第四章　时间响应分析

（教材第4、5章）

4-1 控制系统的时域指标

4-2 一阶系统的时间响应

4-3 二阶系统的时间响应

4-4 高阶系统的时间响应

4-5 控制系统的稳态误差（教材第4章）

4-6 反馈的特性（教材第4章）

第十讲：控制系统稳态误差与反馈特性总结

（4-5、 4-6单元，2学时）

4-5 控制系统的稳态误差

4-6 反馈的特性

4-5　控制系统的稳态误差

控制系统准确性的度量。

（1）系统本身结构

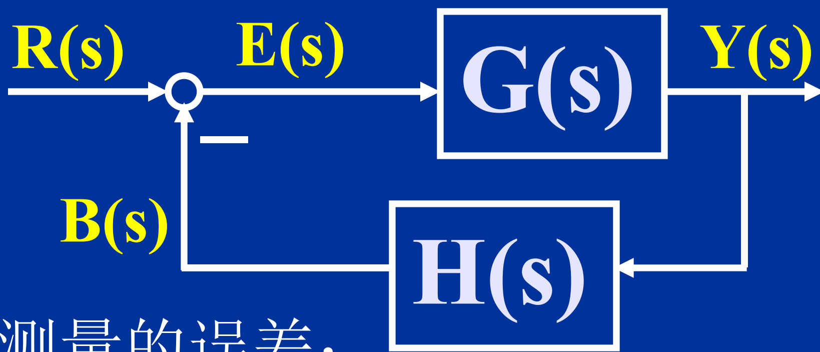
（2）参数的变化

（3）外作用形式

（4）非线性因素（静摩擦、间隙、不灵敏区、零点漂移）

不考虑

一、误差定义



测量的误差：

$$E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-Y(s)H(s)$$

$$=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

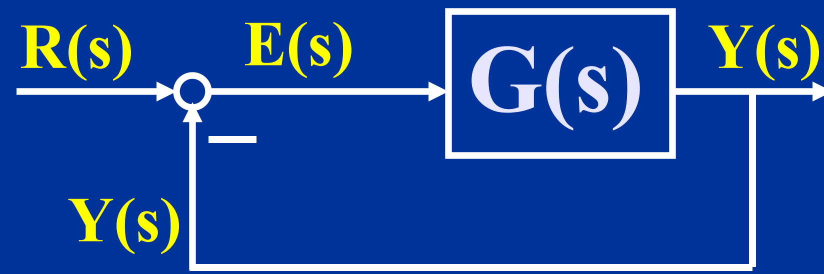
以随动系统为例，实际的误差：

$$\acute{E}(s)=Y_{希}-Y_{实}=R(s)-Y(s)$$

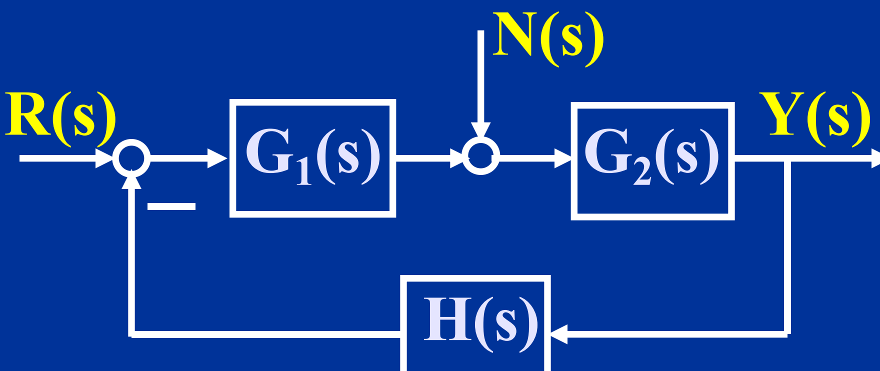
$$=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)-\frac{G(H(s)-1)}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$=E(s)-\frac{G(H(s)-1)}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$=E(s)-Y(s)(H(s)-1)$$



