

方程的数值解

现在我们来真正解前面的问题。假定取 $\varepsilon = 0.100$ 秒。当我们做好这一切工作后，如果发现这还不够小，我们可以再回过头来，以 $\varepsilon = 0.010$ 秒重做一次。从初值 $x(0) = 1.00$ 开始， $x(0.1)$ 是多少呢？它是原来的位置 $x(0)$ 加上速度（此时为 0）乘 0.10 秒。于是 $x(0.1)$ 仍是 1.00，因为它还没有开始运动。但在 0.10 秒时的新速度就是原速度 $v(0) = 0$ 加 ε 乘以加速度。加速度是 $-x(0) = -1.00$ 。于是，

$$v(0.1) = 0.01 - 0.10 \times 1.00 = -0.10$$

现在，在 0.20 秒时

$$\begin{aligned} x(0.20) &= x(0.1) + \varepsilon v(0.1) \\ &= 1.00 - 0.10 \times 0.10 = 0.99 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} v(0.2) &= v(0.1) + \varepsilon a(0.1) \\ &= -0.10 - 0.10 \times 1.00 = -0.20 \end{aligned}$$

依此类推，一直做下去，就可计算出其余的运动，这正是我们要做的事。然而，实际上，这里有点小小的技巧可用来提高准确度。假如我们继续已经开始的计算，就会发现由于 $\varepsilon = 0.100$ 秒是相当粗糙的，因而运动也是相当粗糙的，我们不得不取一个更小的时间间隔，比如说 $\varepsilon = 0.010$ 秒。于是，要对一段适当的总时间间隔进行研究，就要作大量的重复计算。所以我们将用同样粗糙的间隔 $\varepsilon = 0.100$ 秒的条件下，把要计算的工作组织一下以提高准确度。这一点在分析技巧上略加改进就可以办到。

我们注意到，新的位置是老的位置加上时间间隔 ε 乘以速度。但这是什么时刻的速度呢？在时间间隔开始时是一个速度，在时间间隔结束时又是另外一个速度。我们的改进就是利用二者之间的速度。同样的考虑也可用于速度：为了计算速度变化，我们将使用要求出它的速度的那两个时刻中间的加速度。这样我们实

际使用的方程就有如下述：后来的位置等于先前的位置加上 ε 乘以在间隔中间的那个时刻的速度。类似地，间隔中间那个时刻的速度等于比它早 ε 时(它正处在前一个时间间隔中间)的速度加上 ε 乘以 t 时刻的加速度，也就是说，我们利用的方程是

$$\begin{aligned}x(t+\varepsilon) &= x(t) + \varepsilon v(t+\varepsilon/2) \\v(t+\varepsilon/2) &= v(t-\varepsilon/2) + \varepsilon a(t) \\a(t) &= -x(t)\end{aligned}\quad (1)$$

剩下来还有一个小问题： $v(\varepsilon/2)$ 是什么？在起始时刻，我们得到的是 $v(0)$ ，而不是 $v(-\varepsilon/2)$ 。我们将用一个特殊等式，即 $v(\varepsilon/2) = v(0) + (\varepsilon/2)a(0)$ 来开始计算。

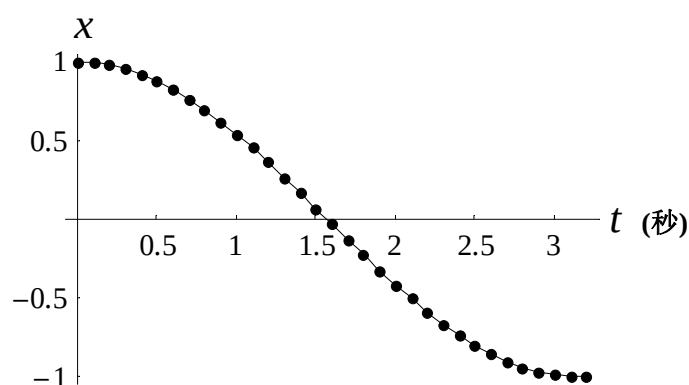
现在我们已经准备好，可以进行计算了。为了方便起见，可以用列表的方法进行，各栏分别为时间、位置、速度、加速度，而速度则标在两行之间，如表 1

