

第二章 光的相干叠加

对于机械波和无线电波，很容易实现相干。而光波的相干却只有采用特殊的装置才能实现。所以光的相干性是一个非常重要的概念。1801年，Thomas Young首次观察到了光的干涉，从而证明了光的波动性。我们无法知道是怎样的灵感驱使他实现了光的相干，但是，通过对他的实验装置的分析，我们可以对光的相干性的物理本质有深刻的了解。

2.1 光的相干性

2.1.1 光的叠加强度

波场中各点都有振动，可以用复振幅来描述。振动本身是一个力学量，即是一个矢量，那么，如果几列波在空间相遇，则每一列波都将在这一点引起振动，这些波在相遇点引起的总的振动应该遵循力学的叠加原理。

我们可以用肉眼直接观察到机械波的波动过程，以及它们之间的干涉，例如水波的干涉；对于无线电波，也可以借助简单的仪器观察到电磁振荡及其相互干涉的过程。例如在示波器上可以观察到交流电信号的波形，以及它们叠加所产生的各种物理图像。从波动的角度看，虽然光与机械波和普通电磁振荡没有本质的区别，但是，第一，我们无法直接观察或测量光波电矢量周期性变化的情况，第二，普通的光也无法产生干涉。这到底是为什么？

对于第一点，是比较容易理解的。光的波长在 $400 \sim 760\text{nm}$ ，其频率约是 10^{14}Hz ，这样短的变化周期不仅比人眼的响应时间要小得多，也比电子仪器的响应时间小得多，所以，我们无法直接感受到光的振动情况。

对于第二点，干涉的结果，表现为合成后的波场振幅的变化，两列波在相遇点，如果相位是相同或相近的，则引起的合振动的振幅就大，因而强度增大；如果相位相反，则合振动的振幅就要减小，因而强度也要变弱。普通的光不能产生干涉，说明光波的相位有着某种特殊性。下面就对这一点进行讨论。

正如前面说指出的，由于测量仪器的响应时间比光波的振动周期大许多，光强的测量值实际上是光波的能量密度在一定时间内（即仪器响应时间内）积累强度的平均值。如果设观察时间或仪器响应时间为 τ ($\tau \gg T$)，则光强

$$I = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A^2 dt \quad (2.1.1)$$

第二章 光的相干叠加

而根据第一章推导的结果，两列振动方向相同、频率相同的单色光，

$$\psi_1 = A_1 \cos(\varphi_1 - \omega t), \quad \psi_2 = A_2 \cos(\varphi_2 - \omega t)$$

按照光的叠加原理，所引起的合振动为

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \cos(\varphi - \omega t)$$

合振动的振幅和相位分别由以下关系确定

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.1.2)$$

$$\tan \varphi = (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) / (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \quad (2.1.3)$$

则上述两列光叠加后的强度为

$$I = \frac{1}{\tau} \int A^2 dt = \frac{1}{\tau} \int [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] dt \quad (2.1.4)$$

2.1.2 光的相干条件

由于 ψ_1 、 ψ_2 都是定态光波，振幅 A_1 、 A_2 是常数，因而 (2.1.4) 式变为

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \frac{1}{\tau} \int \cos(\varphi_2 - \varphi_1) dt$$

记 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ，是两列波在相遇点的相位差。对于相位差的不同特点，进行以下讨论。

1. 如 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 在观察时间内不是稳定值，而是随时间作无规、随机改变，由于 $\cos \Delta\varphi$ 在 $(-1, +1)$ 随机取值，则有

$$\int_0^\tau \cos \Delta\varphi dt = 0$$

$$\text{即 } I = A_1^2 + A_2^2 = I_1 + I_2 \quad (2.1.5)$$

是两列光的强度简单相加，这就是我们通常观察到的现象。普通的光之间是没有干涉的。

2. 如 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 在观察时间内不随时间改变，而是一个稳定的数值，则有

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos \Delta \varphi dt = \cos \Delta \varphi, \text{ 因而}$$

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta \varphi \quad (2.1.6)$$

一般情况下， $I \neq I_1 + I_2$

两列波在空间不同的位置有不同的相位差，叠加后，由于 $2A_1A_2 \cos \Delta \varphi$ 取不同的值，将会有不同的强度，即出现干涉现象。因而，

$$2A_1A_2 \cos \Delta \varphi \quad (2.1.7)$$

被称为干涉项。

$\Delta \varphi$ 只与空间位置有关，即不同的空间点具有不同的相位差，因而有不同的干涉项的数值。

$$(a) \Delta \varphi = 2j\pi \text{ 时, } \cos \Delta \varphi = 1$$

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2 > I_1 + I_2, \text{ 光强取最大值, 称作干涉相长。}$$

$$(b) \Delta \varphi = (2j+1)\pi \text{ 时, } \cos \Delta \varphi = -1$$

$$I = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2 < I_1 + I_2, \text{ 光强取最小值, 称作干涉相消。}$$

即两列波在空间相遇，如果有固定的相位差，便会出现干涉现象，使得光的能量重新分布。

能够产生干涉的光，称为相干光。

结合 1.4 的结果，我们知道，只有满足下列条件的光，才是相干光。

(1) $\Delta \varphi$ 稳定

(2) ω 相同

(3) 存在相互平行的振动分量。

上述三个条件，称作相干条件。

重新考察 1.4 中的例题，当两列波在叠加时，如果振动矢量间有一夹角，则叠加后的振动为

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_1 + \boldsymbol{\Psi}_2 = (\Psi_1 + \Psi_{2y})\mathbf{e}_y + \Psi_{2x}\mathbf{e}_x$$

第二章 光的相干叠加

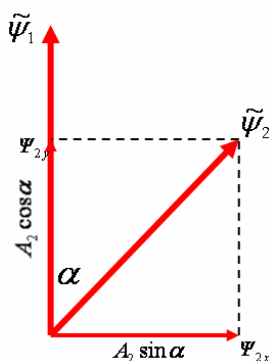
光强为

$$I = A_1^2 + A_{2y}^2 + 2A_1A_{2y} \cos \Delta\varphi + A_{2x}^2 = I_1 + I_2 + 2A_1A_2 \cos \alpha \cos \Delta\varphi$$

由于光强表达式中含有干涉项 $2A_1A_2 \cos \alpha \cos \Delta\varphi$ ，这两列波也是相干的。

实际上，上式中 ψ_1 与 ψ_{2y} 进行相干叠加， ψ_2 在 x 方向的分量 ψ_{2x} ，没有参与干

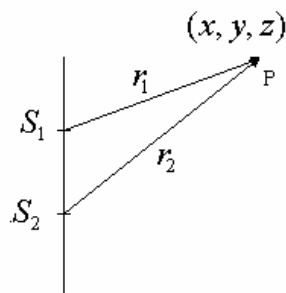
涉，这一部分的强度 A_{2x}^2 只是作为干涉后的背景出现在总的强度中。



2.2 两列相干光的干涉花样

2.2.1 两个点光源的干涉

两个相干的点光源 S_1 、 S_2 ，发出球面波，在场点（即观察点） P 相遇，则有



光学

$$\psi_1(P) = A_1 \cos(k_1 r_1 - \omega t + \varphi_{01}) = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_1 r_1 - \omega t + \varphi_{01}\right)$$

$$\psi_2(P) = A_2 \cos(k_2 r_2 - \omega t + \varphi_{02}) = A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_2 r_2 - \omega t + \varphi_{02}\right)$$

可设初相位均为零，则相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 r_2 - n_1 r_1) \quad (2.2.1)$$

其中光程差 $\delta = n_2 r_2 - n_1 r_1 \quad (2.2.2)$

如果是在真空中，则 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)$ ，以及 $\delta = r_2 - r_1$

干涉相长，出现亮条纹： $\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = 2j\pi$

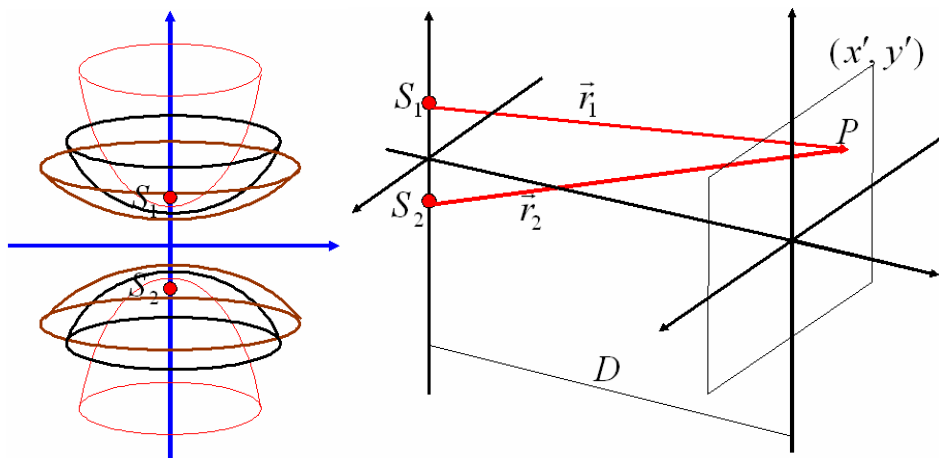
即 $\delta = r_2 - r_1 = j\lambda \quad (2.2.3)$

干涉相消，出现暗条纹： $\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = (2j+1)\pi$

即 $\delta = r_2 - r_1 = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \quad (2.2.4)$

$j=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \cdots$ ，被称做干涉级数。

亮条纹和暗条纹在空间形成一系列双叶旋转双曲面。在平面接收屏上为一组双曲线，明暗交错分布。干涉条纹为非定域的，空间各处均可见到。



对于距离为 d 的两个点源的干涉，如果物点和场点都满足近轴条件，依据式 (1.3.15)，则两点发出的光波在屏上的复振幅分别为

第二章 光的相干叠加

$$\tilde{U}_1(x', y') = \frac{A}{D} \exp\left\{ik\left[D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D}\right]\right\} \exp\left(\frac{-ikd}{2D}x'\right)$$

$$\tilde{U}_2(x', y') = \frac{A}{D} \exp\left\{ik\left[D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D}\right]\right\} \exp\left(\frac{ikd}{2D}x'\right)$$

合成的复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x', y') &= \tilde{U}_1(x', y') + \tilde{U}_2(x', y') \\ &= \frac{A}{D} \exp\left\{ik\left[D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D}\right]\right\} \left[\exp\left(\frac{-ikd}{2D}x'\right) + \exp\left(\frac{ikd}{2D}x'\right)\right] \\ &= \frac{2A}{D} \exp\left\{ik\left[D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D}\right]\right\} \cos\left(\frac{kd}{2D}x'\right) \quad (2.2.5)\end{aligned}$$

强度分布为

$$I = \left(\frac{2A}{D}\right)^2 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right) = 4\left(\frac{A}{D}\right)^2 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right) \quad (2.2.6)$$

$$I_0 = \left(\frac{A}{D}\right)^2 \quad (2.2.7)$$

为从一个孔中出射的光波在屏上的强度。

是一系列等间隔的平行直条纹。亮条纹的位置 $\frac{kd}{2D}x' = j\pi$ ，即

$$x'_j = j \frac{D}{d} \lambda \quad (2.2.8)$$

$$\text{暗条纹的位置 } \frac{kd}{2D}x' = \left(j + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$x' = \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{D}{d} \lambda \quad (2.2.9)$$

