第四章　时间响应分析

（教材第4、5章）

4-1 控制系统的时域指标

4-2 一阶系统的时间响应

4-3 二阶系统的时间响应

4-4 高阶系统的时间响应

4-5 控制系统的稳态误差（教材第4章）

4-6 反馈的特性（教材第4章）

第九讲：二阶系统的性能改进与高阶系统的时间响应

（4-3、 4-4单元，2学时）

4-3 二阶系统的时间响应

4-4 高阶系统的时间响应

四、二阶系统的性能改善（举例说明）

例4.4（比例调节）：已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{5K_A}{s(s+34.5)}$$

设系统的输入为单位阶跃函数，试计算放大器增益K_A=200时，系统输出响应的动态性能指标。当K_A增大到1500，或减小到13.5时，系统的动态性能指标如何?

解:系统的闭环传递函数为:

$$\phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{5K_A}{s^2+34.5s+5K_A}$$

$$K_A=200,\therefore\phi(s)=\frac{1000}{s^2+34.5s+1000}$$

$$\therefore\omega_n^2=1000,\quad 2\xi\cdot\omega_n=34.5$$

$$\therefore\omega_n=31.6,\ \xi=\frac{34.5}{2\omega_n}=0.545$$

根据欠阻尼二阶系统动态性能指标的计算公式，可以求得:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.12$$

$$t_s \approx \frac{3}{\xi \cdot \omega_n} = 0.174$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 13\%$$

$$N = \frac{t_s}{2\pi / \omega_d} = \frac{t_s \omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{2\pi} = 0.72$$

$$\text{when } K_A = 1500,$$
$$\omega_n = 86.2; \xi = 0.2$$
$$\therefore t_p = 0.037, t_s = 0.174$$
$$\sigma\% = 52.7\%, N = 2.34$$

由此可见，K_A 越大，ξ 越小，ω_n 越大，t_p 越小，$\sigma\%$ 越大，而调节时间 t_s 无多大变化。

而当 $K_A = 13.5$ 时，

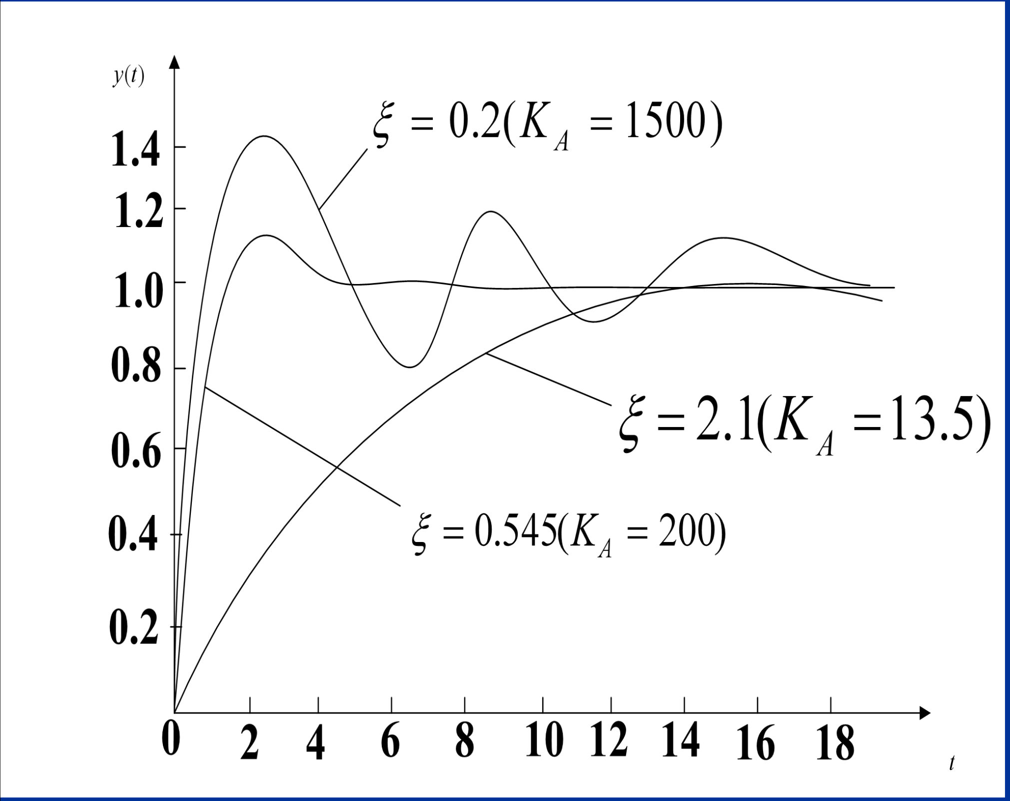
$$\omega_n = 8.22, \xi = 2.1$$

系统工作在过阻尼状态，峰值时间，超调量和振荡次数不存在，而调节时间可将二阶系统近似为大时间常数T的一阶系统来估计，即：

$$t_s \approx 3T_1 = 1.46, \frac{1}{T_1} = w_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

