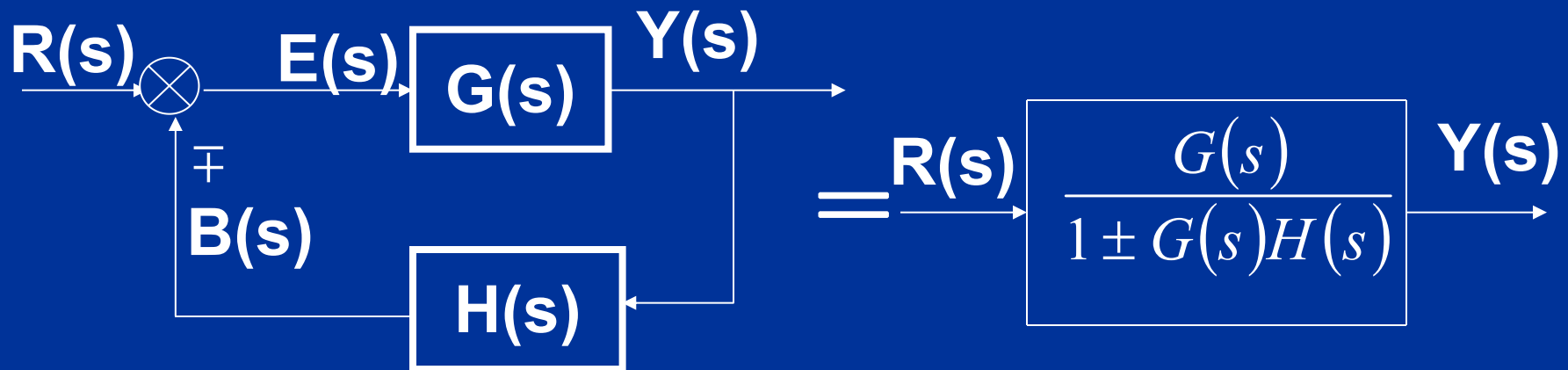
$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s)$$

$$Y(s) = Y_1(s) \pm Y_2(s) = X(s)G_1(s) \pm X(s)G_2(s)$$

$$= X(s)[G_1(s) \pm G_2(s)] = X(s)G(s)$$

$$\therefore G(s) = G_1(s) \pm G_2(s)$$

(3) 反馈



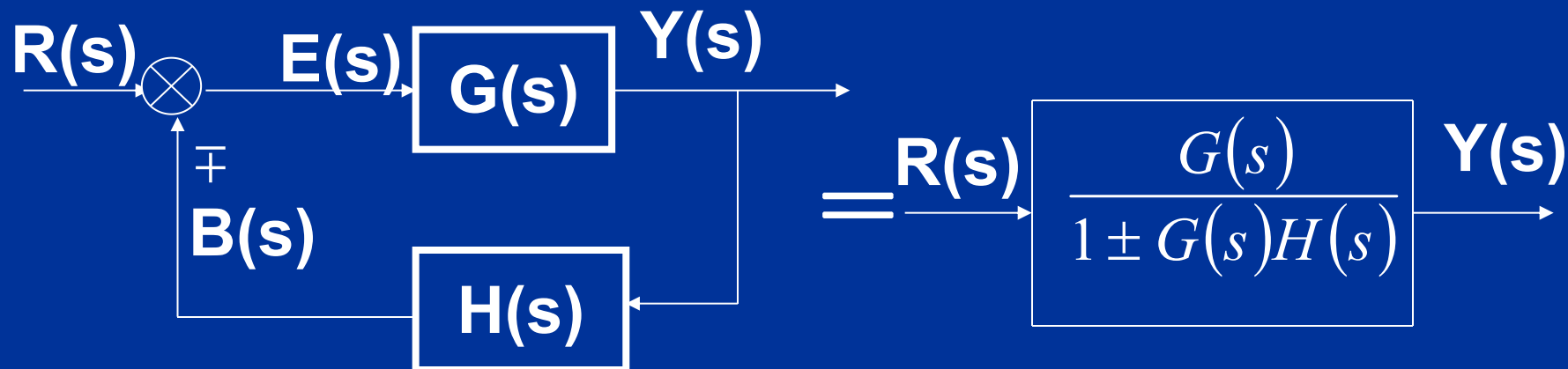
$$Y(s) = E(s)G(s), E(s) = R(s) \mp B(s)$$