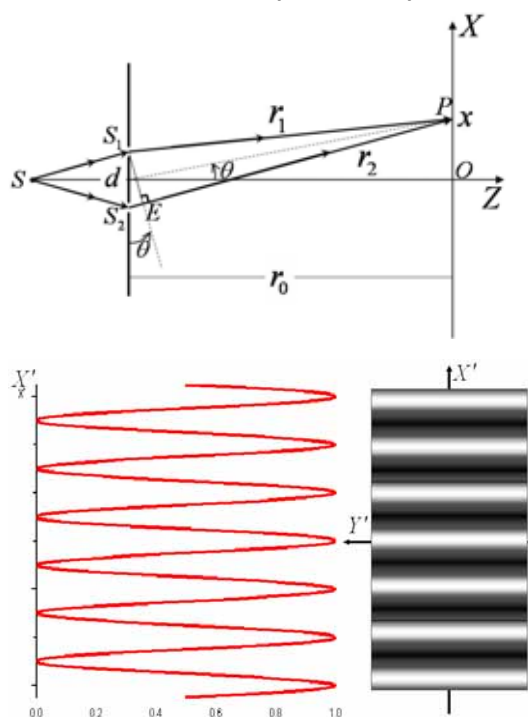
注意，亮条纹的 0 级在中心处，而暗条纹如果也要对称分布的话，应该有

$$x' = \left(j - \frac{1}{2}\right) \frac{D}{d} \lambda, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad x' = \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{D}{d} \lambda, \quad j = -1, -2, -3, \dots$$

间距由 $\frac{kd}{2D}\Delta x' = \pi$ 决定，为

$$\Delta x' = \frac{D}{d} \lambda \quad (2.2.10)$$

2.2.2 两个线光源的干涉（双缝干涉）



在接收屏上，为相互平行的直条纹，明暗交错。满足近轴条件时，

$$r_2 - r_1 = d\theta, \quad x = r_0\theta = \frac{r_0}{d}(r_2 - r_1)$$

则亮条纹在 $x = j \frac{r_0}{d} \lambda$ 处 (2.2.11)

暗条纹在 $x = (2j+1) \frac{r_0}{d} \frac{\lambda}{2}$ 处 (2.2.12)

亮（暗）条纹间距

$$\Delta x = \frac{r_0}{d} \lambda \quad (2.2.13)$$

如两列波初相位不为零，则条纹形状不变，只是整体沿 X 向移动。

如光源和接收屏之间充满介质，因为 $x' = j\pi \frac{2D}{kd} = j \frac{D}{d} \frac{\lambda}{n}$ ，则条纹间距为

第二章 光的相干叠加

$$\Delta x = \frac{r_0}{d} \frac{\lambda}{n} \quad (2.2.13)$$

n 为折射率。

干涉条纹为非定域的，接收屏在各处均可看到条纹。

2.2.3 干涉条纹的反衬度（可见度）

反衬度的定义：在接收屏上一选定的区域中，取光强最大值 I_M 和最小值 I_m ，

有

$$\gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad (2.2.14)$$

$$\text{而 } I_M = (A_1 + A_2)^2, I_m = (A_1 - A_2)^2$$

$$\text{则有 } \gamma = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2\frac{A_1}{A_2}}{1 + (\frac{A_1}{A_2})^2}, \quad (2.2.15)$$

当 $A_1 = A_2$ 时， γ 当 $A_1 \ll A_2$ 或 $A_1 \gg A_2$ 时，即 A_1 、 A_2 相差悬殊时，则 $\gamma \approx 0$ 。

记 $I_0 = I_1 + I_2 = A_1^2 + A_2^2$ ，则条纹亮度可表示为

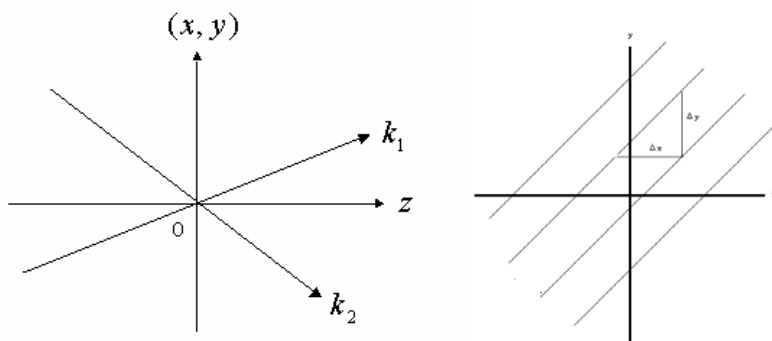
$$\begin{aligned} I &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi \\ &= (A_1^2 + A_2^2) \left[1 + \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} \cos \Delta\varphi \right] = I_0(1 + \gamma \cos \Delta\varphi) \quad (2.2.16) \end{aligned}$$

2.2.4 两列平行光的干涉

两列同频率单色光，振幅分别为 A_1 、 A_2 ；初相位为 φ_{10} ， φ_{20} ，波矢方向分

别用角度表示为 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ， $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

光学



在 $z=0$ 的波前，即 XOY 平面上，相位为，

$$\varphi_1(x, y) = k(\cos \alpha_1 x + \cos \beta_1 y + \cos \gamma_1 \cdot 0) + \varphi_{10}$$

$$\varphi_2(x, y) = k(\cos \alpha_2 x + \cos \beta_2 y + \cos \gamma_2 \cdot 0) + \varphi_{20}$$

相位差

$$\Delta\varphi(x, y) = k(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)x + k(\cos \beta_2 - \cos \beta_1)y + (\varphi_{20} - \varphi_{10})$$

(x, y) 处的强度为

$$I(x, y) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi = (A_1^2 + A_2^2)[1 + \gamma \cos \Delta\varphi(x, y)]$$

由相位差可确定干涉条纹

$$k(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)x + k(\cos \beta_2 - \cos \beta_1)y + (\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \begin{cases} 2j\pi \\ (2j+1)\pi \end{cases}$$

(2.2.17)

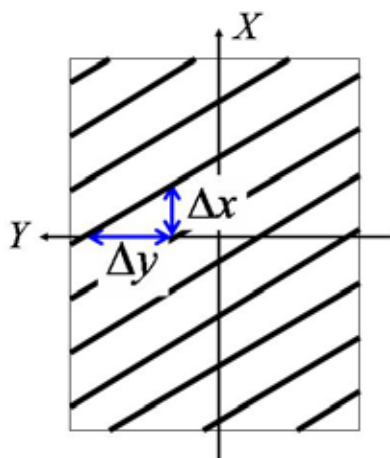
即亮、暗条纹都是等间隔的平行直线，形成平行直线族，斜率为

$$-\frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{\cos \beta_2 - \cos \beta_1} \quad (2.2.18)$$

条纹间隔为

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{2\pi}{k(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)} = \frac{\lambda}{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1} \\ \Delta y = \frac{2\pi}{k(\cos \beta_2 - \cos \beta_1)} = \frac{\lambda}{\cos \beta_2 - \cos \beta_1} \end{cases} \quad (2.2.19)$$

或条纹的空间频率为
$$\begin{cases} f_x = \frac{1}{\Delta x} \\ f_y = \frac{1}{\Delta y} \end{cases} \quad (2.2.20)$$



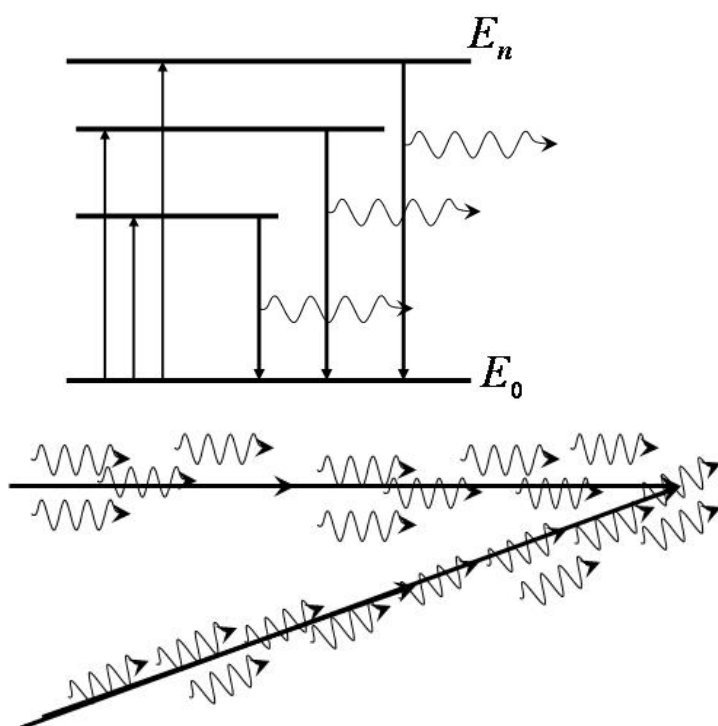
是非定域的。

3.3 相干光的获得

2.3.1 原子发光的特点

原子从较高的能量状态变化（跃迁）到较低的能量状态时，便会有多余的能量，可以以各种形式释放出来。如果两能量之差合适，则以发光的形式释放能量。所以，发光是原子在不同的能量状态之间跃迁的结果。

光学



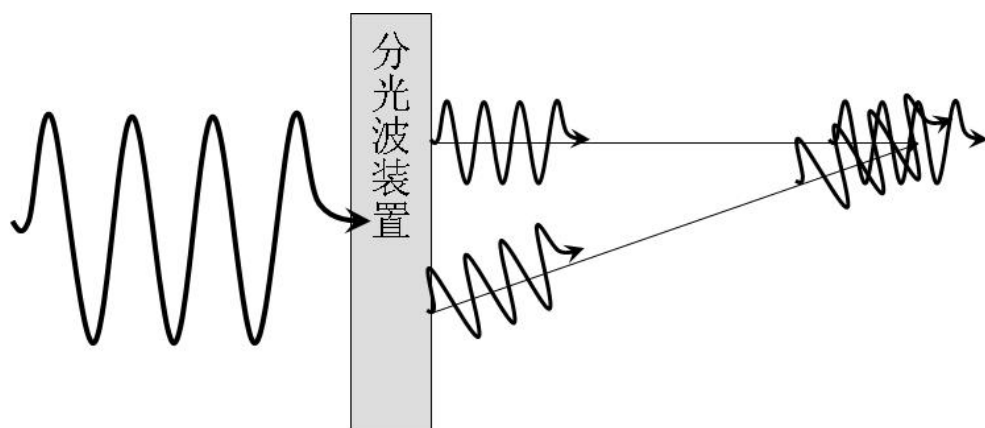
光源中总是包含大量的原子，总是有大量的原子同时发光，不同原子所发的光波，都有随意的传播方向、振动方向、相位和频率。所以，不同原子在同一时刻所发出的光波是不相干的；同一原子在不同时刻所发出的光波也是不相干的。即普通光源所发的光都是不相干的。所以，在通常情况下看不到光的干涉。即普通光源所发的光在相遇时总是强度相加，不会产生干涉，出现光强的重新分布。

2.3.2 相干光的获得

对于普通的光源，要想得到相干光，只有一种方法，就是设法将同一个原子在同一时刻所发出的一系列光波分为几部分，这几部分光波由于来自同一列光波，所以具有相同的频率、固定的相位差，而且存在相互平行的振动分量，就是相干的。这就是干涉的物理本质。所以，也可以说，干涉是一列光波自己和自己的干涉，也只有自己和自己之间才有可能发生干涉。