此时，调节时间比前两种情况大得多，虽然响应无超调，但过渡过程缓慢。

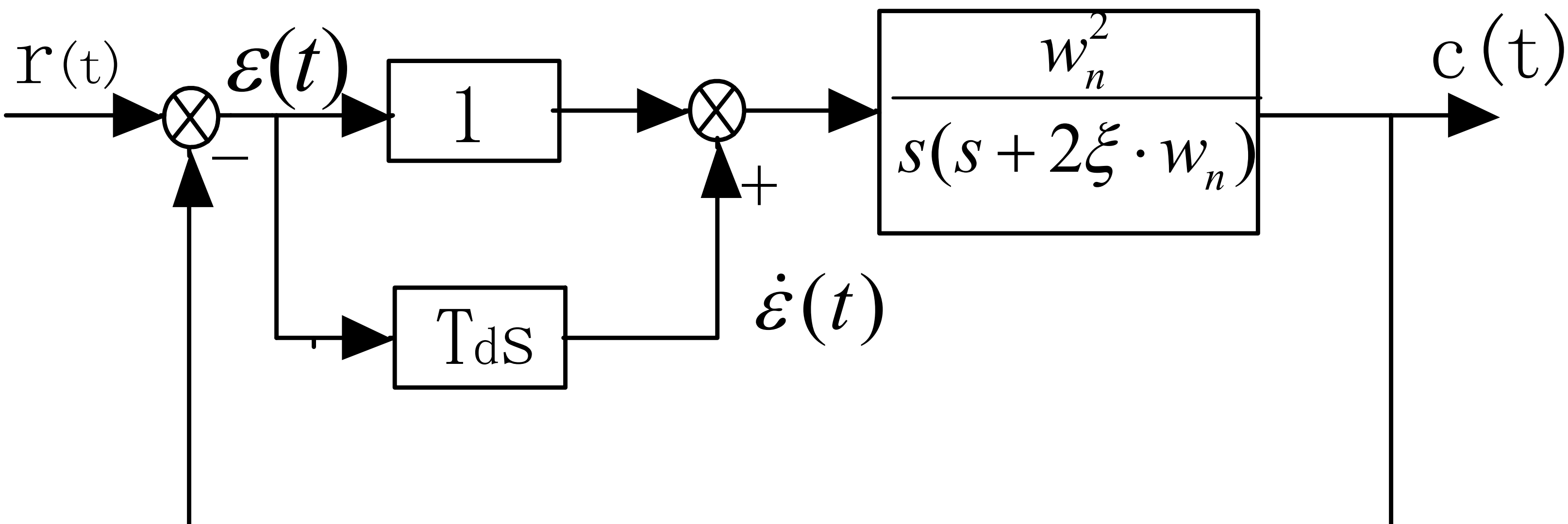
系统的响应曲线如下



K_A 增大，t_p 减小，t_r 减小，可以提高响应的快速性但超调量也随之增加，仅靠调节放大器的增益，难以兼顾系统的快速性和平稳性。

为了改善系统的动态性能，可采用比例—微分控制或速度反馈控制，即对系统加入校正环节。

例4.5 下图表示引入了一个比例微分控制的二阶系统,系统输出量同时受偏差信号 $\varepsilon(t)$ 和偏差信号微分 $\dot{\varepsilon}(t)$ 的双重控制。试分析比例微分串联校正对系统性能的影响。



校正之后，系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{\omega_n^2(T_d s+1)}{s(s+2\xi\cdot\omega_n)}=\frac{k(T_d s+1)}{s(\dfrac{s}{2\xi\cdot\omega_n}+1)},k=\frac{\omega_n}{2\xi}$$

闭环传递函数为:

$$\phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\omega_n^2(T_d s+1)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 T_d s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(T_d s+1)}{s^2+2\xi_d\omega_n s+\omega_n^2}$$