$$B(s) = Y(s)H(s)$$

$$Y(s) = [R(s) \mp B(s)]G(s) = R(s)G(s) \mp Y(s)H(s)G(s)$$

$$Y(s)[1 \pm H(s)G(s)] = R(s)G(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm H(s)G(s)}$$



以后用 $\Phi(s)$ 表示 闭环传递函数；

称 $\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$ 为 开环传递函数；

称 $\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s)$ 为 前向通路传递函数；

称 $H(s) = 1$ 单位反馈，即有： $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)}$

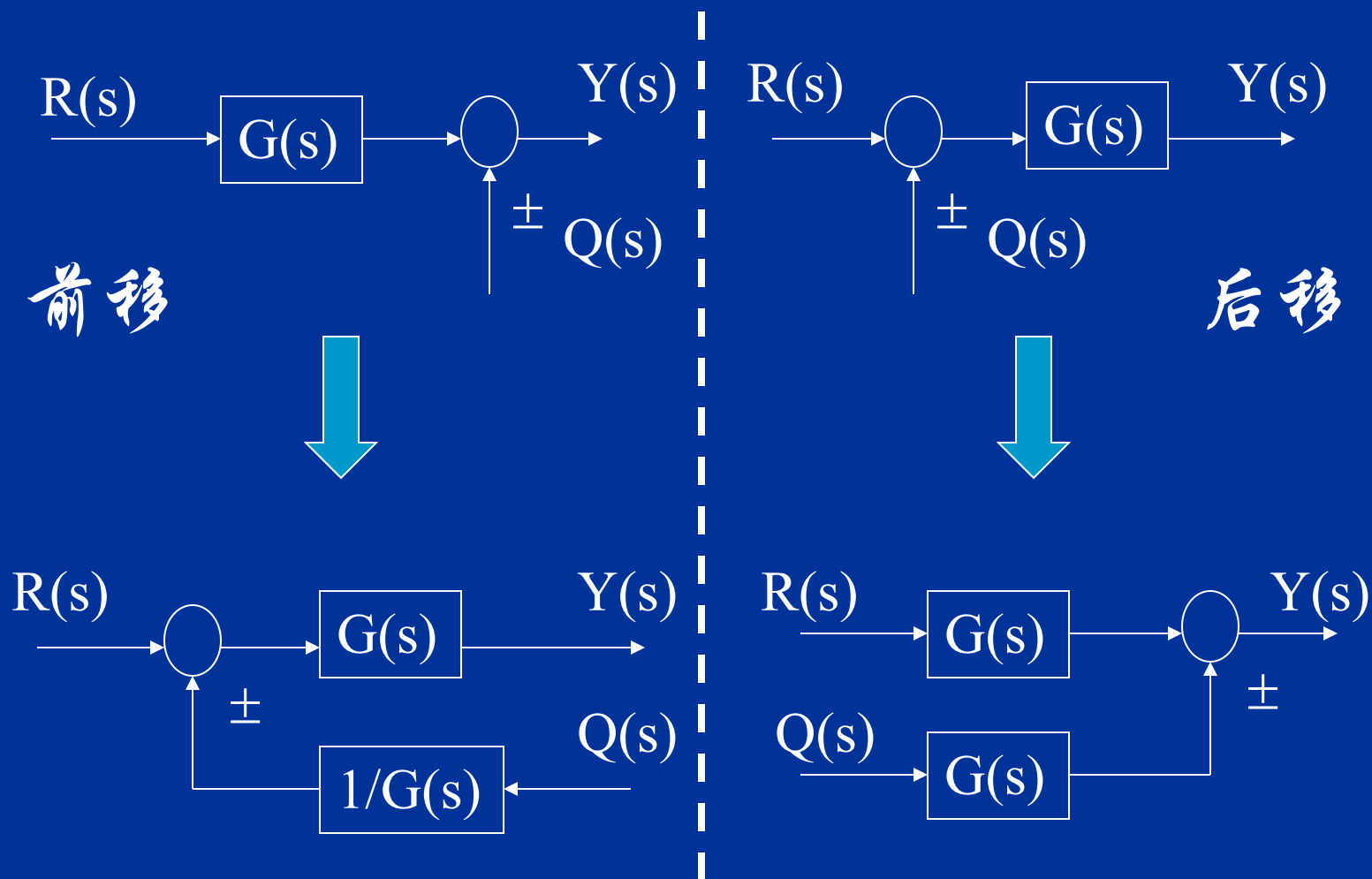
4 框图的等效变换方法

- 1 三种典型形式可直接用公式
- 2 相邻比较点可互换位置
- 3 相邻引出点可互换位置

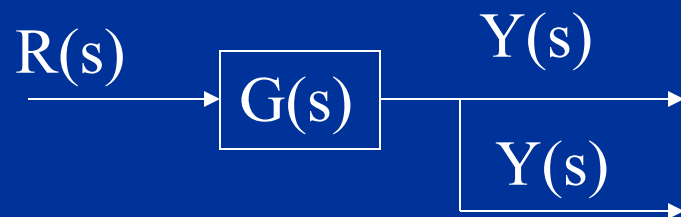
注意事项：

- 1 不是典型结构不可直接用公式
- 2 引出点与比较点相邻，不可互换位置

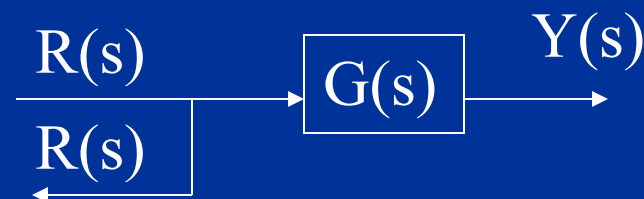
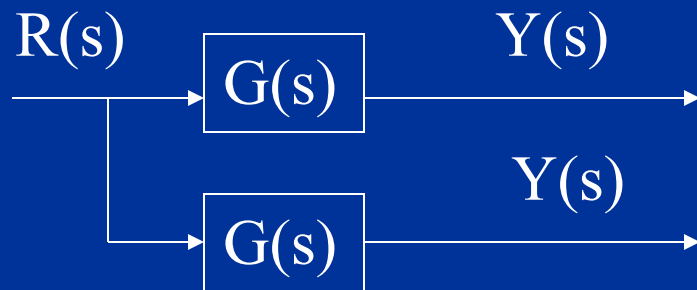
(1) 比较点前/后移