光源所发出的大量光波，其中的每一列都与自己干涉，形成一个干涉花样，有一个光强分布；不同的光波之间，则是各自干涉后所形成的干涉花样的强度叠加。

第二章 光的相干叠加



可以用数学表达式表示如下：

在时刻 t ，光源中第 i 个原子跃迁发出的波记为 U_i ，该列波经分光装置后分为两部分，这两部分是相干的。这两部分到达场点 P 时振幅为 A_{i1} 、 A_{i2} ，相位差为 $\Delta\varphi_i$ ，该原子发出的波在 P 点的干涉强度为

$$I_i = A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + 2A_{i1}A_{i2} \cos \Delta\varphi_i$$

对于点光源和相同的干涉装置，所有原子发出的光波的 $\Delta\varphi_i$ 是相同的。所有原子在 t 时刻发出的波在 P 点形成的总的干涉强度为

$$I = \sum_{i=1}^N I_i = \sum_{i=1}^N A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + 2A_{i1}A_{i2} \cos \Delta\varphi_i \quad (2.3.1)$$

可以通过分波前或分振幅的方法得到相干光。

2.3.3 杨氏干涉

一列光波经过双缝或双孔，分成相干的两列光波，两列相干光在空间 P 处相遇，相位差为 $\Delta\varphi$ 产生干涉。

第二列光波分成的两列相干光，在 P 处的相位差与第一列光波相同，亦为 $\Delta\varphi$ ，产生与第一列相同的干涉强度分布，与第一列所产生的干涉，进行强度叠加。依此类推，得到一个干涉花样。

其物理过程为：第一步是相干叠加，第二步是强度叠加（非相干）。

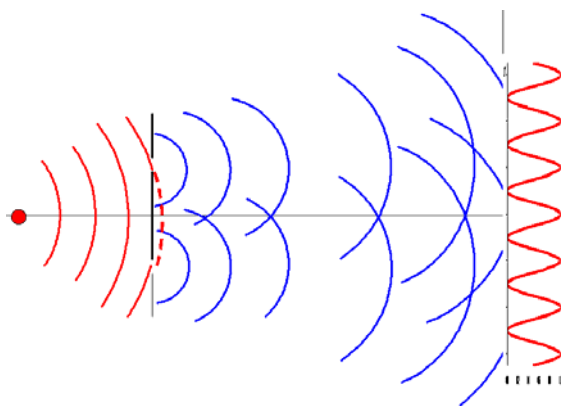
光源发出的任一系列光波，经过双缝或双孔，分成相干的两列，在空间相遇，

光学

产生干涉。

光源发出的不同光波波列是不相干的，各自干涉后，相互之间只能进行强度叠加。

上述物理过程为：第一步是同一列波的相干叠加；第二步是不同波列间的强度叠加（非相干）。



2.3.4 干涉的特点

干涉是一列一列分立的光波之间的相干叠加

干涉是一列光波自己和自己的干涉

干涉的结果，使得光的能量在空间重新分布，形成一系列明暗交错的干涉条纹

干涉之后的光波场仍然是定态波场

2.4 惠更斯—菲涅耳原理

2.4.1 次波模型

一．光的衍射现象

波绕过障碍物继续传播，也称绕射。

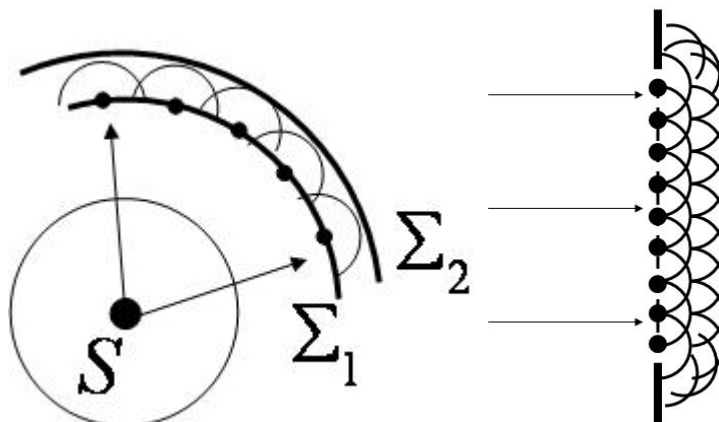
二．次波

光波在空间传播，是振动的传播，波在空间各处都引起振动，波场中任一点，即一个波前 Σ_1 上的任一点都可视为新的振动中心，称之为次波中心；这些次波中心发出的光波，称为次波。

次波又可以产生新的振动中心，继续发出次波，由此使得光波不断地向前传

播。新的波面 Σ_2 即是这些次波中心所发出的所有次波波面的包络面。

用次波的模型可以很容易解释光的衍射现象。衍生出的次波中心所发出的次波将会在空间不断地扩展，于是振动就延伸到了被障碍物遮挡的区域，即产生所谓的“绕射”现象。



从对物理学名次准确把握的角度出发，将上述现象和过程称作“衍射”更加准确，因为其物理上的原因是由于“衍生”出了新的次波中心、不断发出次波，才使得波在空间弥散开来。

波前上任一点都是一个次波中心，即一个点光源，发出球面次波，按照这一模型，即使是平行光束，也将由于衍射而逐渐扩展。所以，从波动的观点看，是没有“光线”或“光束”之类的概念的。

2.4.2 次波的相干叠加——惠更斯—菲涅耳原理

1. 次波引起的振动

波场中的一个波前 Σ ，发出的次波将在波场中某一点 P 引起振动，设 Σ 上的次波中心的复振幅为 $\tilde{U}_0(Q)$ ， P 点的复振幅记为 $\tilde{U}(P)$ 。在 Q 周围取一个面元

$d\Sigma$ ，这一面元上的次波在 P 点引起的复振幅为 $d\tilde{U}(P)$ ，则存在以下关系

$$d\tilde{U}(P) \propto \tilde{U}_0(Q), \quad \tilde{U}_0(Q) \text{ 为 } Q \text{ 点的复振幅，称为瞳函数；}$$

$$d\tilde{U}(P) \propto \frac{e^{ikr}}{r}, \quad Q \text{ 点为点光源，发出球面次波；}$$

$$d\tilde{U}(P) \propto d\Sigma, \quad d\Sigma \text{ 为次波中心面元的面积；}$$

设实际的光源，即振动中心在 S 点，则 P 点的复振幅还面元 $d\Sigma$ 的方向有关，

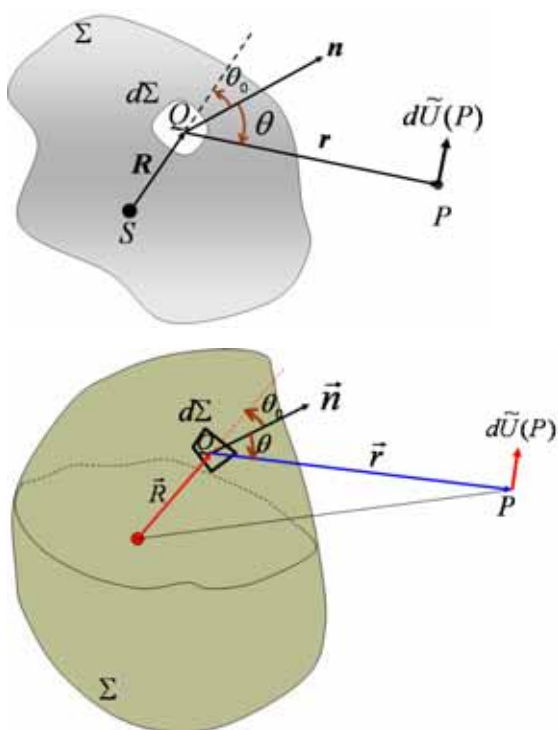
如图所示。可以用函数关系表示为

$$d\tilde{U}(P) \propto F(\theta_0, \theta)$$

θ_0 、 θ 分别是源点 S 和场点 P 相对于次波面元 $d\Sigma$ 的方位角。

θ_0 : 面元法线与 S 、 Q 连线间的夹角, θ : 面元法线与 Q 、 P 连线间的夹角,

$F(\theta_0, \theta)$ 称为倾斜因子。



综合考虑上述所有因素，可以得到一个总的表达式

$$d\tilde{U}(P) = KF(\theta_0, \theta) \tilde{U}_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \quad (2.4.1)$$

K 为比例常数。这就是一个微分面元发出的次波所引起的元振幅。

2. 次波的相干叠加

将波前 Σ 上所有次波中心发出的次波在 P 点的振动相干叠加，即可以得到该波前发出的次波传播到 P 点时所引起的合振动，即

$$\tilde{U}(P) = K \sum_{\Sigma} \tilde{U}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \quad (2.4.2)$$

这就是**惠更斯—菲涅耳原理**。由于次波中心在波前上连续分布的，上述求和应当用积分计算。

3. 菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式

如果取一个封闭的空间曲面 Σ ，即一个封闭的波前，由于从光源发出的所有方向的波都将通过此波前，而且只通过此波前一次，所以光源在任一场点 P 所引起的复振幅与该波前所发出的全部次波在该点所引起的复振幅等价。由于波前是一连续分布的曲面，所有次波中心发出的次波在 P 点的复振幅就是以下曲面积分

$$\tilde{U}(P) = K \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \tilde{U}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \quad (2.4.3)$$

即

$$\begin{aligned} & \tilde{U}(x, y) \\ &= K \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \tilde{U}_0(x', y') F(\theta_0, \theta) \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' \quad (2.4.4) \end{aligned}$$

此即为**Fresnel (菲涅耳) 衍射积分公式**。

经过 Kirchhoff (基尔霍夫, 1882 年) 严格的数学论证, Fresnel 根据直观所建立的积分公式基本上是正确的。需要修正的只是, 波前可以为任意形状的封闭曲面, 而且导出了积分公式中的比例常数和倾斜因子的表达式, 其中

$$K = -\frac{i}{\lambda} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\lambda} \quad (2.4.5)$$

$$F(\theta_0, \theta) = \frac{1}{2}(\cos \theta_0 + \cos \theta) \quad (2.4.6)$$

比例常数中的相位因子不为 0, 而是有一个 $\pi/2$ 的相位超前, 说明等效次波源的相位不等于波前上 Q 点扰动的相位。而倾斜因子的表达式说明向后倒退的次

波也对 P 点的复振幅产生作用, 只有在波前取为球面的情况下, $\theta_0 = 0$,

$$F(\theta_0, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \text{ 此时 } \theta = \pi, \text{ 才有 } F(\theta_0, \theta) = 0.$$

将上述表达式 (2.4.5) (2.4.6) 代入 (2.4.3)

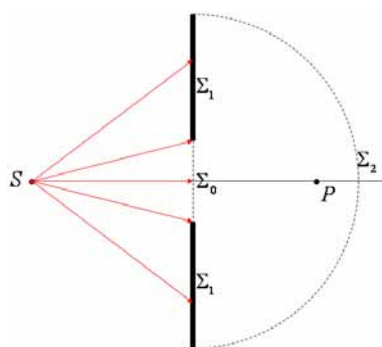
$$F(\theta_0, \theta) \tilde{U}(P) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\lambda} \iint_{\Sigma} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \quad (2.4.7)$$

经过 Kirchhoff 修正的上述积分公式被称作 **Fresnel-Kirchhoff 衍射积分公式**。处理光的衍射问题，都可以归结为求解 Fresnel-Kirchhoff 衍射积分公式。

当波场中有障碍物，即有衍射屏时，可以自然地将波前取在衍射屏的位置，此时封闭的空间曲面由三部分构成，如图所示：衍射屏上的透光部分 Σ_0 ，不透光的光屏部分 Σ_1 ，以及在空间扩展的半个曲面 Σ_2 。可以忽略 Σ_0 与 Σ_1 的相互影响，