PD校正改变了原系统的阻尼比，也改变了调节时间等参数。等效阻尼比增大为：

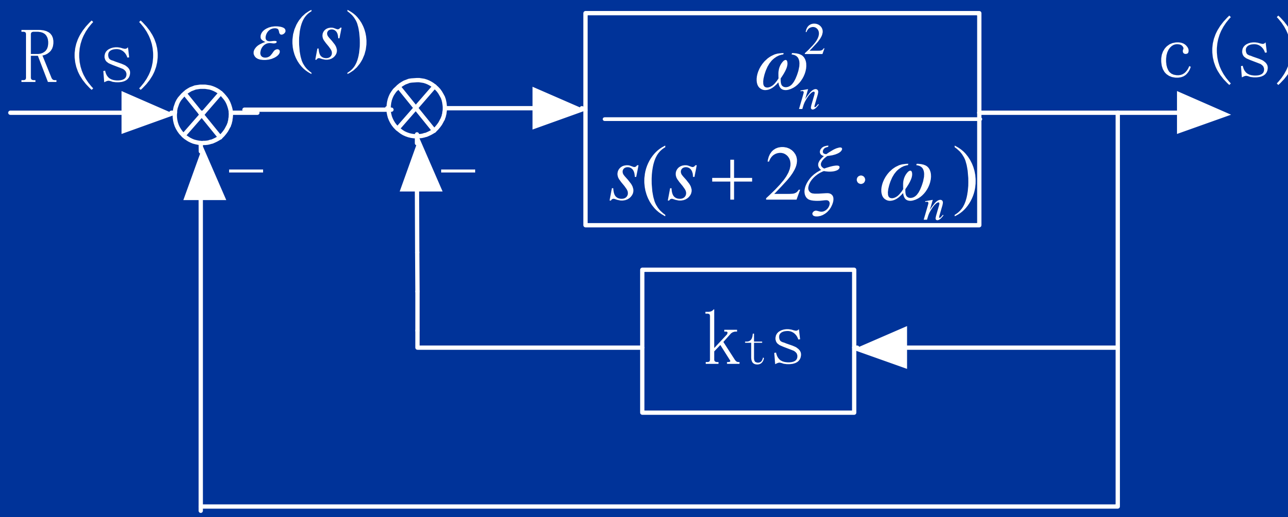
$$\xi_d=\xi+\frac{1}{2}T_d\omega_n$$

$\xi_d > \xi$，增大了系统的阻尼比，可以使系统动态过程的超调量下降，调节时间缩短，但由于速度误差系数 k 保持不变（下一节详细讲授），它的引入并不影响系统的稳态精度，同时也不改变系统的无阻尼振荡频率 ω_n。

此外，比例微分校正为系统增加了一个闭环零点 $s=-1/T_d$，动态性能指标的公式不再适用（参见教材图5.13）。

由于稳态误差与速度误差系数成反比，因此，适当选择速度误差系数和微分器的时间常数 T_d，既可减小稳态误差，又可获得良好的动态性能。

例 4.6 下图表示采用了速度反馈控制的二阶系统，试分析速度反馈校正对系统性能的影响。



解:校正后，系统的开环（内环的闭环）传递函数为:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n+\omega_n^2k_t)}$$

式中，k_t 为速度反馈系数。

$k = \omega_n / (2\xi + k_t\omega_n)$ 为系统校正后的速度误差系数，与原有系统相比较，误差系数有所减小。这增大了稳态误差，因而降低了系统的精度。校正后的闭环传递函数为：

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2(\xi + \frac{1}{2}\omega_n k_t)\omega_n s + \omega_n^2}$$

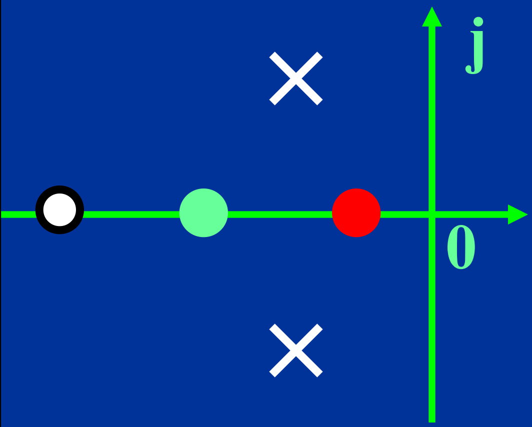
等效阻尼比增大为： $\xi_t = \xi + \frac{1}{2}k_t\omega_n$