t	x	v	a	t	x	v	a
0.0	1.000	0.000	-1.000				
0.1	0.995	-0.050	-0.995	2.1	-0.506	-0.887	0.506
0.2	0.980	-0.150	-0.980	2.2	-0.589	-0.836	0.589
0.3	0.955	-0.248	-0.955	2.3	-0.667	-0.777	0.667
0.4	0.921	-0.343	-0.921	2.4	-0.738	-0.711	0.738
0.5	0.877	-0.435	-0.877	2.5	-0.802	-0.637	0.802
		-0.523				-0.557	
0.6	0.825	-0.605	-0.825	2.6	-0.857	-0.471	0.857
0.7	0.765	-0.682	-0.765	2.7	-0.905	-0.381	0.905
0.8	0.696	-0.752	-0.696	2.8	-0.943	-0.286	0.943
0.9	0.621	-0.814	-0.621	2.9	-0.971	-0.189	0.971
1.0	0.540	-0.868	-0.540	3.0	-0.990	-0.090	0.990
		-0.913				0.010	
1.1	0.453	-0.949	-0.453	3.1	-0.999	0.110	0.999
1.2	0.362	-0.976	-0.362	3.2	-0.998	0.208	0.998
1.3	0.267	-0.993	-0.267	3.3	-0.987	0.305	0.987
1.4	0.169	-1.000	-0.169	3.4	-0.966	0.399	0.966
1.5	0.070	-0.997	-0.070	3.5	-0.936	0.488	0.936
		-0.984				0.573	
1.6	-0.030	-0.961	0.030	3.6	-0.896	0.652	0.896
1.7	-0.130	-0.929	0.130	3.7	-0.847	0.724	0.847
1.8	-0.228		0.228	3.8	-0.790		0.790
1.9	-0.324		0.324	3.9	-0.725		0.725
2.0	-0.417		0.417	4.0	-0.652		0.652

表 1

所示。当然，这张表只是表示由等式(1)所得到数值的方便的办法，事实上方程本身毋需写出。我们只要在表中一个接一个地填满空位。这张表给我们提供了一个关于运动的很好的概念：它从静止开始，先获得一点往上的负速度，并失去一点距离。加速度减少了一点点，但它仍然获得速率。当运动继续时，速率增加得越来越慢，直到大约 $t = 1.50$ 秒时它通过 $x = 0$ 点，我们可以肯定地断言物体将继续运动，但现在是往另一边运动； x 将变为负值，而加速度为正。于是速率减慢。将这些数值与图 1 所示的函数 $x = \cos t$ 相比是很有意思的。在我们的计算准确到三位有效数字的范围

内，它们是符合的！当然你已经从普通理学中知道 $x = \cos t$ 正是这个运动方程的精确数学解，但这样容易的计算会得出这样准确的结果使人们对数值分析的作用留下了深刻的印象。



上面对于振动弹簧运动的分析是非常完美的，但我们能否分析行星的绕日运动呢？我们来看看是否能在一定的近似下得出椭圆轨道。我们假定太阳是无限重的，这意味着我们将不把太阳包括在运动中。假定行星在某个位置开始以某个速度运动；它将沿某一曲线绕日转动，我们试图用 Newton 运动定律及引力定律来分析一下这是一条什么样的曲线。从何下手呢？在一个给定时刻它在空间的某确定位置上。如果把从太阳到这个位置的矢径称为 $\mathbf{r}$ ，那么根据引力定律可知，将有一个力沿 $\mathbf{r}$ 指向太阳，它等于一个常数乘以太阳质量与行星质量的乘积，再除以距离的平方。为了进一步分析下去，我们必须求出由这个力所产生的加速度。我们需要知道沿两个方向(称为 x_1 和 x_2 方向)的加速度分量。于是，如果以给定的 x_1 和 x_2 表示某一时刻行星的位置(我们将假设 x_3 总是为 0，因为在 z 方向无作用力，而且，如果没有初速度 v_3 ，就不会使 x_3 变为异于零的值)，力就沿着行星与太阳联线的方向。现在我们运用动力学定律得出，这个力的分量等于行星的质量乘以它在相应方向上的速度变化率。这样我们就得到下述定律：

$$m \frac{dv_i}{dt} = -GMm \frac{x_i}{r^3}, \quad \text{or} \quad \frac{dv_i}{dt} = -GM \frac{x_i}{r^3} \quad (\text{with } i = 1, 2) \quad (2)$$