认为在透光部分的瞳函数 $\tilde{U}_0(Q)$ 取作自由传播时的数值，而不透光部分的瞳函数

$\tilde{U}_0(Q)$ 自然等于 0。相对于光的波长，衍射屏的不透光部分也可以认为是无限大的，所以第三部分可以取一个半径无穷大的半球面，经过严格的数学证明，积分公式在该球面上的积分值等于 0，不必考虑。则在求解 Fresnel-Kirchhoff 衍射积分公式时，只需要对衍射屏的光孔部分作积分就可以了，即将曲面积分的范围局限于光孔 Σ_0 即可。这种做法，称作 **Kirchhoff 边界条件**。



积分公式可以化为

$$\tilde{U}(P) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2\lambda} \iint_{\Sigma_0} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \tilde{U}_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \quad (2.4.8)$$

在特定的实验条件下，应用近轴条件和远场条件，积分公式可以得到简化，并给出很好的结果。

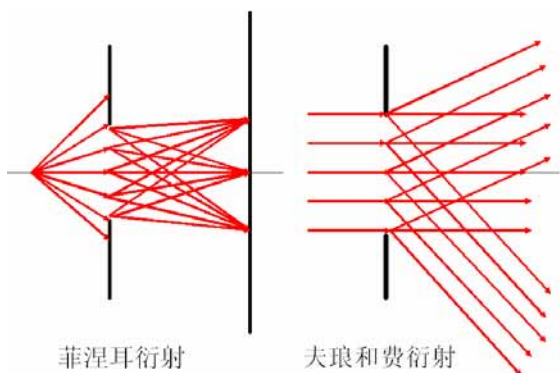
4. 衍射的分类

根据衍射障碍物（衍射屏）到光源和接收屏的距离，可以将衍射分类，并采用不同的方法进行处理。

第二章 光的相干叠加

距离有限的，或至少一个是有限的，为**菲涅耳（Fresnel）衍射**。此时，波前通常为球面，在接收屏上的任一点，是来自不同方向的次波进行相干叠加。

距离无限的，即平行光入射、出射，为**夫琅和费（Fraunhofer）衍射**。此时波前为平面，相互平行的光在无穷远处相干叠加。事实上，在衍射屏后置一凸透镜，而将接收屏置于透镜的厢房焦平面处，相互平行的光经过透镜后会聚在接收屏上，进行相干叠加。



求解衍射问题，就变成了解上述积分公式的问题。但是，由于积分计算的复杂性，在大多数情况下，上述积分是无法严格求解的，所以，总是在一定条件下将菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式简化为可以求解的形式。

2.5 菲涅耳（Fresnel）衍射（圆孔、圆屏）

2.5.1 衍射现象

圆孔衍射：屏上可见同心圆环。孔径改变，圆环中心明暗迅速交替变化；屏沿轴向移动，圆环中心明暗缓慢交替变化。

圆屏衍射：屏上可见同心圆环。屏直径改变，或屏沿轴向移动，圆环中心永远是亮点。

2.5.2 用半波带法分析菲涅耳圆孔衍射

1. Fresnel 半波带

设法将菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式（2.4.8）经过近似化为求和。

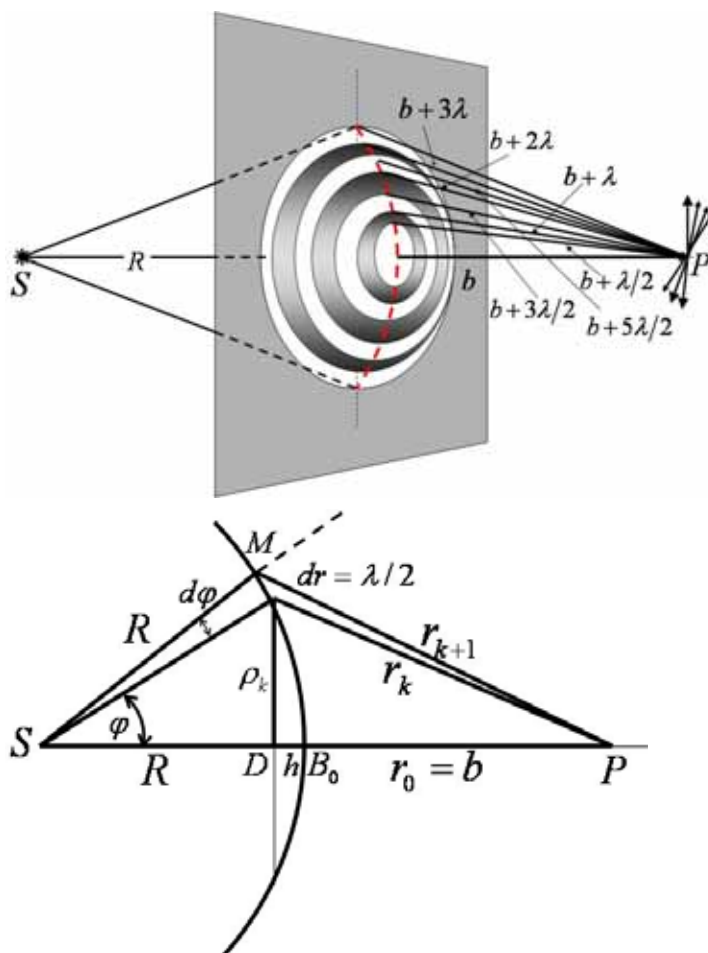
将波前（球面）划分为一系列的同心圆环带，每一带的中心到 P 点的距离依次相差半个波长。这些圆环带称为半波带。

由于相邻半波带到 P 点的距离相差半个波长，所以半波带实际上是非常细的圆环，因而，可以近似认为每一个半波带上所有的点在 P 点的复振幅都相同。

在球面上，各次波波源的初相位相等。相邻半波带发出的次波，到达 P 点时，光程差为半个波长，相位差为 π ，相位相反，振动方向相反，相互抵消。

光学

下面计算各个半波带的面积 S_k 。



球冠面积

$$S = 2\pi Rh = 2\pi R^2 (1 - \cos \varphi) , \text{ 则}$$

$$dS = 2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi \quad (2.4.9)$$

对于 $\triangle SMP$ ，利用余弦公式

$$\cos \varphi = \frac{R^2 + (R + r_0)^2 - r_k^2}{2R(R + r_0)} , \text{ 则}$$

$$\sin \varphi d\varphi = \frac{r_k}{R(R + r_0)} dr_k \quad (2.4.10)$$

将(2.4.9)和(2.4.10)结合，得到

$$dS = 2\pi R^2 \frac{r_k}{R(R+r_0)} dr_k$$

按照半波带的定义，当 $dr_k = \lambda/2$ 时， $dS = S_k$ ，上式变为

$$\frac{S_k}{r_k} = \frac{\pi R}{R+r_0} \lambda \quad (2.4.11)$$

2. 衍射积分公式求解

衍射积分公式

$$\tilde{U}(P) = K \iint_{\Sigma_0} \tilde{U}(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

$$(\text{共 } n \text{ 个半波带, 球面波 } \theta_0 = 0) = K \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{U}(\tilde{Q}) F(\theta_k) e^{ik(r_0 + k\frac{\lambda}{2})} \frac{S_k}{r_k}$$

$$(\text{瞳函数 } \tilde{U}_0(Q) \text{ 为常数}) = K \tilde{U} \frac{\pi R \lambda}{R+r_0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\theta_k) e^{i(\varphi_0 + k\pi)}$$

$$= K \tilde{U} e^{i\varphi_0} \frac{\pi R \lambda}{R+r_0} \sum_{k=1}^n F(\theta_k) e^{i(k-1)\pi}$$

$$= K \tilde{U} e^{i\varphi_0} \frac{\pi R \lambda}{R+r_0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (1 + \cos \theta_k) (-1)^{k-1} = \tilde{A} \sum_{k=1}^n (1 + \cos \theta_k) (-1)^{k-1}$$

(2.4.12)

$$\text{其中 } \tilde{A} = \frac{1}{2} K \tilde{U} e^{i\varphi_0} \frac{\pi R \lambda}{R+r_0} \text{ 则 } \tilde{U}_k = \tilde{A} (1 + \cos \theta_k) (-1)^{k-1} \text{ 为第 } k \text{ 个半波带}$$

发出的次波在 P 点的复振幅。其振幅为 $A_k = A(1 + \cos \theta_k)$ ，相位因子为 $(-1)^{k-1}$ 。

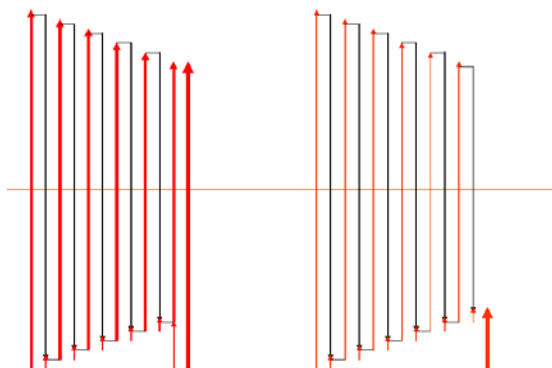
可见，相邻波带次波的相位相反，且 k 越大的波带，振幅越小。于是总的复振幅可表示为

$$\tilde{U}(P) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \tilde{U}_k$$

光学

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} A_1 + \left(\frac{1}{2} A_1 - A_2 + \frac{1}{2} A_3 \right) + \left(\frac{1}{2} A_3 - A_4 + \frac{1}{2} A_5 \right) + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2} A_n \\
 &= \frac{1}{2} [A_1 + (-1)^{n-1} A_n] \quad (2.4.13)
 \end{aligned}$$

3. 衍射现象的解释解释：



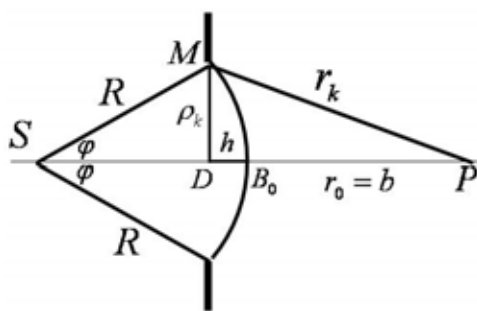
圆孔衍射，半波带数 n 为奇数， $\tilde{U}(P) = \frac{1}{2} [A_1 + A_n]$ ，亮点；

半波带数 n 为偶数， $\tilde{U}(P) = \frac{1}{2} [A_1 - A_n]$ ，暗点；

自由传播，相当于 $n \rightarrow \infty$ ，而 $A_n \rightarrow 0$ ，所以 $A(P) = \frac{1}{2} A_1$ ，始终亮点；

圆屏衍射，前 n 个半波带被遮住， $\tilde{U}(P) = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k = \frac{1}{2} A_{n+1}$ ，总是亮点。

4. 半波带方程



$$r_k^2 - r_0^2 = \left(r_0 + k \frac{\lambda}{2} \right)^2 - r_0^2 = k r_0 \lambda + \left(\frac{k}{2} \lambda \right)^2 \approx k \lambda r_0 \quad (2.4.14)$$

如图，在 $\triangle MDP$ 中

$$\rho_k^2 = r_k^2 - (r_0 + h)^2 = r_k^2 - r_0^2 - 2r_0 h - h^2 \quad (2.4.15)$$

在 $\triangle MDS$ 中

$$\rho_k^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2 \quad (2.4.16)$$

由 (2.4.15), (2.4.16) 可得

$$r_k^2 - r_0^2 - 2r_0h - h^2 = 2Rh - h^2$$

求出 h 的表达式，并利用 (2.4.14)，得到

$$h = \frac{r_k^2 - r_0^2}{2(R + r_0)} = \frac{kr_0}{2(R + r_0)} \lambda \quad (2.4.17)$$