$$E(s)=\acute{E}(s)=R(s)-Y(s)$$

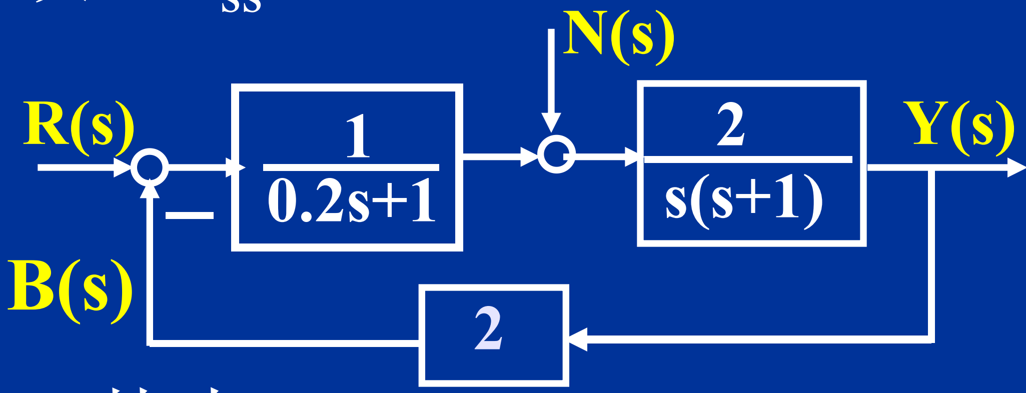


$$E_n(s)=Y_{希}-Y_{实}=-Y_n(s)$$

总误差怎么求？

总误差 $e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}$

例4.7 求图示系统的稳态误差e_{ss}



其中 $r(t)=t$，$n(t)=-1(t)$

解：

$Er(s)=R(s)-B(s)=R(s)-Y(s)H(s)$

$$=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$=\frac{s(s+1)(0.2s+1)}{s(s+1)(0.2s+1)+4}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0} sE_r(s)=\frac{1}{4}$$

令$r(t)=0$，

$$E_n(s)=-Y_n(s)$$

$$=\frac{2(0.2s+1)}{s(s+1)(0.2s+1)+4}\cdot\frac{1}{s}$$

$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0} sE_n(s)=\frac{1}{2}$$

总误差$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}$

$$\therefore e_{ss}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

二、系统型数

设开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k\boxed{\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}}{s^{v}\boxed{\prod_{j=1}^{n-v}(T_j s+1)}}$ G_0H_0

此时的k为增益系数

s^v表示开环在坐标原点有v重极点（积分器个数）

$v=0$ 称为0型系统

$v=1$ 称为Ⅰ型系统

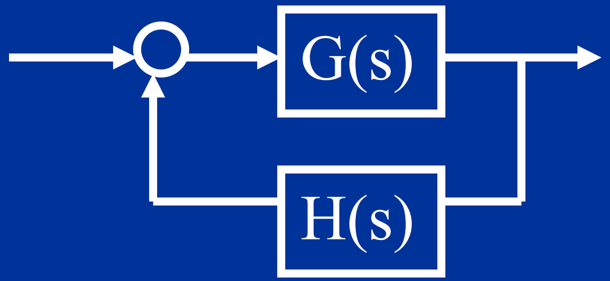
$v=2$ 称为Ⅱ型系统

$v=3$ 称为Ⅲ型系统

注意：时间常数(尾1)型，

当$s\to 0$时，G_0H_0一定$\to 1$

三、典型输入下的稳态误差与误差系数



$$E(s)=R(s)\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

若系统稳定，
则可用终值定理求e_{ss}

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+\frac{k}{s^{v}}G_0H_0}$$

$r(t)=A\cdot 1(t)$ $\quad R(s)=A/s$

$$e_{ss}=\frac{A}{1+\lim\limits_{s\to 0}\frac{k}{s^{v}}}$$

$r(t)=A\cdot t$ $\quad R(s)=A/s^2$

$$e_{ss}=\frac{A}{\lim\limits_{s\to 0} s\frac{k}{s^{v}}}$$

$r(t)=At^2/2$ $\quad R(s)=A/s^3$

$$e_{ss}=\frac{A}{\lim\limits_{s\to 0} s^2\cdot\frac{k}{s^{v}}}$$

稳态误差				误差系数		
取不同的 ν	$A\cdot 1(t)$					
0型	$\frac{A}{1+k}$					
Ⅰ型	0					
Ⅱ型	0					

$$e_{ss}=\frac{A}{1+\lim\limits_{s\to 0}\frac{k}{s^{\nu}}}$$

稳态误差

误差系数

取不同的 ν	$A\cdot 1(t)$	$A\cdot t$				
0型	$\dfrac{A}{1+k}$	∞				
I 型	0	$\dfrac{A}{k}$				
II 型	0	0				