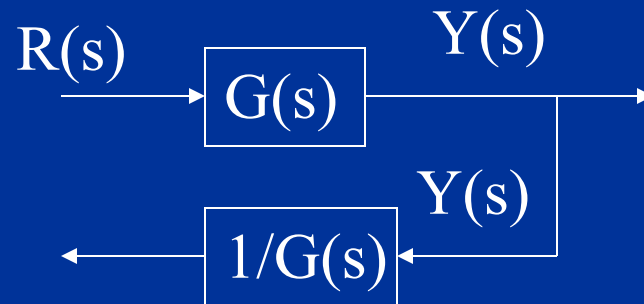
(2) 引出点前/后移



前移

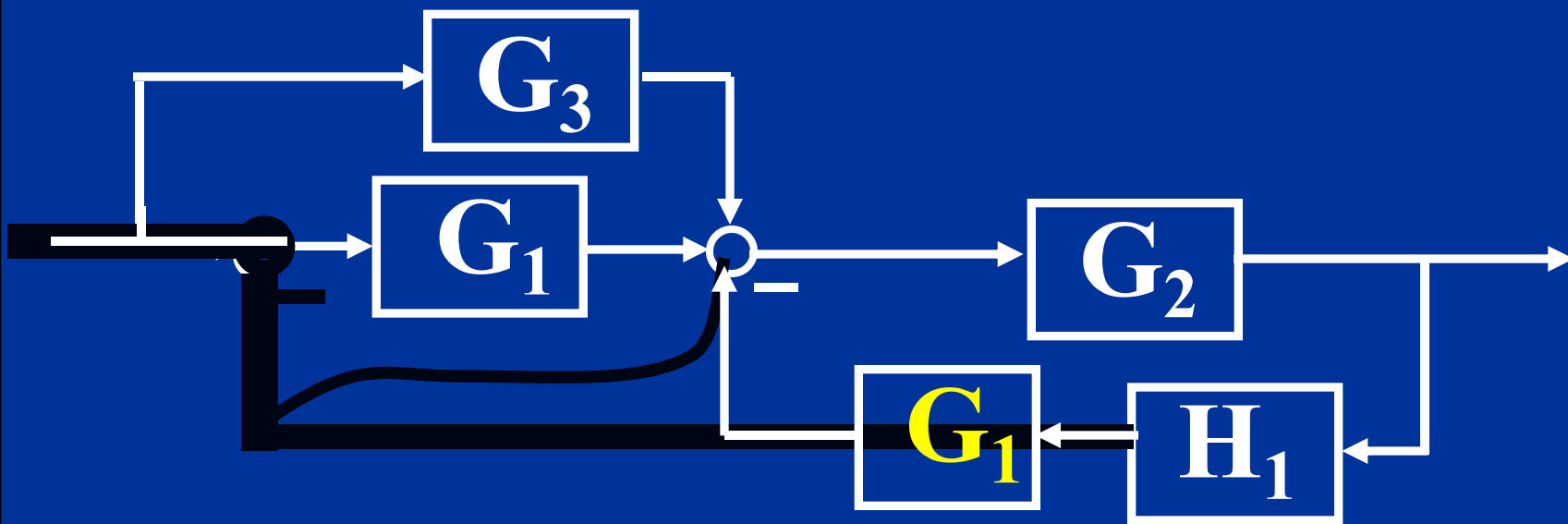
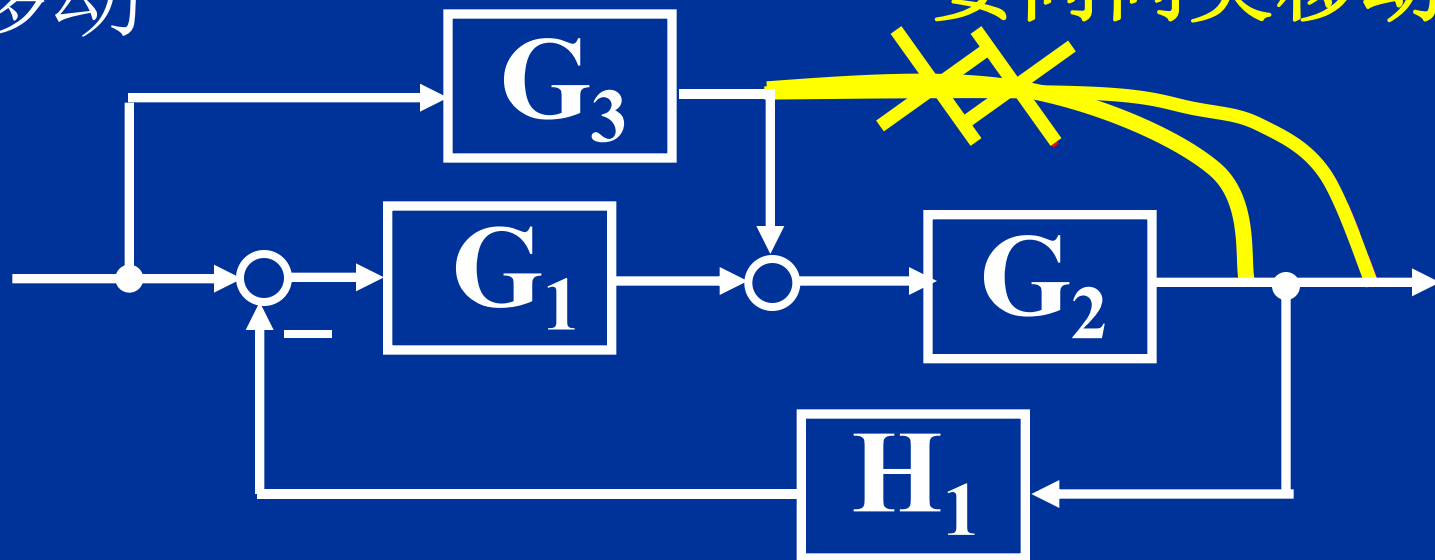