利用 (2.4.14) 式的结果，并考虑到 $h \ll r_0$ ，(2.4.15) 式可以进一步化为

$$\rho_k^2 = k\lambda r_0 - 2r_0h - h^2 \approx k\lambda r_0 - 2r_0h \quad (2.4.18)$$

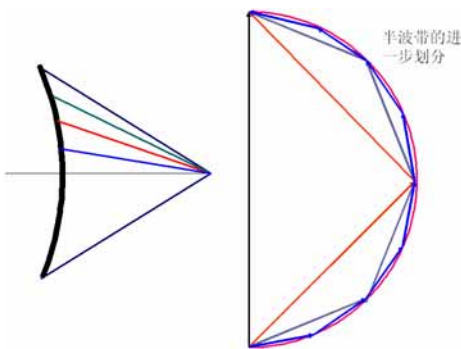
将 (2.4.17) 代入上 (2.4.18) 式，

$$\rho_k^2 = k\lambda r_0 - \frac{k\lambda r_0^2}{R + r_0} = \frac{kr_0 R}{R + r_0} \lambda, \text{ 整理后，得到}$$

$$k = \frac{\rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R} \right) \quad (2.4.19)$$

(2.4.19) 称为半波带方程， k 的奇偶性由 r_0 决定。

5. 一般情形下的波带



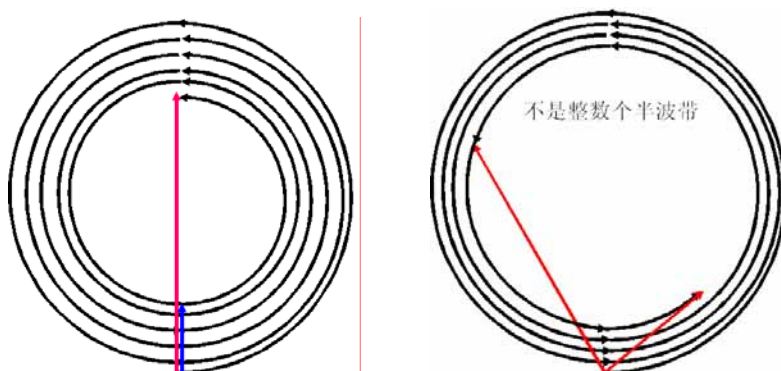
尽管每个半波带都很细，但是，上面的点到场点的光程差可以达到半个波长，所以，在有些情况下，可以将其进一步细分。

如果进一步将每个半波带划分为两个，则相邻波带发出的次波在 P 点相位差为 $\pi/2$ ，对应的复振幅矢量合成为一个半波带的振幅矢量。再将每一个进一步细

光学

分，新得到的两半波带的振幅矢量的相位差为 $\pi/4$ ，.....。

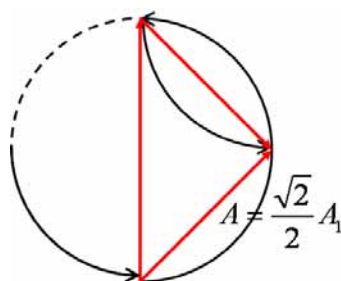
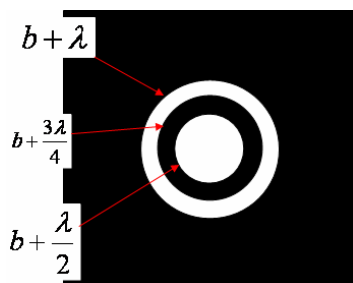
可以将任何一个半波带进一步细分为 n 个，得到更多的波带，相邻波带间的光程差为 $\lambda/2n$ ，相位差为 π/n 。 n 很大时，相位差很小，用振幅矢量法，原来的每个半波带的复振幅波矢由一条直线变为由 n 个小波矢组成的半圆。如图所示。严格地说，由于 k 大的波带的光程要大、同时倾斜因子要小，所以这些半圆不是严格的半圆弧，而是由曲率半径逐渐减小的弧线构成的一段螺旋线。



如果圆孔不能分成完整数目的半波带，则最后一个波带所对应的振幅矢量将不是一个完整的半圆弧，此时，整个振幅矢量将是倾斜的，如图所示。

半波带的一些例题

(1)



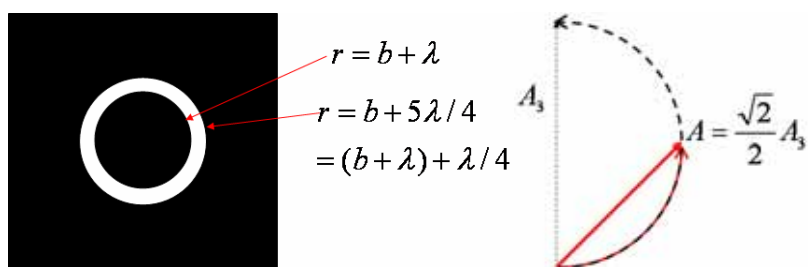
只露出第一个半波带和第二个半波带的外半圈。用矢量方法，第二半波带的

后一半为 $1/4$ 圆弧，合成结果如下： $I = (\frac{\sqrt{2}}{2} A_1)^2 = \frac{1}{2} A_1^2 = 2I_0$ ，其中

$$I_0 = (\frac{1}{2} A_1)^2 = \frac{1}{4} A_1^2$$

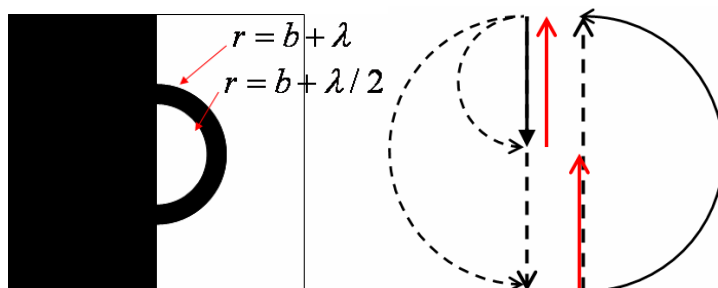
(2)

第二章 光的相干叠加



仅第三半波带的前一半开放。 $A = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3$, $I = (\frac{\sqrt{2}}{2} A_3)^2 = \frac{1}{2} A_1^2 = 2I_0$

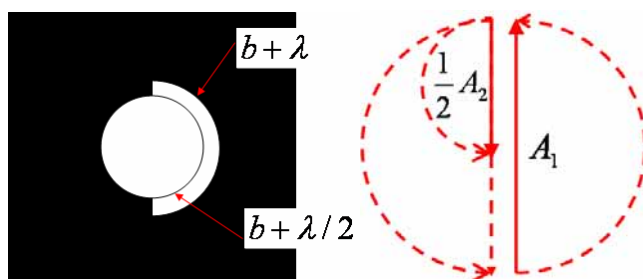
(3)



如果沿角度方向对称地遮住衍射屏的一半，振幅变为原来一半。原因是由于面积的减小，每一个小波带的次波的振幅都变为原来的一半，故合成后的半圆的大小为原来的一半。

$$A = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2 = A_1 , I = A_1^2 = 4I_0$$

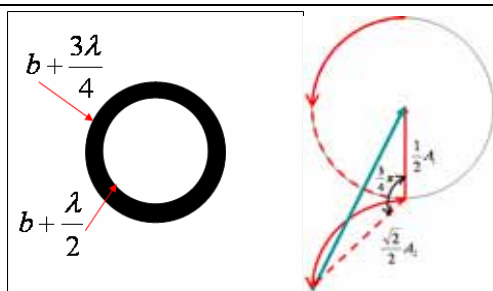
(4)



$$A = A_1 - \frac{1}{2} A_2 = \frac{1}{2} A_1 , I = A^2 = I_0$$

(5)

光学

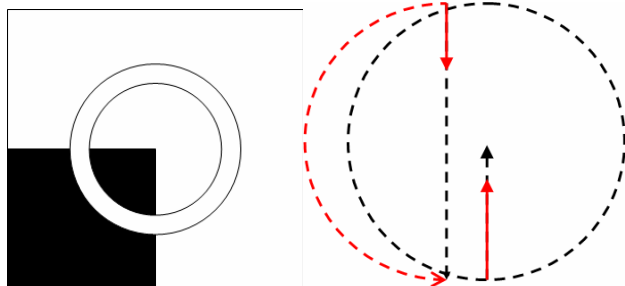


第二半波带的前半部分关闭，其余全部开放，等于自由传播的矢量减去第二半波带矢量的前半半。

$$A^2 = \left(\frac{1}{2}A_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}A_2\right)^2 - 2\frac{1}{2}A_1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}A_2 \cos \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}A_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}A_1^2$$

$$= \frac{5}{4}A_1^2 = 5I_0$$

(6)



挡住整个衍射屏的四分之三，而第二半波带全开，自由传播总振幅矢量的 3/4，再加上第二半波带总矢量的 1/4。

$$A = \frac{3}{4} \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{4} A_2 = \frac{1}{4} A_1, \quad I = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} A_1^2\right) = \frac{1}{8} I_0$$

5. Fresnel 半波带的应用——波带片

用半波带将波面分割，然后只让其中的奇数（或偶数）半波带透光，即可以制成波带片。透过波带片的光，在场点相位相同，振动方向相同，和振动的振幅大大增强。

一般情况下，可以认为前面几个半波带的倾斜因子相差不大，即满足近轴条件，所以它们发出的次波的振幅近似相等。如果波带片共有 20 个半波带，则在 P 点的复振幅为

$$\tilde{U}(P) = A_1 + A_3 + A_5 + \cdots + A_{19} \approx 10A_1$$

第二章 光的相干叠加

P 点光强 $I(P) = 100A_1^2$

而自由传播时 $\tilde{U}_0(P) = \frac{1}{2}A_1$ ，光强 $I_0(P) = \frac{1}{4}A_1^2$

两者相差 400 倍。可见波带片具有使光汇聚的作用。

可以将半波带方程 (2.4.19) 写成如下形式

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} = \frac{k\lambda}{\rho_k^2} \quad (2.4.20)$$

同透镜的 Gauss 公式 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ 比较，形式上相同，因而波带片的焦距为

$$f = \frac{\rho_k^2}{k\lambda} \quad (2.4.21)$$

对平行入射光而言，由于 $R = \infty$ ，波带片为平面的。

从式 (2.4.21) 看出，任何一个波带片，通常都只适用于一个波长，其焦距是固定的。但其实并非如此，见下例。

例．一菲涅耳波带片对 $900.0nm$ 的红外光的主焦距为 $30cm$ ，改用 $632.8nm$ 的氦氖激光照明，主焦距变为多少？

解：由于波带片不变，各个半波带的半径和序号都不改变，因而

$$f\lambda = \frac{\rho_k^2}{k} \text{ 不变，即 } f_1\lambda_1 = f_2\lambda_2。$$

$$\text{所以 } f_1 = f_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 80 \frac{9000}{6328} = 113cm$$

一个 Fresnel 波带片，除主焦点之外，还有许多次焦点。可以证明如下：

平行光入射， $R = \infty$ ，有 $k = \frac{\rho_k^2}{\lambda} \frac{1}{r_0}$ ，即在距离 r_0 处，半径为 ρ_k 的带是第 k

个半波带。

当波带片不变时， r_0 改变，会引起 k 的改变，即可划分的半波带数目改变。

r_0 减小，到 $r_0/2$ 时， $k=2k$ ，原来的每一个半波带都变成了两个，次波相互抵消，因而该点为暗点；

光学

r_0 减小，到 $r_0/3$ 时， $k=3k$ ，原来的每一个半波带都变成了三个，其中两个的次波相互抵消后，还余下一个半波带，因而该点为亮点。但是半波带的面积只有约原来的 $1/3$ ，所以亮度比主焦点要暗一些，因此称作次焦点；

r_0 减小，到 $r_0/4$ 时， $k=4k$ ，暗点；

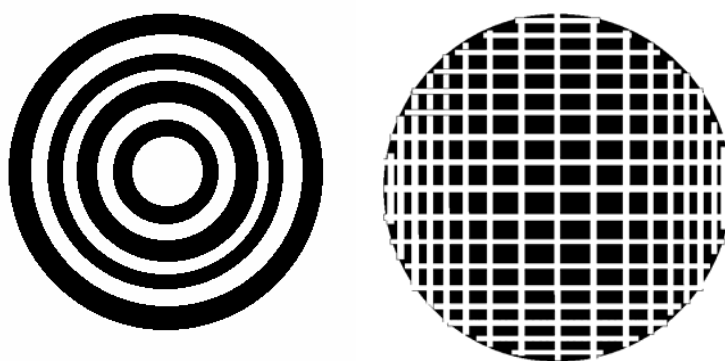
.....