$$e_{ss}=\frac{A}{\lim\limits_{s\to 0} s\,\dfrac{k}{s^{\nu}}}$$

稳态误差 误差系数

取不同的 ν	$A\cdot 1(t)$	$A\cdot t$	$At^2/2$			
0型	$\frac{A}{1+k}$	∞	∞			
Ⅰ型	0	$\frac{A}{k}$	∞			
Ⅱ型	0	0	$\frac{A}{k}$			

$$e_{ss}=\frac{A}{\lim\limits_{s\to 0} s^2\cdot\frac{k}{s^\nu}}$$

稳态误差　　误差系数

取不同的 ν	$A\cdot 1(t)$	$A\cdot t$	$At^2/2$	$A\cdot 1(t)$	$A\cdot t$	$At^2/2$
0型	$\frac{A}{1+k}$	∞	∞	k	0	0
Ⅰ型	0	$\frac{A}{k}$	∞	∞	k	0
Ⅱ型	0	0	$\frac{A}{k}$	∞	∞	k

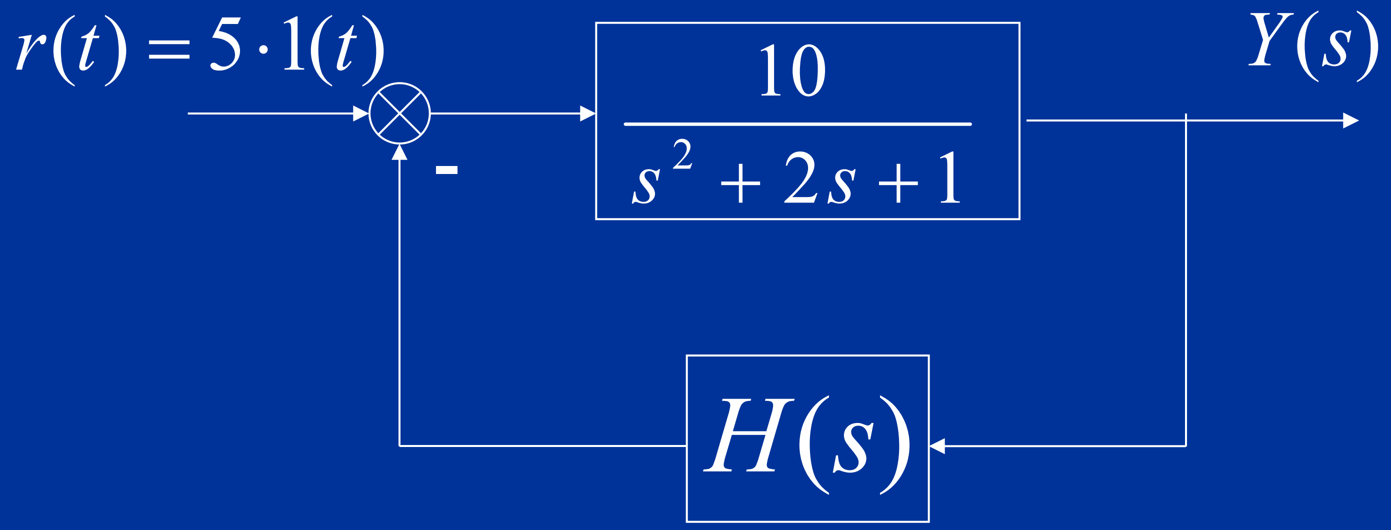
问题:

1 $K_p=?$

2 $K_v=?$

3 $K_a=?$

例4.8 某控制系统的结构图为



试分别求出H(s)=1和H(s)=0.5时，系统的稳态误差。

解：系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s^2+2s+1},\ \ v=0$$

当H(s)=1时，有

$$k=10$$

系统稳态误差为

$$e_{ss}=\frac{R_0}{1+k}=\frac{5}{1+10}=\frac{5}{11}$$

当H(s)=0.5时, 有

$$GH(s)=\frac{10}{s^2+2s+1}\cdot 0.5$$

$$=5\cdot\frac{1}{s^2+2s+1}$$

$$k=5,\ e_{ss}=\frac{R_0}{1+k}=\frac{5}{1+5}=\frac{5}{6}$$

或者

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+GH(s)}$$

$$=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\frac{10}{s^2+2s+1}\cdot 0.5}\cdot\frac{5}{s}=\frac{5}{6}$$

进一步，当H(s)=1时，若系统的稳态误差为0.2，开环增益k应为多少?

$$e_{ss} = \frac{R_0}{1+k}, \quad k = \frac{R_0}{e_{ss}} - 1 = \frac{5}{0.2} - 1 = 24$$

再者，当H(s)=1时，若 $r(t) = 1(t) + t + \frac{1}{2}t^2$ ，系统的稳态误差又是多少?