后移

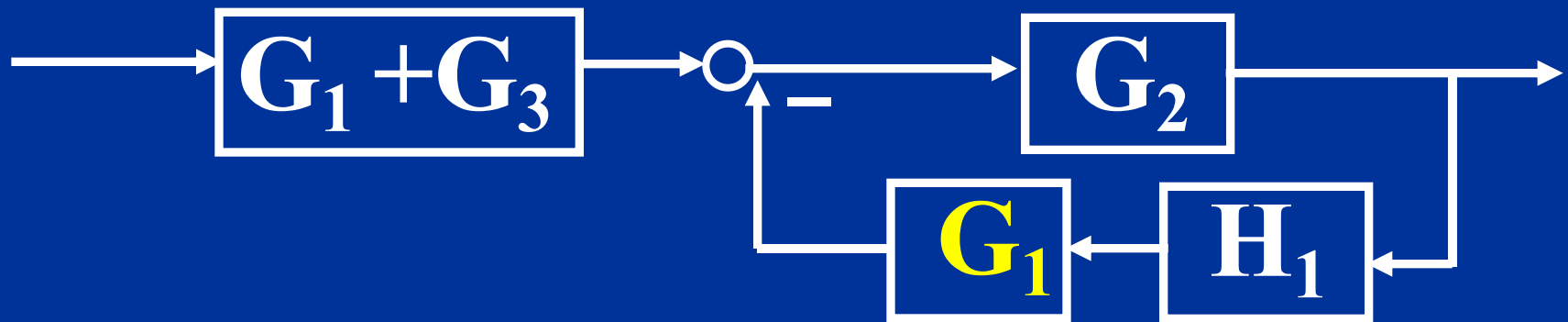
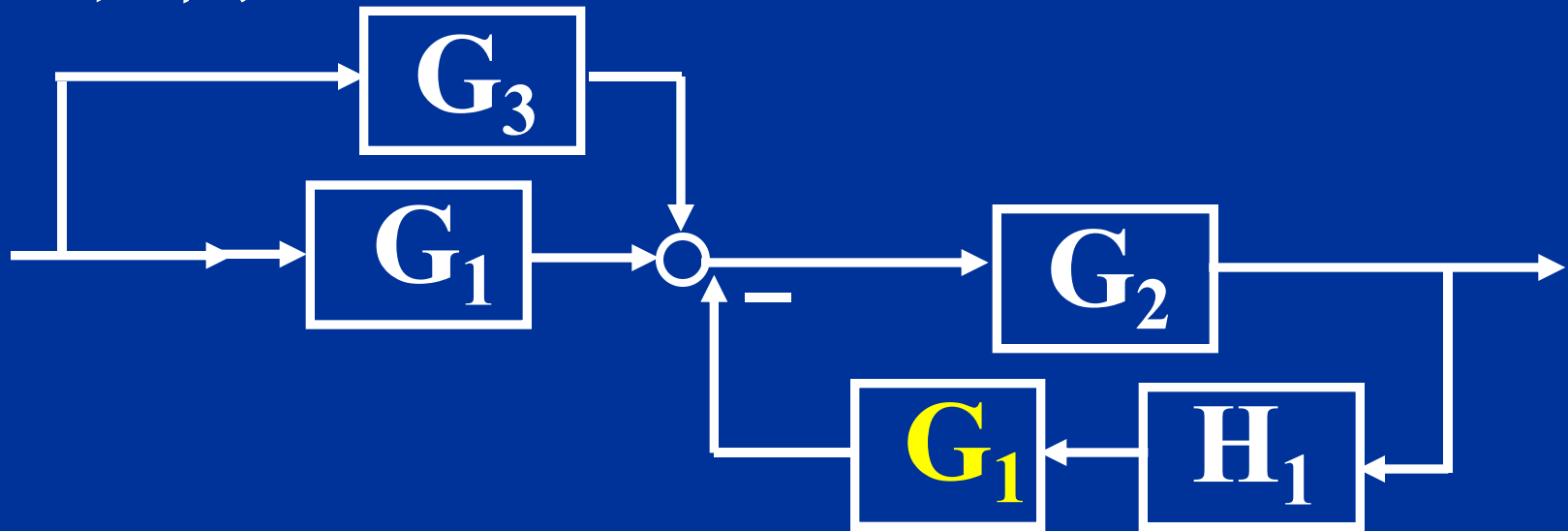