这就是我们要解的一组方程。为了简化数值计算，我们再假设时间单位，或太阳质量都已经过调整(或者我们有幸如此)为 $GM \equiv 1$ 。在我们这个特例中，我们将假定行星的初始位置在 $x_1 = 0.500$ 、 $x_2 = 0.000$ 处，而在初始时刻，速度完全在 x_2 方向，其值为 1.630 。我们现在怎样来进行计算呢？我们再作一个表，其中各列分别为时间、 x_1 位置、 x_1 方向速度 v_1 及 x_1 方向加速度 a_1 ；然后，另外列出 x_2 方向上的位置、速度、加速度三列，并与前者用双线隔开。为了得到加速度，我们需要用到式(2)；它告诉我们 x_1 方向的加速度是 $-x_1/r^3$ ， x_2 方向的加速度是 $-x_2/r^3$ ，而 r 是 $(x_1^2 + x_2^2)$ 的平方根。于是给定了 x_1 与 x_2 后，我们只须在旁边稍作计算，取平方和的平方根，从而找出 r ，以准备计算两个加速度。将 $1/r^3$ 求出也是有用的。进行这项计算利用平方表、立方表及倒数表会更容易一些。然后只要用计算尺将 x_1 乘 $1/r^3$ 就行了。采用时间间隔 $\varepsilon = 0.100$ ，我们的计算按下述步骤来完成：在 $t = 0$ 时的初始值

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0.500, & x_2(0) &= 0.000 \\ v_1(0) &= 0.000, & v_2(0) &= +1.630 \end{aligned}$$

由此求得

$$\begin{aligned} r(0) &= 0.500, & 1/r^3(0) &= 8.000 \\ a_1 &= -4.000, & a_2 &= 0.000 \end{aligned}$$

于是可计算 $v_1(0.05)$ 和 $v_2(0.05)$ ：

$$\begin{aligned} v_1(0.05) &= 0.000 - 4.000 \times 0.050 = -0.200 \\ v_2(0.05) &= 1.630 + 0.000 \times 0.050 = 1.630 \end{aligned}$$

现在开始作我们的主要计算：

$$x_1(0.1) = 0.500 - 0.20 \times 0.1 = 0.480$$

$$x_2(0.1) = 0.0 + 1.63 \times 0.1 = 0.163$$

$$r = \sqrt{0.480^2 + 0.163^2} = 0.507$$

$$1/r^3 = 7.67$$

$$a_1(0.1) = -0.480 \times 7.67 = -3.68$$

$$a_2(0.1) = -0.163 \times 7.67 = -1.250$$

$$v_1(0.15) = -0.200 - 3.68 \times 0.1 = -0.568$$

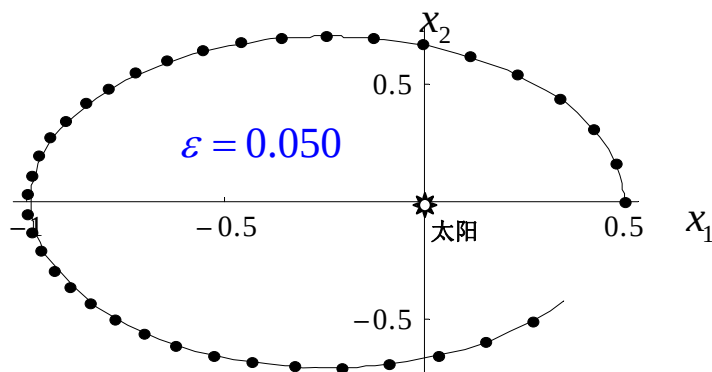
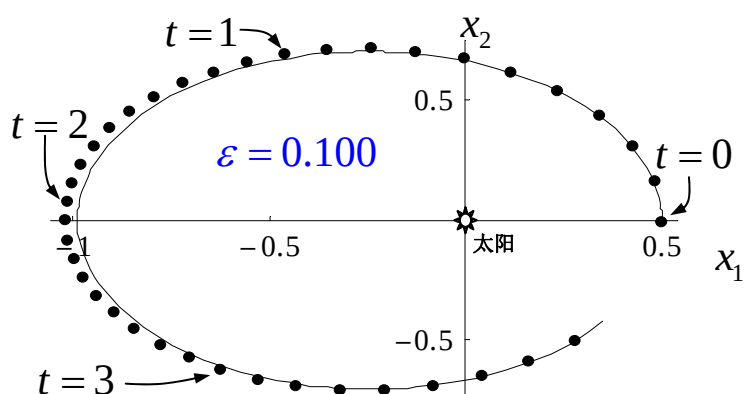
$$v_2(0.15) = 1.630 - 1.26 \times 0.1 = 1.505$$

$$x_1(0.2) = 0.480 - 0.568 \times 0.1 = 0.423$$

$$x_2(0.2) = 0.163 + 1.50 \times 0.1 = 0.313$$

etc.