0型系统的稳态误差

∞！

四、需要注意的几个问题

(1) 终值定理的应用前提

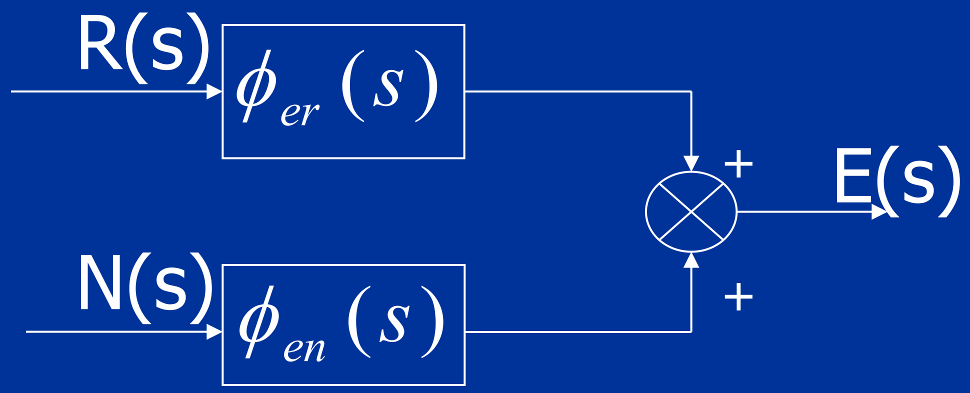
$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s)$$

当输入信号为 $\delta(t), 1(t), t, \frac{1}{2}t^2$ 时，可以用终值定理计算静态误差,，谐波(正弦,余弦)输入时，不能应用此定理。

(2) 误差 $e(t)$ 和稳态误差 $\lim_{t \to \infty} e(t)$ 不是一个概念；

$e(t)$ 中包含瞬态分量和稳态分量两部分。稳态误差就是误差中的稳态分量。

（3）系统同时存在输入信号和扰动信号时，系统误差的求法如下：



$\phi_{er}(s)$ 为系统对输入信号的误差传递函数

$\phi_{en}(s)$ 为系统对扰动信号的误差传递函数

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s[\phi_{er}(s)\cdot R(s)+\phi_{en}(s)\cdot N(s)]$$

（4）系统的误差与系统的结构有关，还与外作用（输入信号,扰动）的大小及形式有关。而系统的稳定性只取决于系统的结构。

（5）提高系统的型数，增大系统的开环增益,都会提高系统的精度，但这样又会降低稳定性，必须综合考虑。

将 $\phi_e(s)$ 在 s=0 的邻域内展开成台劳级数

$$\phi_e(s)=\phi_e(0)+\dot{\phi}_e(0)s+\frac{1}{2!}\ddot{\phi}_e(0)s^2+\cdots$$

$$E(s)=\phi_e(0)R(s)+\dot{\phi}_e(0)sR(s)+\frac{1}{2!}\ddot{\phi}_e(0)s^2R(s)+\cdots$$

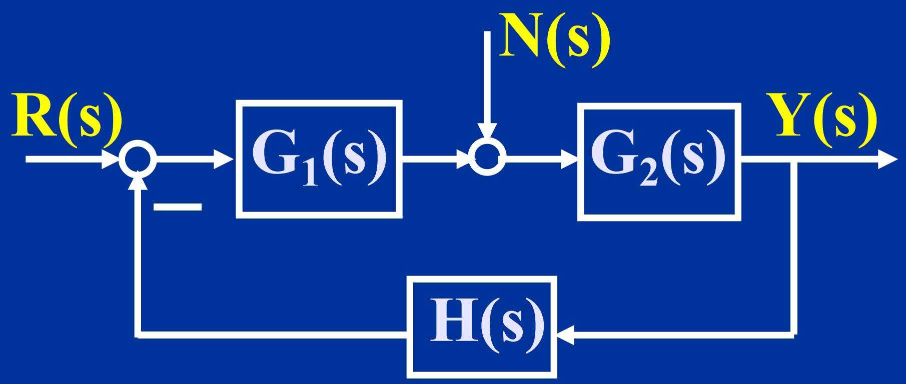
$$e_{ss}(t)=\phi_e(0)r(t)+\dot{\phi}_e(0)\dot{r}(t)+\frac{1}{2!}\ddot{\phi}_e(0)\ddot{r}(t)+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\phi^{(i)}(0)r^{(i)}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i r^{(i)}(t)$$