比较点移动

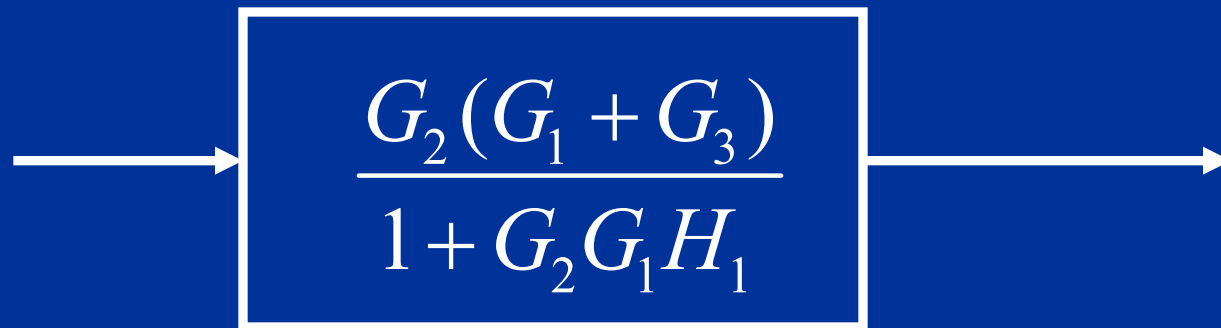
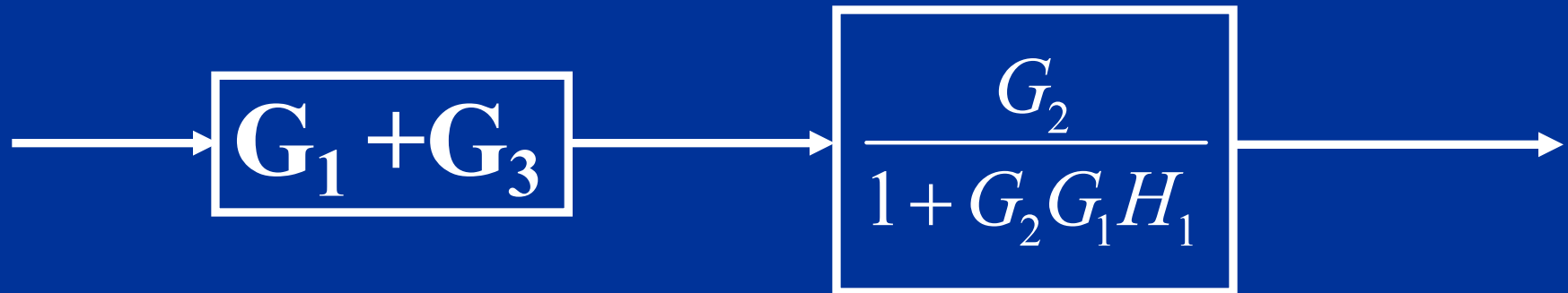
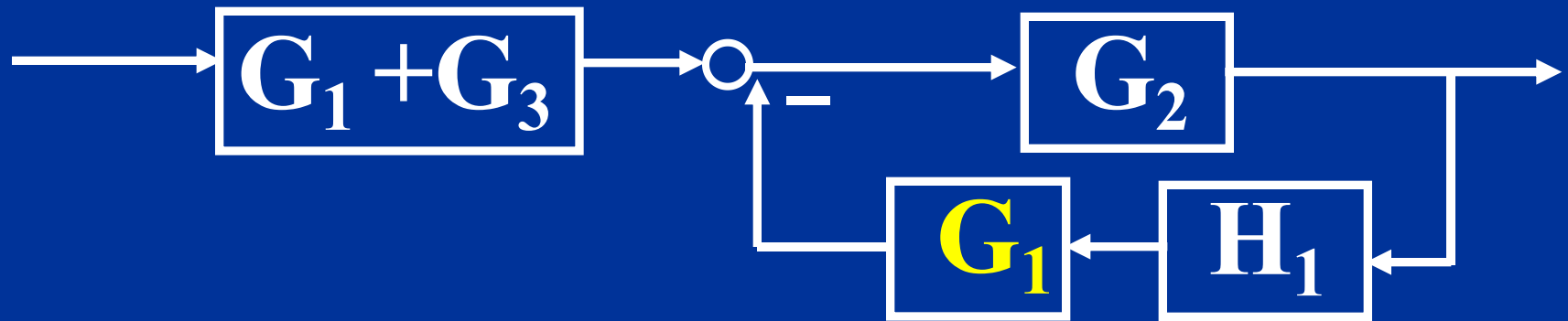
要向同类移动