所以有一系列次焦点，相应的焦距可以表示为

$$f' = \frac{f}{3}, \frac{f}{5}, \dots, \frac{f}{2m+1} \dots m=1, 2, 3, \dots \quad (2.4.22)$$

当 $m=0$ 时，为主焦点的焦距。

除了圆环形的波带片之外，还有其它形式的波带片。如图所示。



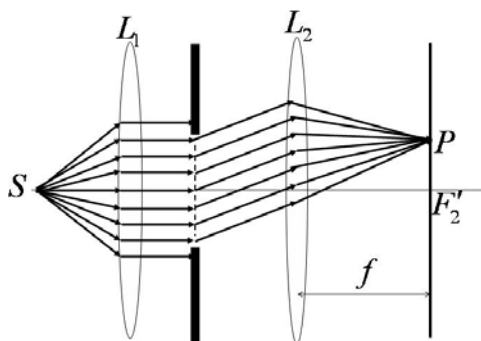
2.6 夫琅和费单缝和矩孔衍射

2.6.1 衍射装置

衍射屏上有一单狭缝，宽度为 a ，该狭缝也称作衍射孔径；平行光入射；在衍射屏之后，置一凸透镜 L_2 ，接收屏处于透镜的像方焦平面，如图所示。对于透

镜 L_2 而言，只有相互平行的光才能汇聚到其焦平面上的同一点，所以，在接受屏上得到的是从单缝出射的相互平行的次波相干叠加的结果。

衍射屏除了可以做成这种透射式的之外，还可以做成反射式的。即衍射屏上只有一条窄的反射面，其余部分不反射。这用反射式衍射屏的原理和分析方法与透射式的衍射屏完全相同。



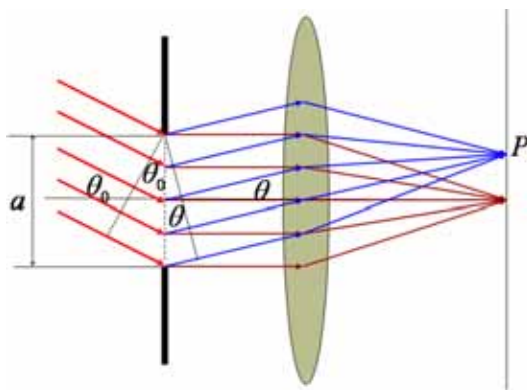
2.6.2 单缝衍射强度分布

求解接收屏上的衍射强度分布，应该先通过求解衍射积分公式，得到屏上的复振幅分布，然后再计算光强分布。然而，由于严格计算积分非常复杂，所以要在一定的条件下采取近似。

由于衍射孔径，即单缝是比较小的，因而可以认为衍射光是满足近轴条件的。

求解 Fraunhofer 衍射通常可以采用振幅矢量法和数值积分法，前者简单直观，适用于处理形状较为简单的衍射屏，后者则可以处理形状较复杂的衍射屏。下面分别介绍。

1、用振幅矢量方法求解

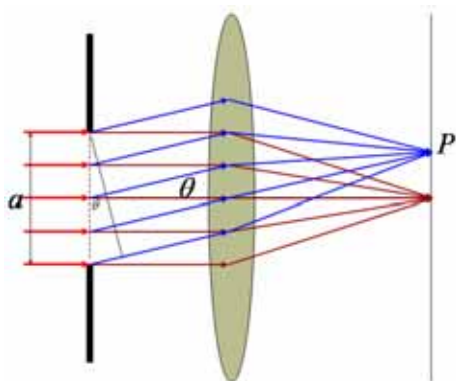


设入射光沿 θ_0 方向；对于衍射光，沿 θ 方向的次波，汇聚到 P 点。过狭缝上端 A 做一个与 θ 方向衍射光垂直的平面，则；平面与 P 点间的光程是相等的。则从狭缝上下端两个次波中心发出的次波光程差和相位差分别为

$$\Delta L = a(\sin \theta \pm \sin \theta_0), \quad \Delta \Phi = ka(\sin \theta \pm \sin \theta_0),$$

上式中，入射光和衍射光位于光轴的同一侧时，取“+”；否则取“-”。

光学



若将狭缝均分为 N 个平行的部分，则相邻两部分的光程差和相位差分别为

$$\delta = \frac{\Delta L}{N} = \frac{a(\sin \theta \pm \sin \theta_0)}{N}, \quad \Delta \varphi = \frac{\Delta \Phi}{N} = \frac{ka(\sin \theta \pm \sin \theta_0)}{N}$$

如果 $\theta = \theta_0$ ，则 $\Delta \varphi = 0$ ，各个次波的波矢相互平行，合振动矢量的振幅为记为 A_0 。

$\theta \neq \theta_0$ ，满足近轴条件时，忽略倾斜因子的影响，即不同方向的次波波矢大小相等。各个部分发出的次波波矢相等具有相等的振幅，相邻波矢间夹角为 $\Delta \varphi$ ，这 N 个矢量首尾相接，而且一个矢量相对于前一个矢量转过 $\Delta \varphi$ 的角度，构成了半径为 R 的圆上的一段折线，就是该圆的 N 段弦，每一段弦所张的圆心角为 $\Delta \varphi$ ，这 N 段弦所张的总圆心角为 $N\Delta \varphi = \Delta \Phi$ ，合矢量为 A_θ ，其振幅为记为 A_θ 。

$N \rightarrow \infty$ ，上述折线渐变一段圆弧的，圆弧的长度就是各段弦的长度之和，为 A_0 。合矢量为弦 A_θ ，圆心角为 $\Delta \Phi$ 。

$$R = \frac{A_0}{\Delta \Phi}$$

$$A_\theta = 2R \sin(\Delta \Phi / 2), \text{ 即}$$

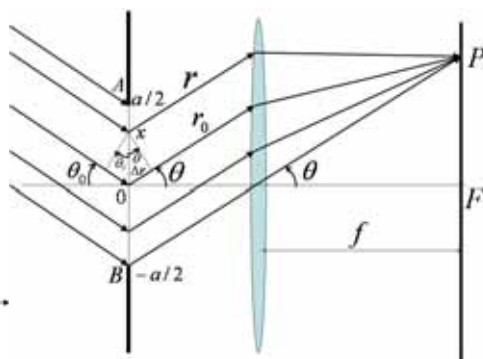
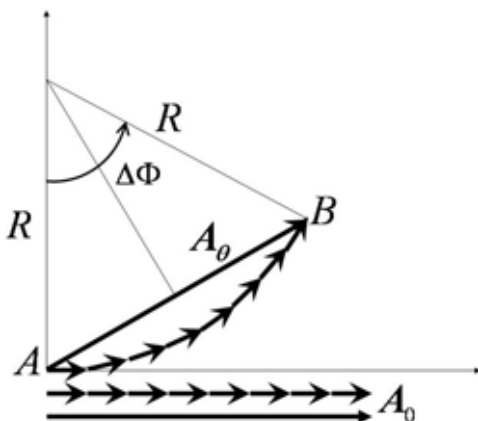
第二章 光的相干叠加

$$A_{\theta} = A_0 \frac{\sin \frac{\Delta\Phi}{2}}{\frac{\Delta\Phi}{2}}$$

$$A_{\theta} = A_0 \frac{\sin \frac{ka(\sin \theta - \sin \theta_0)}{2}}{\frac{ka(\sin \theta - \sin \theta_0)}{2}} = A_0 \frac{\sin \frac{\pi a(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\lambda}}{\frac{\pi a(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\lambda}} = A_0 \frac{\sin u}{u},$$

其中 $u = \frac{\pi a(\sin \theta - \sin \theta_0)}{\lambda}$

A_0 为次波在焦点处合振动的振幅



2、用积分方法求解

P 点光来自同一方向，倾斜因子相同满足近轴条件，倾斜因子为常数 1，即所

有 $F(\theta_0, \theta) \equiv 1$ 。

则上式化为

$$\tilde{U}(P) = K \iint_{\Sigma} \tilde{U}_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma = K_0 \int_{-a/2}^{a/2} \frac{e^{ikr}}{r} dx, \text{ 记 } K_0 = K \tilde{U}_0(Q)$$

$$r = r_0 + \Delta r, \quad \Delta r = -x(\sin \theta + \sin \theta_0)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(P) &= K_0 e^{ikr_0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{r_0} e^{-ikx(\sin\theta + \sin\theta_0)} dx \\
&= K_0 \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} \frac{i}{-ik(\sin\theta + \sin\theta_0)} [e^{-ik\frac{a}{2}(\sin\theta + \sin\theta_0)} - e^{ik\frac{a}{2}(\sin\theta + \sin\theta_0)}] \\
&= K_0 \frac{1}{f} e^{ikr_0} \frac{-2i \sin[\frac{ka}{2}(\sin\theta + \sin\theta_0)]}{-ik(\sin\theta + \sin\theta_0)} \\
&= K\tilde{U}_0(Q) \frac{1}{f} a e^{ikr_0} \frac{\sin[\frac{1}{2}ka(\sin\theta + \sin\theta_0)]}{\frac{1}{2}ka(\sin\theta + \sin\theta_0)} = \tilde{U}_0 \frac{\sin u}{u}
\end{aligned}$$

关于 r_0 的讨论：

r_0 应该是点光源发出的球面波的光程，但是，由于经过透镜后，发散的球面波转化为汇聚的球面波，所以 r_0 的取值在这里变得相当复杂。实际是，由于透镜的孔径比狭缝大得多，所以从狭缝出射的光可以认为全部都被汇聚到接收屏上，那么， r_0 就不必认为是球面波的光程。也就是说在透镜和狭缝之间，不必考虑球面波的振幅随距离的衰减。那么，只需要考虑透镜到接收屏的距离即可。因而， $r_0 = f$ 。

其中， $K\tilde{U}_0(Q) \frac{1}{f} e^{ikr_0}$ 为狭缝上 Q 点附近单位宽度光源发出的沿光轴方向的

次波在光轴上的 F 点（焦点）所引起的复振幅， $\tilde{U}_0 = Ka \frac{1}{f} \tilde{U}_0(Q) e^{ikr_0}$ ，为通过