注意：动态误差系数描述稳态误差随时间的变化规律，而不是描述误差信号中的瞬态误差随时间的变化情况。

五、扰动作用下的系统稳态误差分析

理想情况下，系统对于任意形式的扰动，其稳态误差应当为 0 ，但在实际上，这是不可能的。如果输入信号 R(s)=0，当仅有扰动 N(s) 作用时，系统误差为:

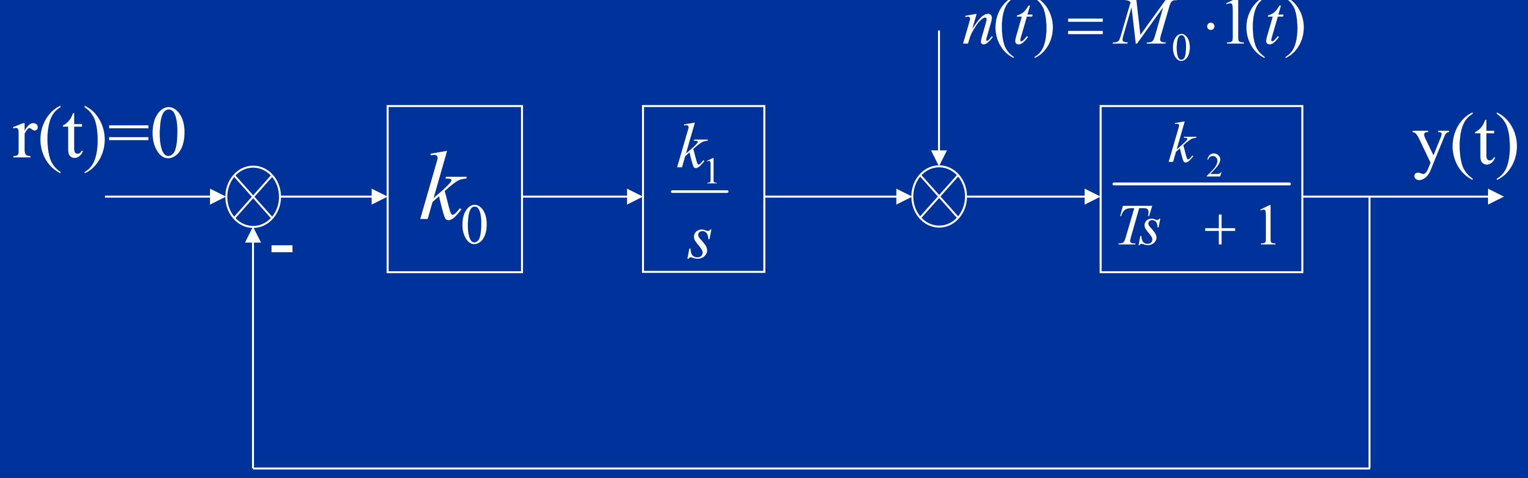


$$E(s) = -\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

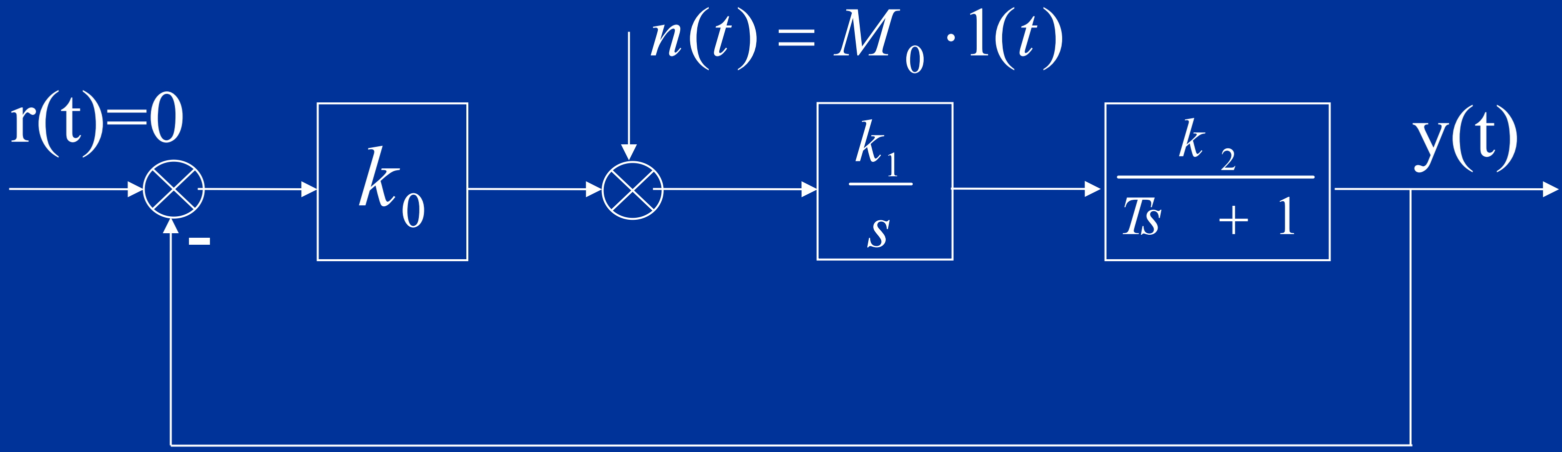
$$e_{ss} = -\lim_{s\to 0} s\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

扰动作用下的稳态误差，实质上就是扰动引起的稳态输出的负值，它与开环传递函数 $G(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)$ 及扰动信号 $N(s)$有关，还与扰动作用点的位置有关。