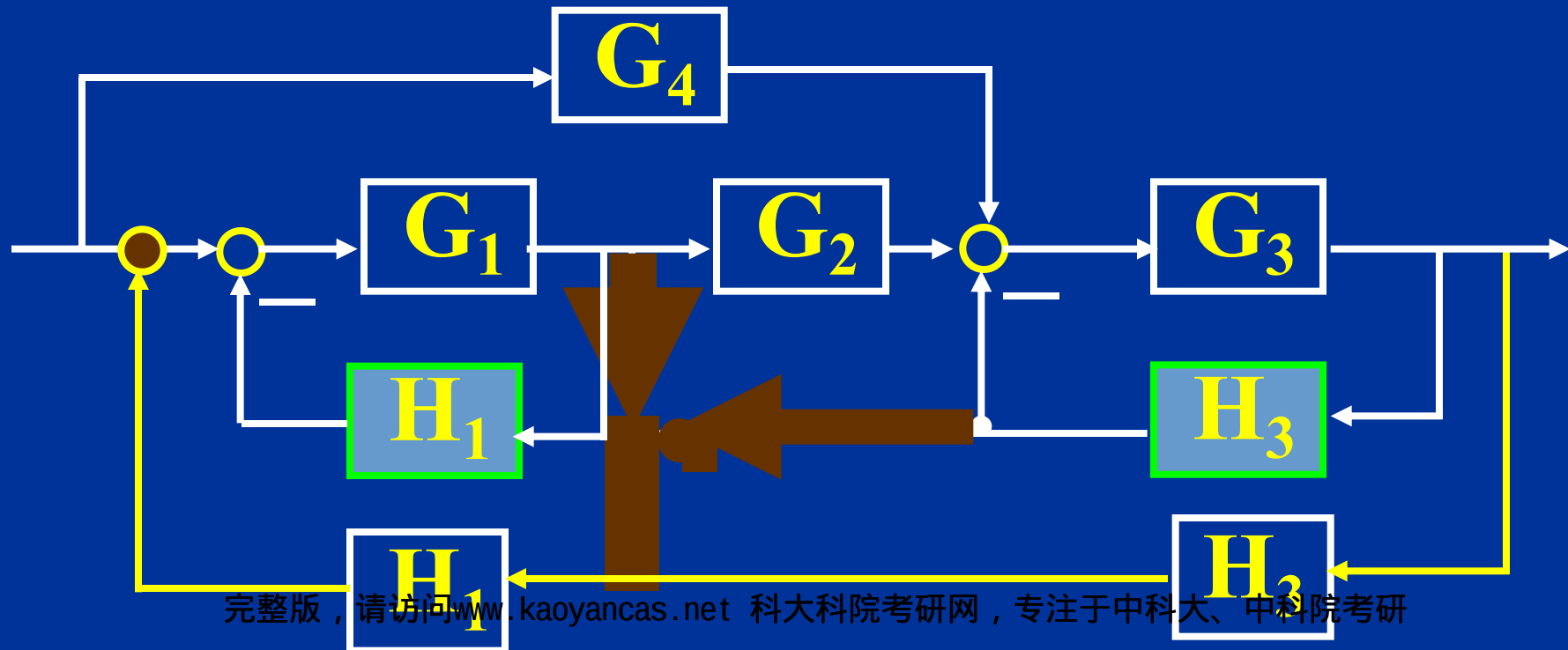
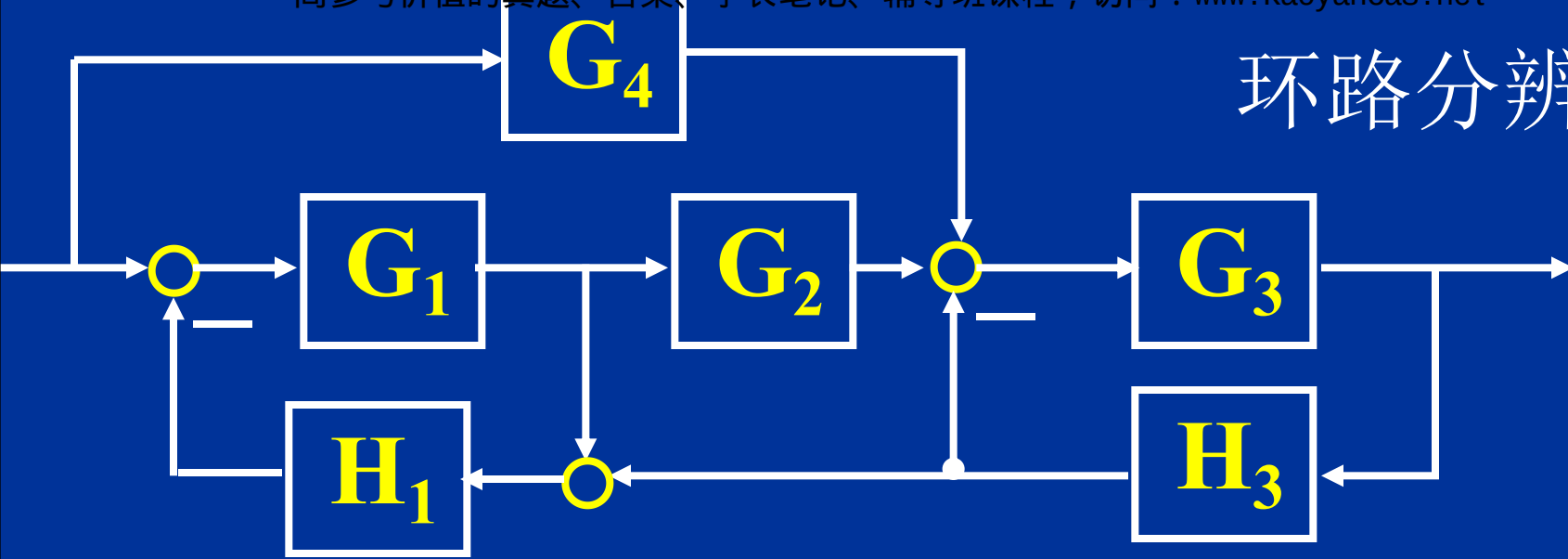
化简



Reduction



环路分辨



总之，框图简化的一般方法是：
移动引出点或比较点；
进行方框运算；
将串联、并联、反馈连接的框图合并；

在简化过程中必须遵循的原则是，交换前后变量关系保持等效。

要求： 读懂框图！

习题

E2.23,E2.25,E2.26,E2.28,E2.29,P2.37,
P2.50,P2.51