整个狭缝的、沿光轴方向传播时在光轴上的焦点处所引起的振动，即复振幅。则

$I_0 = \tilde{U}_0 \tilde{U}_0^*$ 为光轴上焦点处的光强。

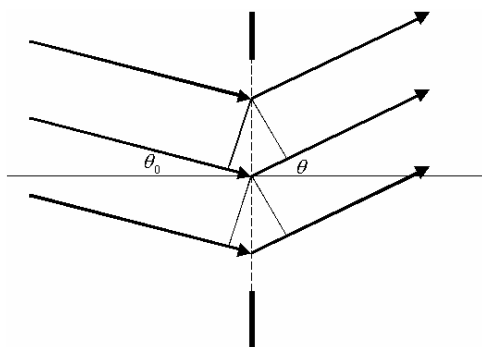
$u = \frac{1}{2}ka(\sin\theta \pm \sin\theta_0) = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta \pm \sin\theta_0)$ ，对于沿光轴方向入射的光，

$\theta_0 = 0$ ， $u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta$ 。 $\tilde{U}_0 \frac{\sin u}{u}$ 为单缝（单元）衍射因子。

第二章 光的相干叠加

强度分布

$$I(P) = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$$



为了后面推导过程的简洁，可以只讨论入射光沿透镜光轴的情形，此时积分的波前即是入射光的波面，总的光程差中就只要计算衍射屏之后的部分即可，即

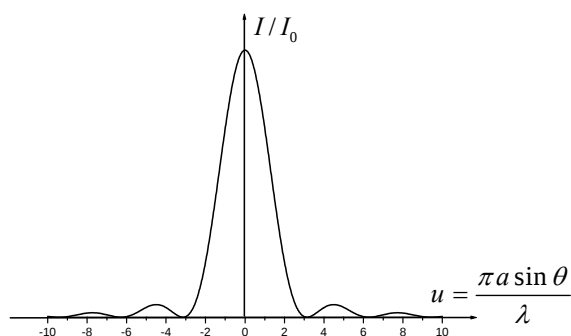
$\Delta r = -x \sin \theta$ ， $u = \frac{1}{2} ka \sin \theta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$ 。如果入射光的倾角为 θ_0 ，则在计入

衍射屏之前的光程差后，有 $\Delta r = \pm x \sin \theta_0 - x \sin \theta = -x(\sin \theta_0 \mp \sin \theta)$ ，

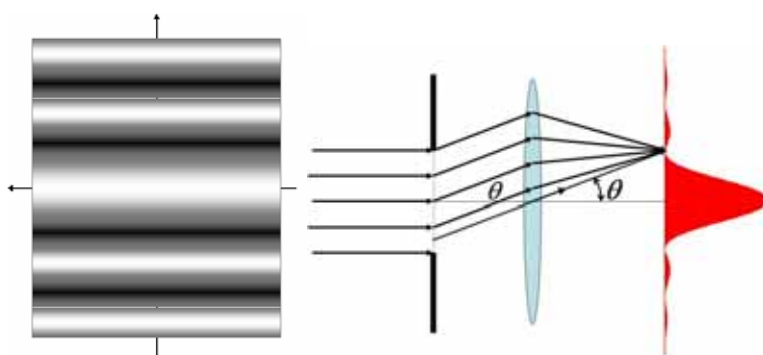
$$u = \frac{1}{2} ka(\sin \theta_0 \pm \sin \theta) = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin \theta_0 \pm \sin \theta)$$

光在法线同侧，取+；异侧，取-。

2.6.3 单缝衍射花样的特点



光学



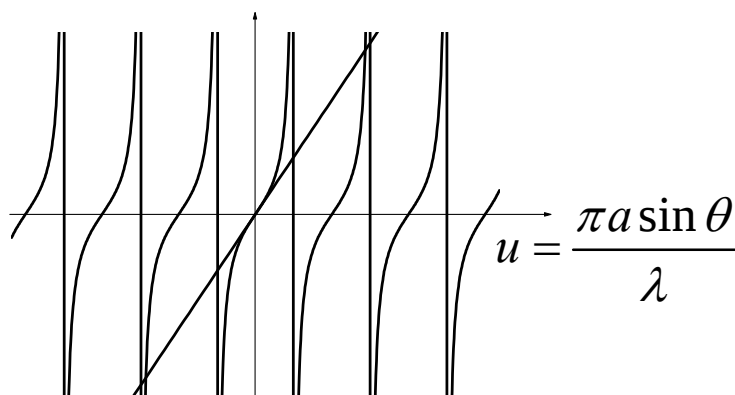
是一系列明暗交错的平行直条纹。

1. 极值点

极大值点按以下方法求得

$$\left(\frac{\sin u}{u}\right)' = 0, \quad \frac{u \cos u - \sin u}{u^2} = 0, \quad \text{即}$$

$$\operatorname{tg} u = u$$



这是一个超越方程，解为

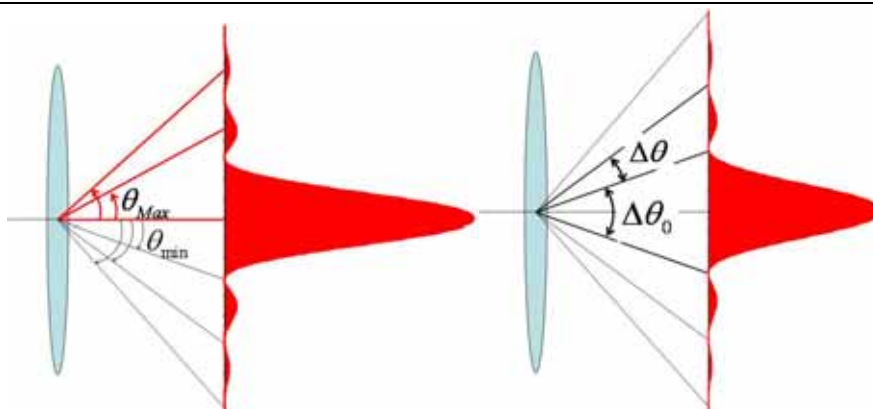
$$\sin \theta = \pm 1.43 \frac{\lambda}{b}, \pm 2.46 \frac{\lambda}{b}, \pm 3.47 \frac{\lambda}{b}, \dots$$

极小值点满足

$$u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = j\pi, \quad \text{同时 } j \neq 0, \quad \text{即}$$

$$\sin \theta = \pm 1 \frac{\lambda}{b}, \pm 2 \frac{\lambda}{b}, \pm \dots, \pm j \frac{\lambda}{b}, \pm (j+1) \frac{\lambda}{b}, \dots$$

第二章 光的相干叠加



2. 亮条纹角宽度（相邻暗条纹之间的角距离）

在近轴条件下， $\sin \theta \approx \theta$ ，因而有

$$\text{零级主极大 } \Delta \theta_0 = 2 \frac{\lambda}{b}$$

$$\text{其它高级次条纹 } \Delta \theta = \frac{\lambda}{b},$$

上述关系称作衍射的反比关系。

3. 衍射屏与透镜的相对位置

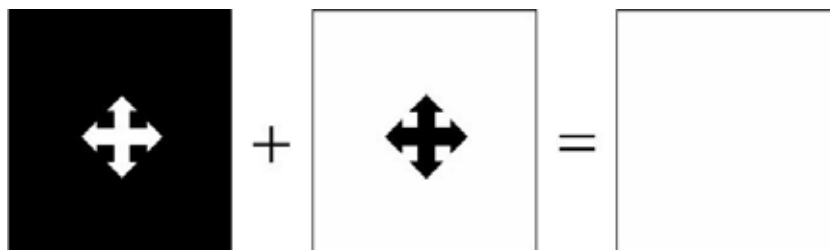
衍射屏上下移动时，衍射花样不变。因为衍射强度分布只与衍射方向有关。

零级主极大对应几何像点，入射光方向改变，衍射花样整体平移。

2.6.4 单缝衍射的应用

1. Babinet 原理

互补屏 $\Sigma_a + \Sigma_b = \Sigma$ ，透光部分相加等于无衍射屏。



$$\tilde{U}_a(P) = K \iint_{\Sigma_a} \tilde{U}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

$$\tilde{U}_b(P) = K \iint_{\Sigma_b} \tilde{U}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

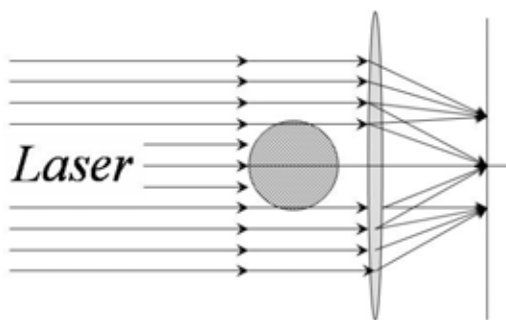
光学

$$\begin{aligned}\tilde{U}_a(P) + \tilde{U}_b(P) &= K \iint_{\Sigma_a} \tilde{U}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma + \iint_{\Sigma_b} \tilde{U}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \\ &= K \iint_{\Sigma_a + \Sigma_b} \tilde{U}_0(Q) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma = \tilde{U}_0(P), \text{ 自由传播。}\end{aligned}$$

平行光入射到互补屏时，按几何光学原理成象，除象点之外，处处振动为零。

$$\text{则 } \tilde{U}_a(P) = -\tilde{U}_b(P), \quad I_a(P) = I_b(P)$$

即细丝与狭缝的衍射花样，除零级中央主极大外，处处相同。激光测径仪的原理。



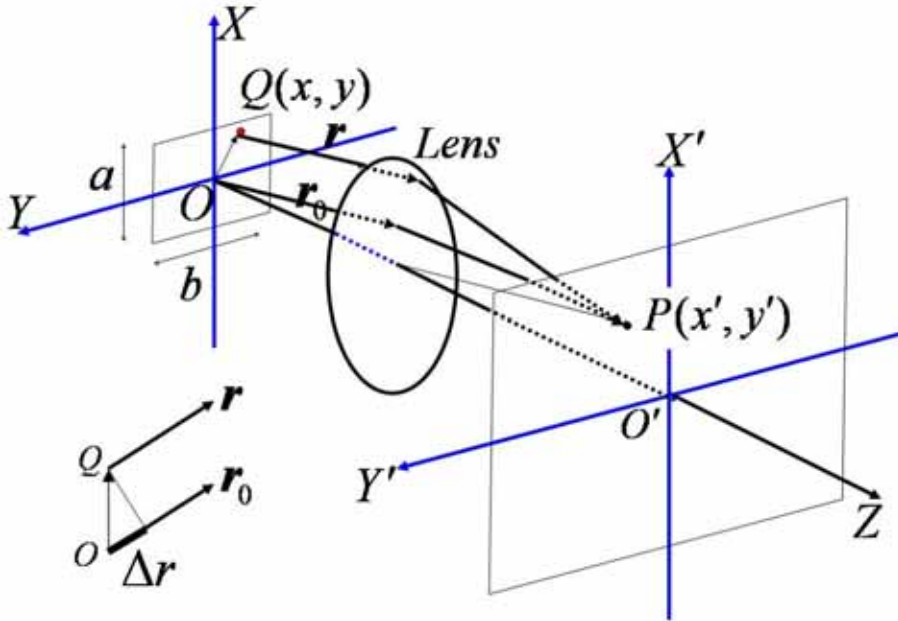
2.6.5 夫琅和费矩孔衍射

矩孔 $a \times b$ ，其上任一点 $Q(x, y)$ 发出沿 $\vec{k}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 方向的次波，其中

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 为波矢与 YOZ 平面，XOZ 平面和 XOY 平面的夹角，即 $\alpha + \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ，

$\beta + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ，其中 α, β, γ 是波矢 $\vec{k}$ 的方向余角。则矩孔发出的次波在 P 点的副振幅为