例4.9 扰动作用点不同的例子。



(a)



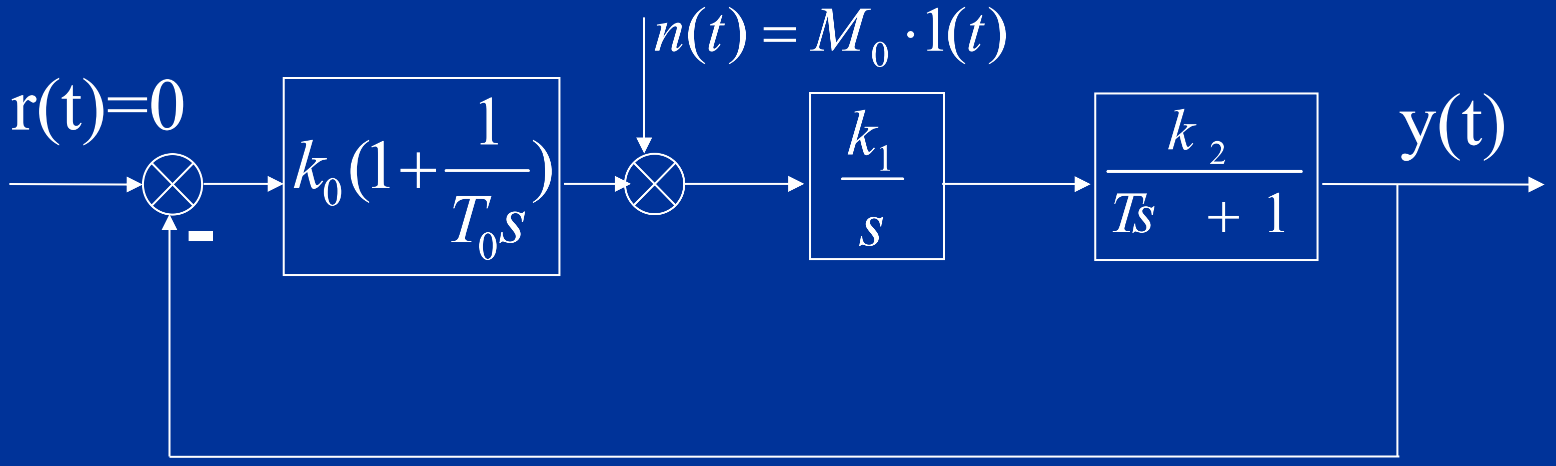
(b)

$$(a):\quad e_{ss} = -\lim_{s\to 0} s \frac{\dfrac{k_2}{Ts+1}}{1+\dfrac{k_0k_1k_2}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{M_0}{s} = 0$$

$$(b):\quad e_{ss} = -\lim_{s\to 0} s \frac{\dfrac{k_1k_2}{s(Ts+1)}}{1+\dfrac{k_0k_1k_2}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{M_0}{s} = -\frac{M_0}{k_0}$$