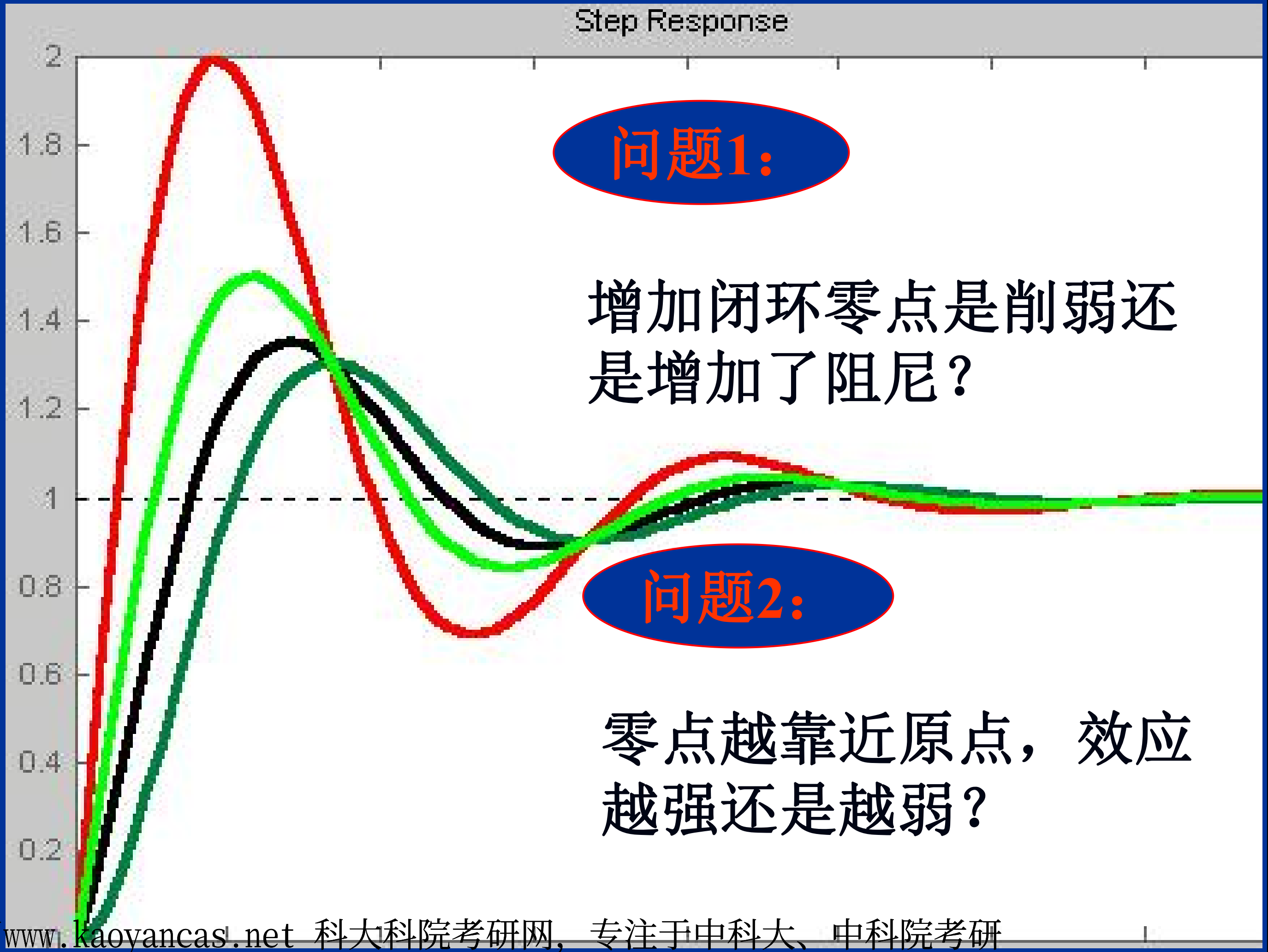
所以，速度反馈同样可以增大系统的阻尼比,从而可以改善系统的动态性能，但不改变无阻尼振荡频率 ω_n。

在应用速度反馈校正时，应适当增大原系统的速度误差系数，以补偿速度反馈引起的速度误差系数的减小。同时，适当选择速度反馈系数，使等效阻尼比 ξ_t 增至适当数值，以减小系统的超调量，提高系统的响应速度，使系统满足各项性能指标的要求。