第二章 光的相干叠加



$$\tilde{U}(P) = K \iint \tilde{U}_0(x, y) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} dx dy$$

Q 点到 P 点的光程为 r 。从中心处 O 点引一条与 $\mathbf{k}$ 同方向直线，其到 P 点的光程为 r_0 ， r 与 r_0 的光程差即为矢量 OQ 在 $\mathbf{r}_0$ 上的投影。即

$$\begin{aligned} \Delta r &= -OQ \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} = -(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) \cdot (\sin \theta_1 \mathbf{e}_x + \sin \theta_2 \mathbf{e}_y + \sin \theta_3 \mathbf{e}_z) \\ &= -(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2) \end{aligned}$$

则 $r = r_0 + \Delta r = r_0 - (x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2)$ 。上述积分中，同方向的衍射光，倾斜因子相同。在近轴条件下，积分化为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(P) &= KF(\theta_0, \theta) \tilde{U}_0(0, 0) \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikr_0 - ik(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2)}}{r} dx dy \\ &= KF \tilde{U}_0(0, 0) \frac{e^{ikr_0}}{f} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx \sin \theta_1} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{-iky \sin \theta_2} dy \end{aligned}$$

$$= KF\tilde{U}_0(0,0)ab \frac{e^{ikr_0}}{f} \frac{\sin u_1}{u_1} \frac{\sin u_2}{u_2}$$

其中 $u_1 = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_1$, $u_2 = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta_2$,

强度分布

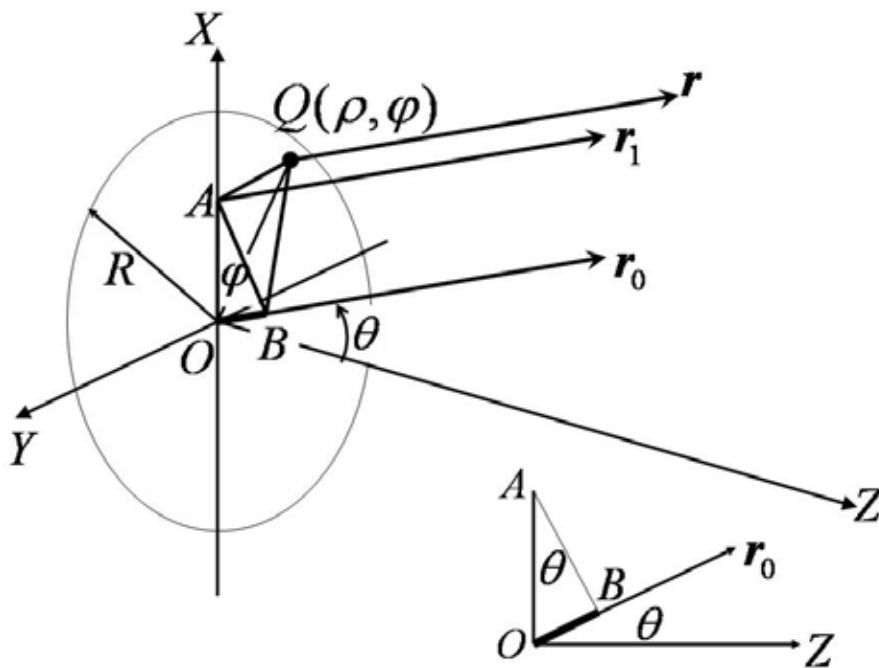
$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin u_1}{u_1} \right)^2 \left(\frac{\sin u_2}{u_2} \right)^2$$

$$I_0 = |KF\tilde{U}_0(0,0)ab\frac{e^{ikr_0}}{f}|^2$$
 , 为矩孔发出的光波沿 (0,0) 方向达到焦点 ,

即轴上 F 点的光强。

具有二维衍射强度分布。

2.7 夫琅和费圆孔衍射



2.7.1 衍射强度

Q 点发出沿任意方向光线 r , 与光轴间的夹角为 θ 。过中心 O 点作与 r 同方

第二章 光的相干叠加

向光线 r_0 ，取坐标系如下： r_0 和轴线所在平面为 XOZ 平面，Z 为光轴。过 Q 作与 r 、 r_0 垂直的平面，与 r_0 和 X 轴分别交于 B、A 点。则 AB 与 r_0 垂直。 r_0 与 YOZ 平面的夹角为 θ ，A、Q 两点发出的次波是等光程的。则任一点 Q 点发出的次波与中心点 O 发出的次波间的光程差为 OA 在 r_0 上的投影，即

$$\Delta r = -AO \sin \theta = -OQ \cos \varphi \sin \theta = -\rho \cos \varphi \sin \theta。在近轴条件下，焦平$$

面上 P 点的复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(P) &= K \iint_{\Sigma} \tilde{U}_0(\rho, \varphi) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr_0 - ik\rho \cos \varphi \sin \theta}}{r} d\Sigma \\ &= K \tilde{U}_0(0,0) \frac{e^{ikr_0}}{f} \iint_{\Sigma} e^{-ik\rho \cos \varphi \sin \theta} \rho d\varphi d\rho \\ &= K \tilde{U}_0(0,0) \frac{e^{ikr_0}}{f} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \cos \varphi \sin \theta\right) d\varphi\end{aligned}$$

取实部

$$\text{令 } m = 2\pi R \sin \theta / \lambda = kR \sin \theta$$

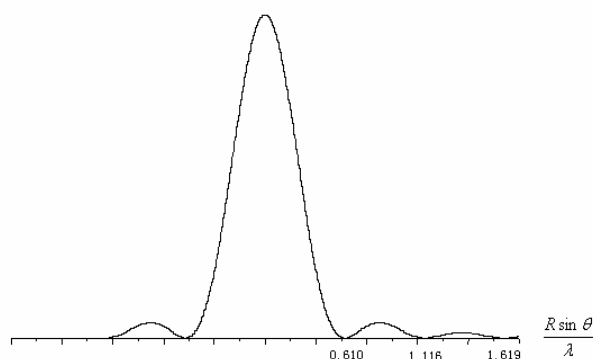
$$\begin{aligned}\text{上式化为 } \tilde{U}(P) &= K \tilde{U}_0(0,0) \frac{e^{ikr_0}}{f} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos(m\rho \cos \varphi) d\varphi \\ &= K \tilde{U}_0(0,0) \pi R^2 \frac{e^{ikr_0}}{f} \times \frac{2J_1(m)}{m}。 \end{aligned}$$

$J_1(m)$ ：一阶贝塞尔函数

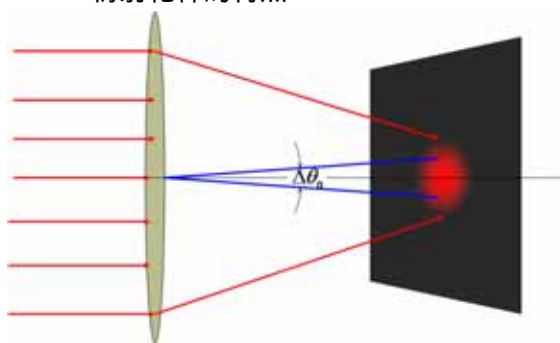
$$\begin{aligned}\frac{2J_1(m)}{m} &= \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{(k'+1)!k'!} \left(\frac{m}{2}\right)^{2k'} \\ &= \frac{m}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left[\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^3}{2!}\right]^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^4}{3!}\right]^2 + \dots \right\}\end{aligned}$$

$$\text{光强 } I(P) = I_0 \left[\frac{2J_1(m)}{m} \right]^2$$

光学



2.7.2 衍射花样的特点



1. 同心圆环，明暗交错，不等距。
2. 中央主极大（零级斑）：Aivry 斑，占总强度的 84%，半角宽度

$\Delta\theta_0 = 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ，圆孔直径为 D ，平行光直接通过透镜，则 Aivry 斑半径

$\Delta l = f \theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ 。为平行光通过透镜后的衍射斑。

2.7.3 望远镜的分辨本领

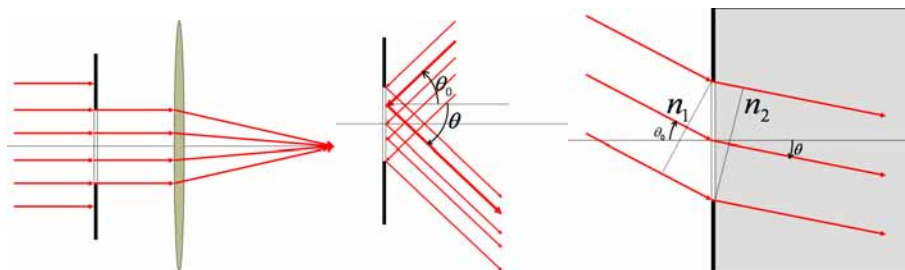
平行光经光学口径成像，有一 Aivry 斑，而不是几何光学所认为的一个几何点。即任何一个物经光学口径成像后，由于衍射效应，总有一个 Aivry 斑。两束光，则有两个 Aivry 斑。也就是说，两个实际上在空间分开的物，经光学系统成像后，由于衍射，所成的两个像可能实际上无法分开。两个 Aivry 斑如果靠得很近，则无法分辨。采用 Rayleigh 判据，两光斑的角距离恰等于一个光斑的半角宽度时，为可以分辨的最小极限。即可以分辨的物点间的最小张角（视角）为

$\delta\theta_m = \Delta\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ， λ 越小、 D 越大，可分辨的间隔越小，分辨本领越大。

此为望远镜的分辨本领。与放大本领不同。

2.7.4 几何光学是衍射光学的大尺度近似

对于单缝衍射的中央主极大，有 $\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{b}$ ；对于圆孔衍射的中央主极大，亦有 $\Delta\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ，其中 b 和 D 是衍射孔径的几何尺度。即中央衍射光斑的半角宽度都与衍射孔径的尺度成反比。如果衍射孔径比光的波长大得多，则 $\Delta\theta_0 \approx 0$ ，说明此时中央衍射斑将汇聚为一个几何点，而其他高级次的衍射的角宽度也等于 0，即没有衍射。这就相当于几何光学的情况。可见，只要衍射孔径的尺度比光的波长大得多，衍射的效果将不显著，几何光学的规律将起主导作用。即如果没有凸透镜的话，光将沿直线传播。



如果衍射孔径是一个反射面，入射光的方向为 θ_0 ，对于衍射屏上距离为 Δx 的两个次波中心，沿 θ 方向的衍射光，其光程差为 $\Delta x(\sin \theta \pm \sin \theta_0)$ ，则相应地有，

$$u = \frac{1}{2} ka(\sin \theta_0 \pm \sin \theta) = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta_0 \pm \sin \theta)$$

衍射的中央主极大的方向为 $\theta = \theta_0$ 。在满足 $a \gg \lambda$ 时，反射定律成立。如果衍射孔径是一个折射率不同的透射介质，则衍射屏上距离为 Δx 的两个次波中心，沿 θ 方向的衍射光，其光程差为 $\Delta x(n_2 \sin \theta \pm n_1 \sin \theta_0)$ ，则相应地有，

$$u = \frac{1}{2} ka(n_2 \sin \theta \pm n_1 \sin \theta_0) = \frac{\pi a}{\lambda} (n_2 \sin \theta \pm n_1 \sin \theta_0)$$

衍射的中央主极大的方向为 $n_2 \sin \theta = n_1 \sin \theta_0$ ，同样，几何光学的折射定律成立。

综上所述，当 $a \gg \lambda$ 时，衍射光学可以相当准确的用几何光学替代。