图 (b)的问题出在扰动响应的“反馈”回路上。比例环节无法实现对扰动响应的累积对消，公式中体现为分子、分母同为2阶多项式。

在扰动作用点之前并联一个积分环节，用（比例积分调节器）$k_0(1+\frac{1}{T_0 s})$ 代替 k_0，可以消除这种稳态误差。



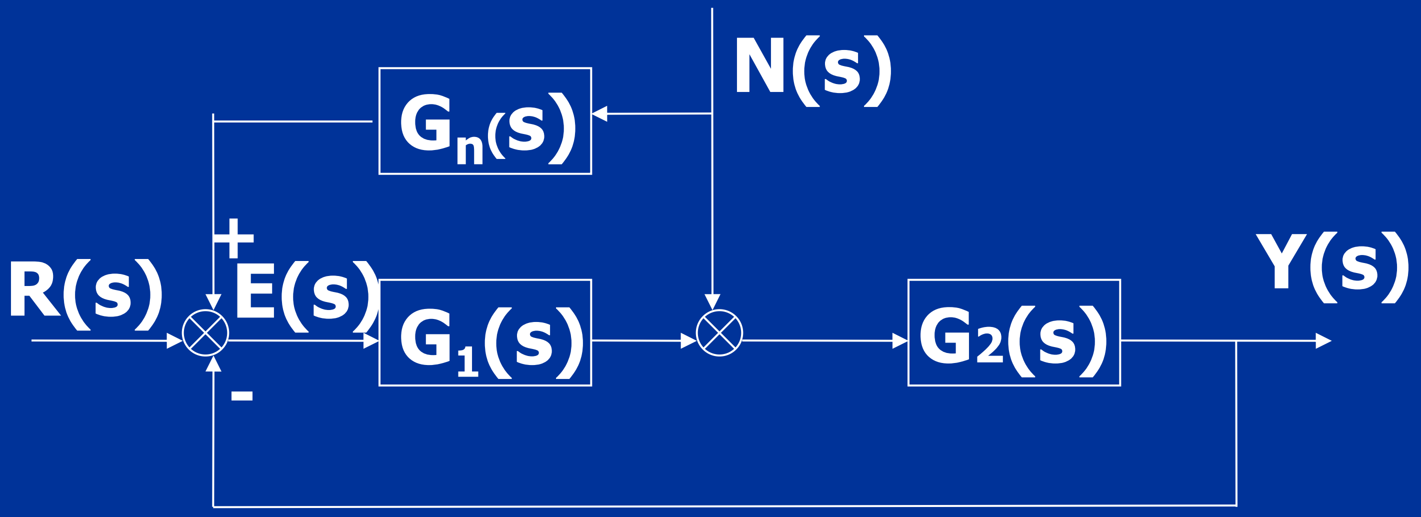
(C)

$$e_{ss} = -\lim_{s \to 0} s \frac{\dfrac{k_1 k_2}{s(Ts+1)}}{1 + k_0 (1 + \dfrac{1}{T_0 s}) \dfrac{k_1 k_2}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{M_0}{s} = 0$$