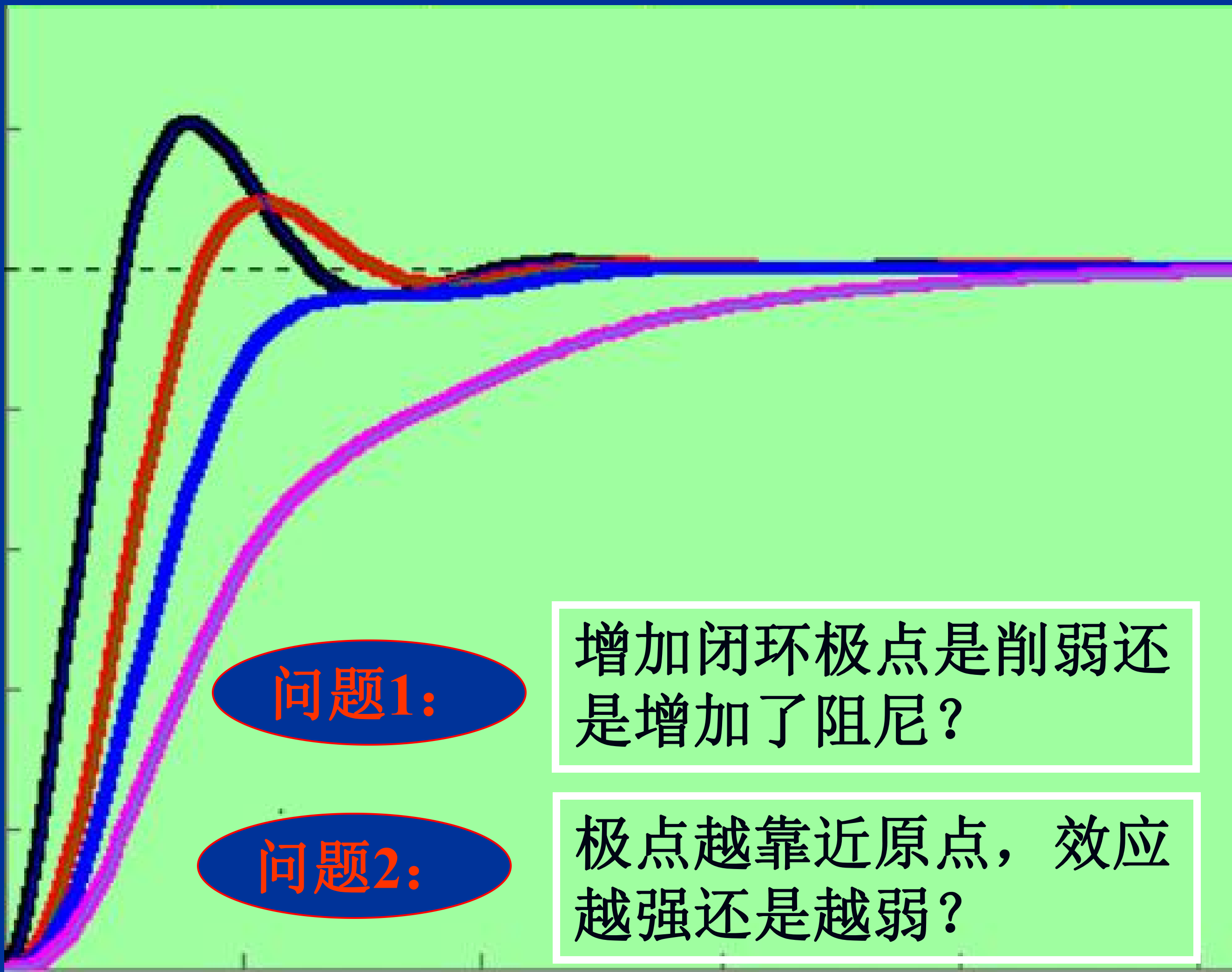
4-4 高阶系统的时间响应

一、附加闭环零点对欠阻尼二阶系统的影响





二、附加闭环极点对二阶系统的影响

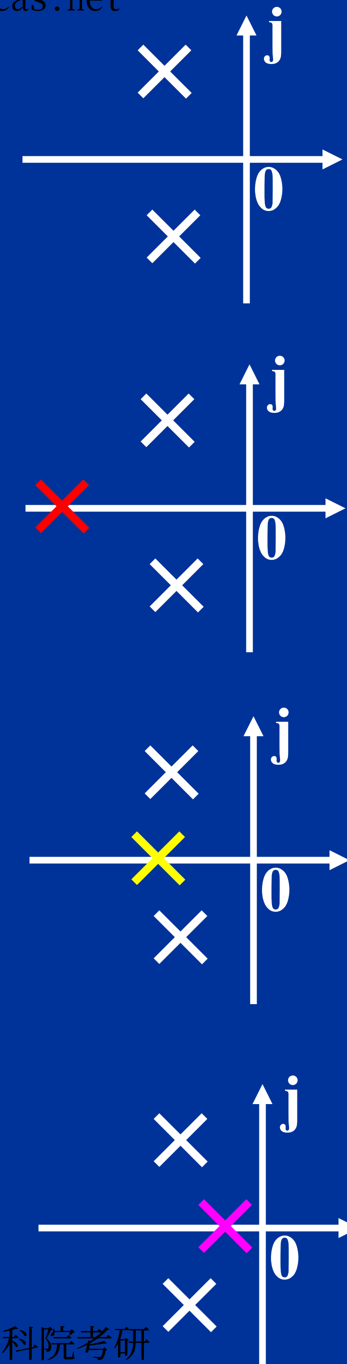


问题1：

增加闭环极点是削弱还是增加了阻尼？

问题2：

极点越靠近原点，效应越强还是越弱？



基本结论（定性）

1、闭环零点的作用是减少阻尼，使系统响应速度加快，并且闭环零点越接近虚轴，效果越明显。

2、闭环非主导极点的作用是增加阻尼，使系统响应速度变缓，并且闭环极点越接近虚轴，效果越明显。

