

第一章 光的波动模型

物理学是一门实验科学，这就是说，物理学的理论来源于实验，物理学的理论也必须要经过实验的检验。对于光的本质，人们通过观察，最初曾得到了不同的结论。在早期，实验无法对这些结论进行检验，因而它们都是假说。这些优势是相互对立的假说，不管理论上如何完美，都不足以使反对的一方完全信服。正如我们所熟知的，Newton 和 Huygens 分别提出了光的微粒说和波动说，这两种假说的争论持续了一百多年。即使 Newton 建立力学的崇高威望和他的众多的追随者也没有使相信 Huygens 的人放弃他们的信念。

1801 年，T. Young 在光通过双孔的实验中，首次观察到了与水波的干涉现象相似的光的干涉现象，即光经过双孔后，由于干涉，光能量在空间重新分布，显示为明暗交错的条纹，这些条纹被称作干涉条纹。这一实验称为杨氏干涉。杨氏干涉证明了光的波动性。

后来人们又观察到了光的衍射及偏振现象，由此建立了波动光学。

1865 年，Maxwell 总结出了关于电磁场规律的方程组，提出了电磁波理论。

由这一理论，可以得出电磁波的传播速度为 $v = 1/\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}$ 。当时，Rudolph Kohlrausch 以及 Wilhelm Weber 等人通过测量磁导率和介电常数，计算所得出的电磁波的速度竟然与已经测量到的光的速度相一致。这就使得 Maxwell 推测光就是电磁波。1887 年这一推测被 Heinrich Hertz 的实验所证实。而此时 Maxwell 已去世 8 年。



麦克斯韦 (James Clerk Maxwell, 1831 ~ 1879)

赫兹 (Hertz, H.R. 1857-1894)

1.1 光的电磁波理论

光是电磁波，这是我们所熟知的结论，或者说，光是电磁辐射频谱的一段，如图 1.1 所示。我们所说的光，通常是指可见光，即波长约在 400~760nm 的一段电磁辐射。在光学中，研究的范围通常还包括波长较长的红外光和波长较短的紫外光。