我们又一次看到，提高扰动作用点前的积分环节个数和增益，可以减小或消除扰动引起的稳态误差，但会降低系统的平稳性。

六、扰动补偿

如果加于系统的干扰是可以测量的，同时干扰对系统的影响是明确的，则可以用干扰补偿的办法来提高稳态精度。



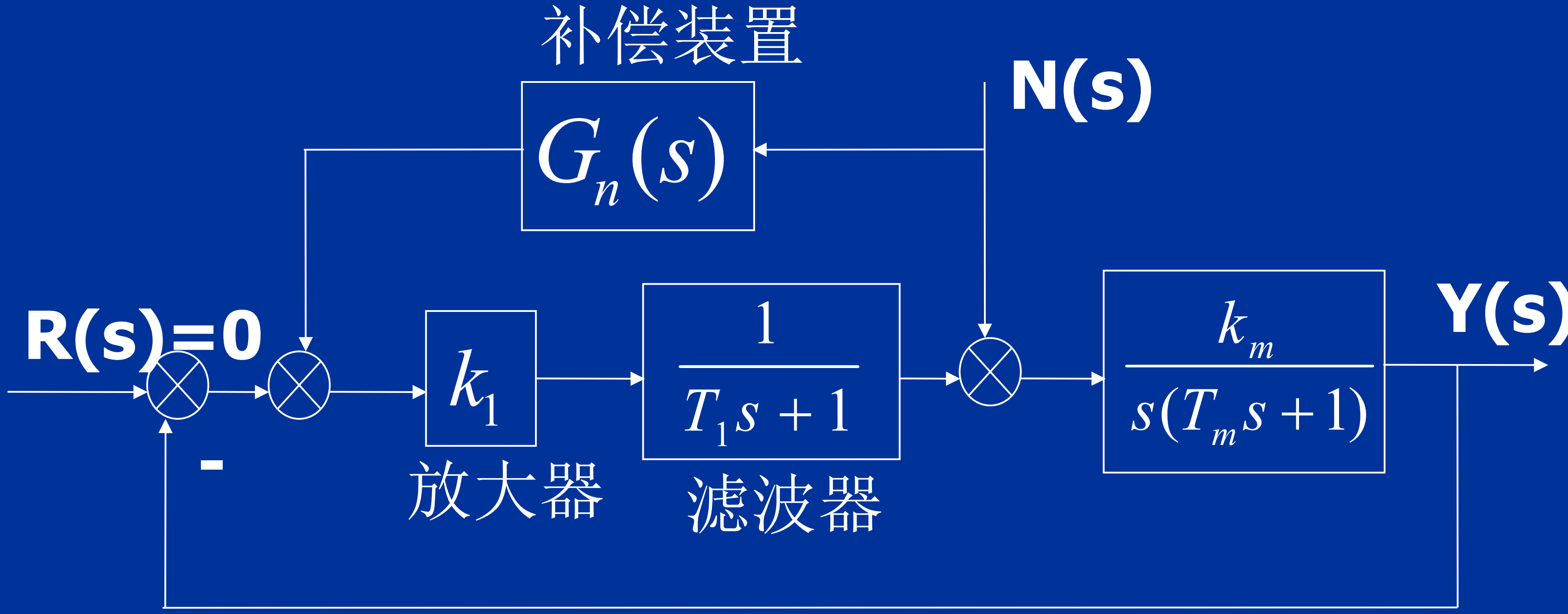
在扰动作用下的输出为:

$$Y(s) = \frac{G_2(s) + G_n(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

$$\text{if } \ G_n(s) = -1/G_1(s), \quad \text{we have } Y(s) = 0$$

通过增加补偿装置，在误差驱动信号中引入扰动补偿成分，完全消除了扰动对系统输出的影响。

例4.10 扰动补偿



系统输出:

$$Y_n(s)=\frac{\frac{k_m}{s(T_m s+1)}\cdot\left[1+G_n(s)\cdot\frac{k_1}{T_1 s+1}\right]}{1+\frac{k_1 k_m}{s(T_1 s+1)(T_m s+1)}}\cdot N(s)$$

若选 $G_n(s)=-\dfrac{1}{k_1}\cdot(T_1 s+1)$，则系统的输出完全不受扰动的影响，但不能物理实现。对因果系统而言，传递函数分母的阶次应该大于或等于分子的阶次。

如果选 $G_n(s)=-\dfrac{1}{k_1}$，则在稳态情况下，

$$\lim_{t\to\infty} y_n(t) = y_n(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y_n(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{\dfrac{k_m}{s(T_m s+1)}\cdot\left[1+\left(-\dfrac{1}{k_1}\right)\cdot\dfrac{k_1}{T_1 s+1}\right]}{1+\dfrac{k_1 k_m}{s(T_1 s+1)(T_m s+1)}}\cdot N(s) = 0$$

这就是稳态全补偿。

习题

E5.1, E5.2, E5.4, E5.10, E5.11, E5.12, E5.13
E5.17, P5.19 , AP5.1 , AP5.5 , AP5.6