3、最接近虚轴的闭环极点，对系统响应速度影响最大，若没有对消出现，该极点称为闭环主导极点。

附加闭环零、极点之后，性能指标的计算公式不再完全适用。

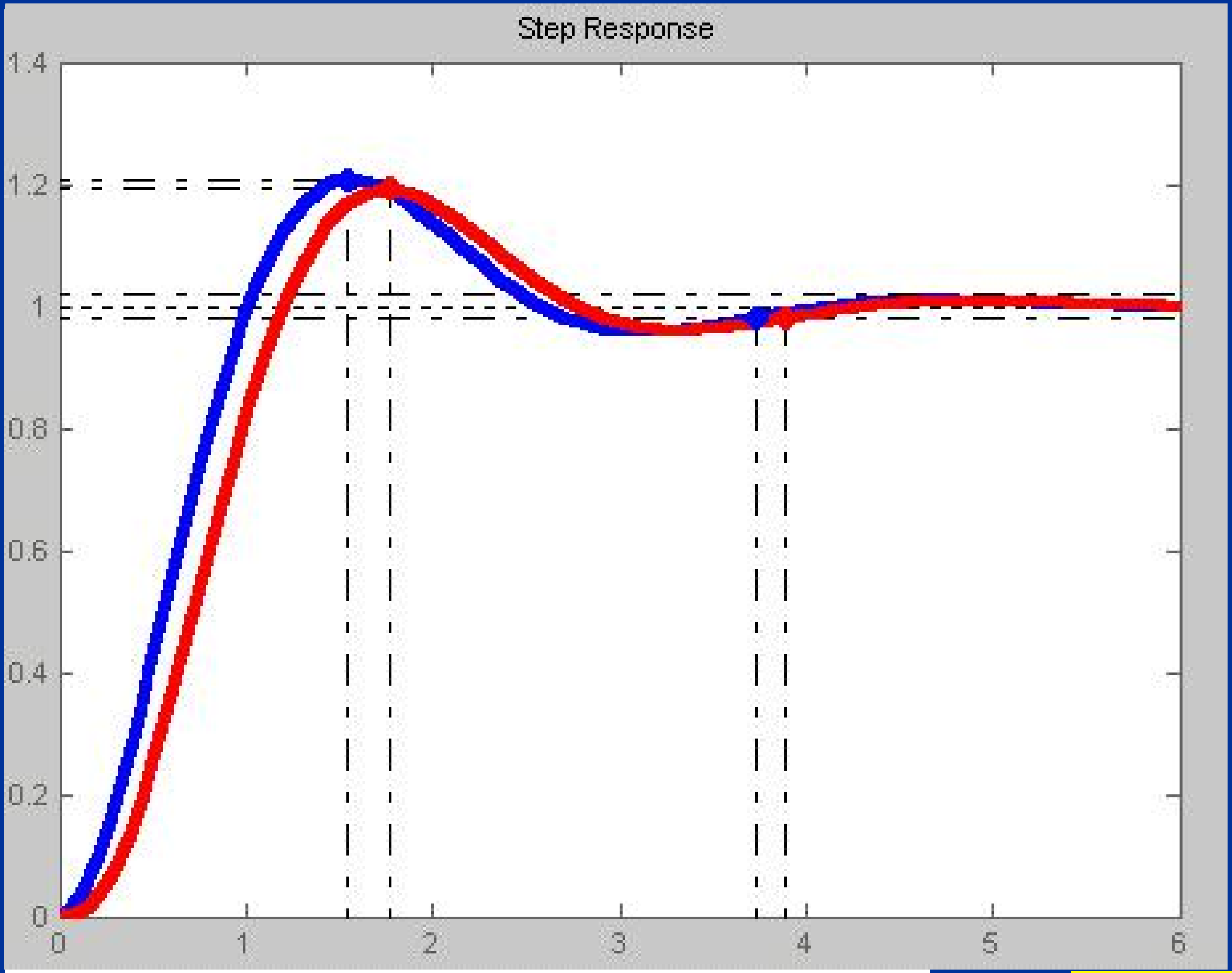
当只附加1个零、极点时，系统性能的定量分析结果有表格可以查阅。请参阅教材图5.13。

三、降阶近似

在控制工程中，几乎所有的控制系统都是高阶系统，应该用高阶微分方程来进行描述。

对于不能用二阶系统近似的高阶系统来说，其动态性能指标的确定是比较困难的，需要借助软件（如MATLAB）来解决这个问题。工程上常常采用闭环主导极点的概念对高阶系统进行近似分析。