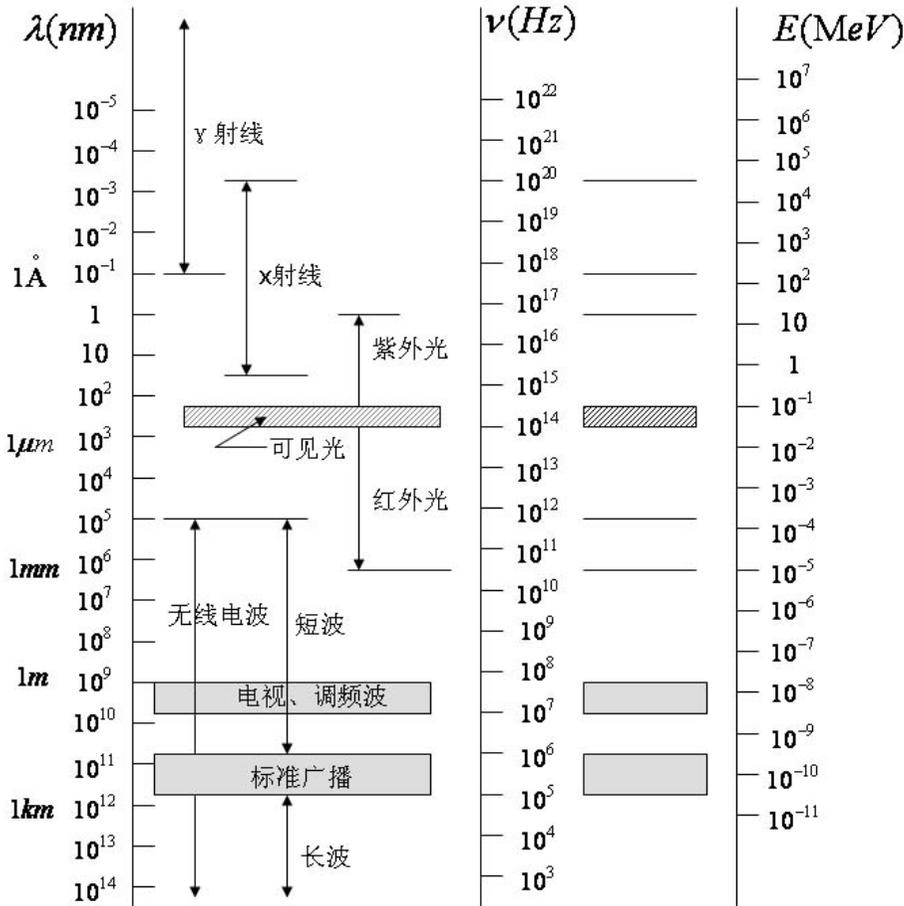


图 1.1 电磁辐射谱

既然光是电磁波，光的所有物理性质和物理行为都应当遵循电磁理论。

1.1.1 Maxwell 方程组

电磁场的基本特性可以用电场强度矢量 E 和磁感应强度矢量 B 来表示。为了表示电磁场在介质中的特性，又引入了另外一组物理量：电流密度矢量 J ，电位移矢量 D 和磁场强度矢量 H 。电磁场的规律用 Maxwell 方程组和反映介质电磁

性质的物质方程组描述。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

以及 $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right. \quad (1.1.2)$

电磁场的能流密度，即 Poynting 矢量为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.1.3)$$

1.1.2 无源各向同性介质中的 Maxwell 方程组

电磁场的性质由空间中电荷、电流的分布、介质的介电常数、磁导率、电导率以及边界条件所决定。原则上，只要上述各个参数是一定的，就可以通过求解 Maxwell 方程组得到电磁场的分布，即得到 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的数学表达式。

例如，在自由空间或均匀介质（其中电荷 $\rho = 0$ ，电流 $\mathbf{J} = 0$ ）中，上述 Maxwell 方程组可以化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.1.4)$$

设介质是稳定和各向同性的，即物质方程中的磁化率和介电常数等都是恒定值。取第二式的旋度，并利用物质方程的第二式、第一式以及 Maxwell 方程组的第四式，得到

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

而根据矢量分析公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

由于是各向同性的无源场， $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \right) = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$

则有 $-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

令 $\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 = \frac{1}{v^2}$ ，即 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}}$ (1.1.5)

可以得到齐次方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.6)$$

同样可以得到

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.7)$$

在真空中， $\varepsilon_r = 1$ ， $\mu_r = 1$ ，记 $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ ，即

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (1.1.8)$$

有

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.10)$$

上述方程是典型的波动方程，在特定的边界条件下，可以严格求解。

1.1.3 特定边界条件下波动方程的通解

1. 平面场

在直角坐标系中，设在与 Z 轴垂直的平面上，电场分量和磁场分量分别有相同的值，即 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的值与 x 、 y 无关，则上述方程 (1.1.9) 可以写作如下形式：

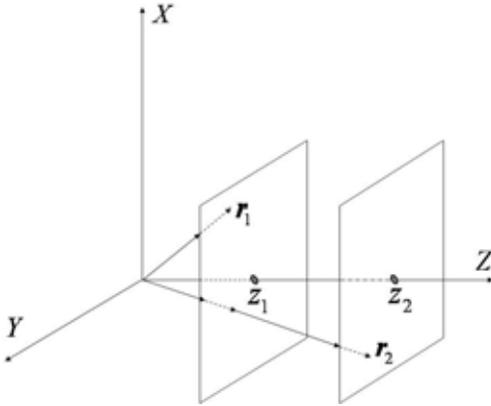


图 2 平面电磁场

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.11)$$

或者对于其中的任一分量，用标量方程表示为

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = 0, \quad j = x, y, z \quad (1.1.12)$$

引入参量 $p = z - vt$ ， $q = z + vt$

$$\text{由于 } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial q}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = v \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = v \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial q}{\partial t} = v^2 \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right)$$

$$= v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right)$$

代入方程 (1.1.12), 得到

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial p \partial q} = 0 \quad (1.1.13)$$