这样我们就得到表 2 中列出的数值，大约 20 步左右我们就追踪了行星绕太阳运行的一半路程！图 2 中画出表 2 所得的 x_1 坐标和 x_2 坐标，圆点表示每隔 $1/10$ 的时间单位所求得的位置，我们看到开始时行星的运动较快，到末尾时运动则较慢，就这样，曲线的形状被确定下来。于是我们看到，我们确实知道如何来计算行星的运动了！



t	x_1	v_1	a_1	x_2	v_2	a_2	r	$1/r^3$
0.0	0.500	0.000	-4.000	0.000	1.630	0.000	0.500	8.000
0.1	0.480	-0.200	-3.685	0.163	1.630	-1.251	0.507	7.677
0.2	0.423	-0.568	-2.897	0.313	1.505	-2.146	0.527	6.847
0.3	0.337	-0.858	-1.958	0.443	1.290	-2.569	0.556	5.805
0.4	0.232	-1.054	-1.112	0.546	1.033	-2.617	0.593	4.794
0.5	0.115	-1.165	-0.454	0.623	0.772	-2.449	0.634	3.931
0.6	-0.006	-1.211	0.018	0.676	0.527	-2.190	0.676	3.241
0.7	-0.127	-1.209	0.342	0.706	0.308	-1.911	0.718	2.705
0.8	-0.244	-1.175	0.559	0.718	0.117	-1.646	0.758	2.292
0.9	-0.356	-1.119	0.702	0.713	-0.048	-1.408	0.797	1.974
1.0	-0.461	-1.048	0.796	0.694	-0.189	-1.200	0.833	1.728
1.1	-0.558	-0.969	0.856	0.664	-0.309	-1.019	0.867	1.536
1.2	-0.646	-0.883	0.895	0.623	-0.411	-0.862	0.897	1.385
1.3	-0.725	-0.794	0.919	0.573	-0.497	-0.726	0.924	1.267
1.4	-0.795	-0.702	0.933	0.516	-0.569	-0.605	0.948	1.174
1.5	-0.856	-0.608	0.942	0.453	-0.630	-0.498	0.969	1.100
1.6	-0.908	-0.514	0.947	0.385	-0.680	-0.402	0.986	1.043
1.7	-0.950	-0.420	0.950	0.313	-0.720	-0.313	1.000	1.000
1.8	-0.982	-0.325	0.952	0.238	-0.751	-0.230	1.010	0.969
1.9	-1.005	-0.229	0.953	0.160	-0.774	-0.152	1.018	0.949
2.0	-1.018	-0.134	0.955	0.081	-0.790	-0.076	1.022	0.938

表 2

现在来看看如何计算海王星、木星、天王星或任何其他行星的运动。如果我们有许许多多行星，并且让太阳也运动，我们也能这样计算吗？当然能。我们可以计算在某一特定行星，比如说第 a 颗行星上的力，它的位置是 $\vec{r}_a = (x_{a,1}, x_{a,2}, x_{a,3})$ ($a=1$ 可以代表太阳， $a=2$ 是水星， $a=3$ 是金星，等等)。我们必须知道所有行星的处置。作用在一颗行星上的力是所有其他(比方说位于 $\vec{r}_b = (x_{b,1}, x_{b,2}, x_{b,3})$) 的物体所产生的。因此方程式是

$$m_a \frac{dv_{a,i}}{dt} = \sum_{b=1}^N - \frac{Gm_a m_b (x_{a,i} - x_{b,i})}{r_{ab}^3} \quad (3)$$

此外，我们定义 r_{ab} 为两个行星 a 与 b 之间的距离；它等于

$$r_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b| = \sqrt{(x_{a,i} - x_{b,i})(x_{a,i} - x_{b,i})} \quad (4)$$

这里的 $\sum$ 仍旧表示对所有——所有其他物体——求和。当然 $b = a$ 除外。于是我们所要作的就是更多列。对木星的运动要排9列；对土星的运动要排9列，等等。然后，当我们有了所行的初始位置与速度后，就可以首先用(4)式计算出所有的距离，再用(3)式计算出所有的加速度。这要花多长时间呢？如果你用手工来做，这需要很长的时间！但现在有了运算得很快的计算机，用这个方法，跟随木星绕太阳的运动，即使计及所有行星所引起的准确到亿分之一的摄功，也只需要几分钟(结果表明误差约随间隔 ϵ 的平方而变化，也就是说，如果使间隔变为原来的1/10，精确度就提高100倍，那么，让我们使间隔小一万倍吧。)

结果，掌握了具有巨大威力的 Newton 定律，我们不仅可以计算在弹簧上有质量物体这样的简单运动，而且，只要有一台家用电脑，即便是许多行星的极端复杂的运动，也能以我们所希望的任意高的精确度计算出来！