闭环主导极点



增加非主导极点对阻尼系数有何影响？

$\sigma\% = 20.8\%$
$t_s = 3.74s$

$\sigma\% = 19.1\%$
$t_s = 3.89s$

$$\Phi_1(s) = \frac{30}{(s^2+2s+5)(s+6)}$$

$$\Phi_2(s) = \frac{5}{(s^2+2s+5)}$$

[说明]

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$y(s)=\frac{a_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s+p_i}$$

若某极点的位置距原点很远，则a_i很小，是非主导极点。

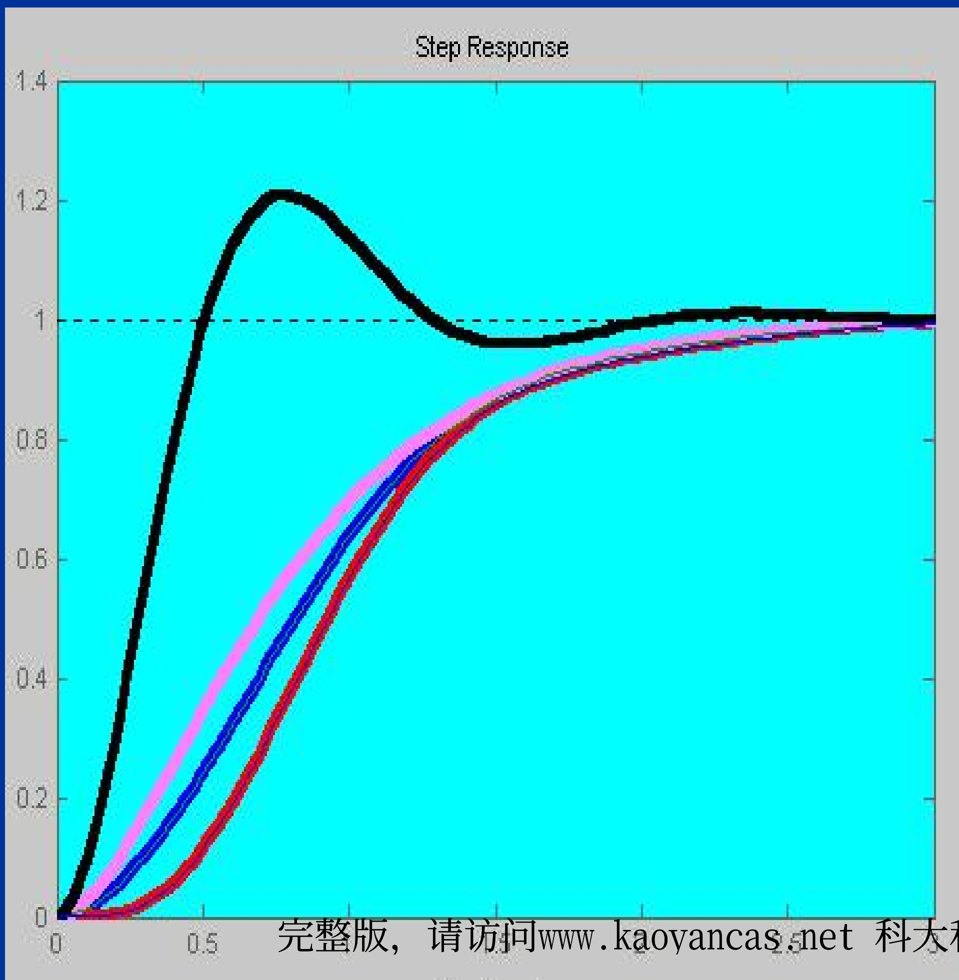
偶极子：彼此接近的零、极点

$$\Phi_1=\frac{20}{(s+2)^2+4^2}$$

$$\Phi_2=\frac{120}{[(s+2)^2+4^2](s+2)(s+3)}$$

$$\Phi_3=\frac{3.31[(s+2)^2+4.5^2]}{[(s+2)^2+4^2](s+2)(s+3)}$$

$$\Phi_4=\frac{6}{(s+2)(s+3)}$$



问题1：增加极点有何影响？

问题2：偶极子有何作用？

[说明]

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$y(s)=\frac{a_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s+p_i}$$

若Z_j和P_i靠得很近， 则a_i很小，彼此可以对消。

基本结论

1、 闭环主导极点：如果在所有的闭环极点中，距离虚轴最近的极点周围没有闭环零点，而其它极点又远离虚轴，那么距虚轴最近的极点所对应的响应分量，无论从指数还是系数来看，它们都在时间响应中起主导作用。

2、 偶极子：若闭环零、极点彼此接近，则它们对系统响应速度的影响互相抵消。

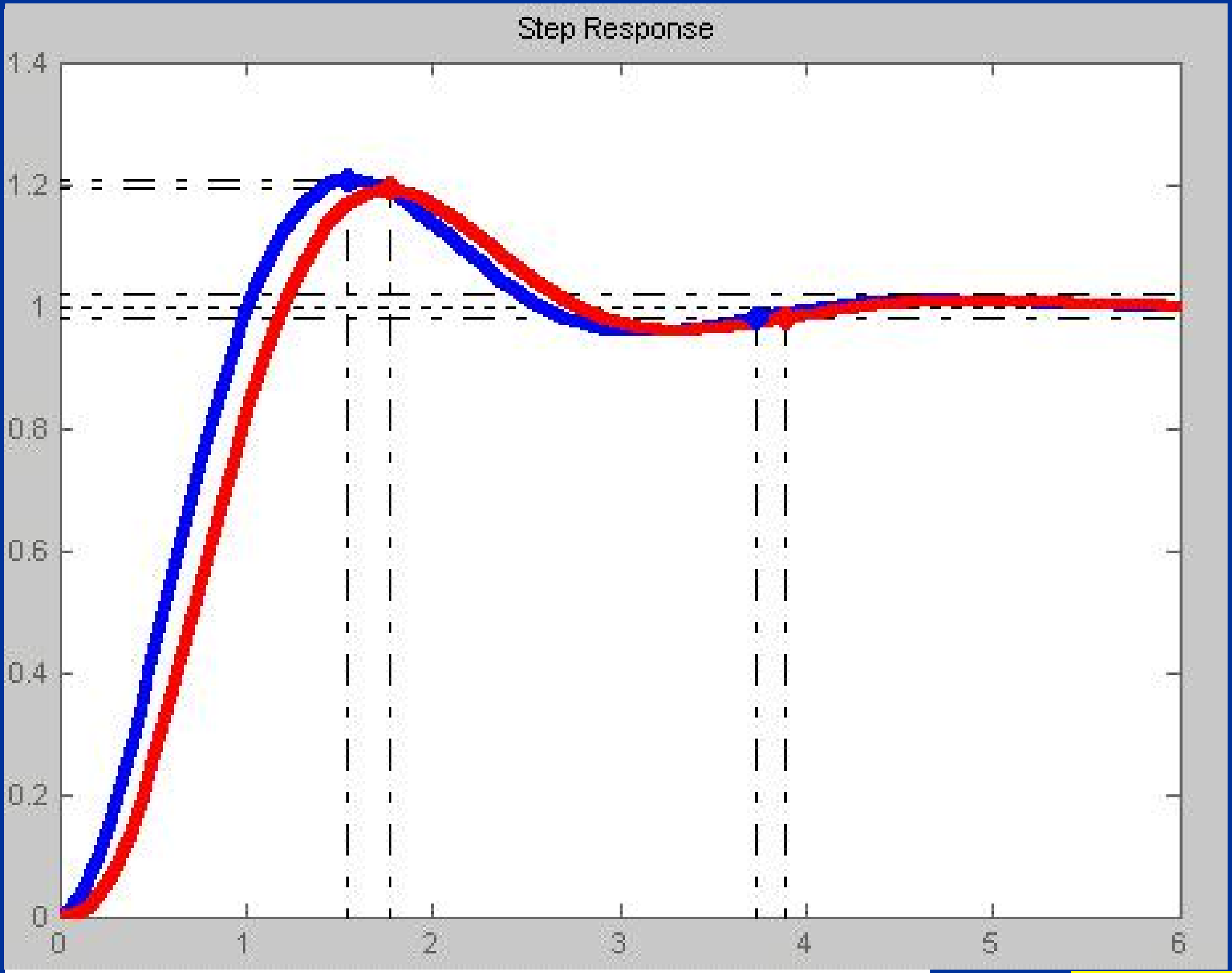
基本结论

3、 确认闭环主导极点之后，就可以略去非主导极点项，对系统进行降维近似处理。通常，非主导极点离虚轴的水平距离，比主导极点离虚轴的水平距离大10倍之后，能得到很好的近似效果。

4、确认偶极子之后，就可以对消相应的极点和零点，也能对系统进行降维近似处理。

对系统进行降维近似时，为了保持正确的稳态响应，应该对增益系数作相应的调整。再看前面的例子。

闭环主导极点



增加非主导极点对阻尼系数有何影响?

$\sigma\% = 20.8\%$

$t_s = 3.74s$

$\sigma\% = 19.1\%$

$t_s = 3.89s$

$$\Phi_1(s) = \frac{30}{(s^2+2s+5)(s+6)}$$

$$\Phi_2(s) = \frac{5}{(s^2+2s+5)}$$

还有更精细的降维近似计算方法，请阅读教材5.10节。

习题

E5.4, E5.6, E5.7（有附加零、极点）

E5.10, P5.18