其通解为

$$E_j(z, t) = f(p) + g(q) = f(z - vt) + g(z + vt) \quad (1.1.14)$$

磁场分量同样有

$$B_j(z, t) = C[f(z - vt) + g(z + vt)] \quad (1.1.15)$$

或者写成矢量式, 即

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{F}(z - vt) + \mathbf{G}(z + vt) \quad (1.1.16)$$

$$\mathbf{B}(z, t) = C[\mathbf{F}(z - vt) + \mathbf{G}(z + vt)] \quad (1.1.17)$$

一般情况下, 波场中 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 分别相等的平面可以是任意取向的, 设该平面的法线为

$$\mathbf{s} = s_x \mathbf{e}_x + s_y \mathbf{e}_y + s_z \mathbf{e}_z \quad (1.1.18)$$

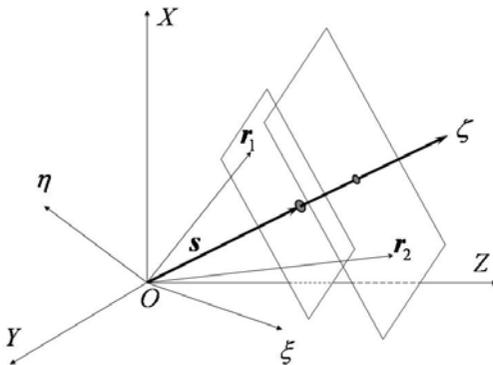


图 3 平面电磁场

则一般的边界条件可以表示为

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = \text{Const.} \quad (1.1.19)$$

$$\text{和 } \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} = \text{Const.} \quad (1.1.20)$$

在这种情况下, 可以将坐标系 XYZ 旋转得到新的坐标系 $\eta\xi\zeta$, 并使 ζ 轴沿

矢量 \mathbf{s} 的方向。此时由于边界条件的要求, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的值与 η 、 ξ 无关, 即

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = 0, \text{ 仍有}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\zeta, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.21)$$

形式上与式 (1.1.11) 完全相同，所以同样得到其通解为

$$\mathbf{E}(\zeta, t) = \mathbf{F}(\zeta - vt) + \mathbf{G}(\zeta + vt) \quad (1.1.22)$$

$$\mathbf{B}(\zeta, t) = \mathbf{F}(\zeta - vt) + \mathbf{G}(\zeta + vt) \quad (1.1.23)$$

2. 球面场

如果电场强度和磁场强度的分布是球面对称的，即它们的数值只与 r 有关。

在球坐标系中， $\mathbf{E}(r) = E_r(r)\mathbf{e}_r + E_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + E_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi$ ，可以用标量式表示其分量

$$E = E(r, t)$$

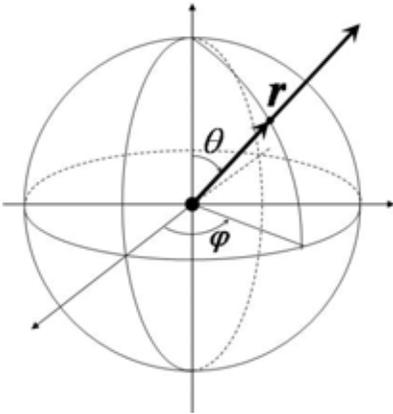


图 4 球面电磁场

在球坐标系中

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.1.24)$$

此时 E 与 θ ， φ 无关，微分方程 (1.1.9) 为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (rE)}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{由于 } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial E}{\partial r}) = 2 \frac{\partial E}{\partial r} + r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2}, \text{ 而 } \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rE) = 2 \frac{\partial E}{\partial r} + r \frac{\partial^2 E}{\partial r^2}$$

所以有

$$\frac{\partial^2 (rE)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (rE)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.25)$$

与式 (1.1.11) 有相同的形式，其通解为

$$E(r, t) = \frac{1}{r} [F(\zeta - vt) + G(\zeta + vt)] \quad (1.1.26)$$

$$B(r, t) = \frac{1}{r} [F(\zeta - vt) + G(\zeta + vt)] \quad (1.1.27)$$

上面的推导过程显示，在特定的边界条件下，例如平面场和球面场，Maxwell 方程组可以用标量方程代替，其通解可以用含有宗量 $p = z - vt$ ， $q = z + vt$ 的函数表示。

1.1.4 定态波动方程的解：平面波和球面波

由前面的推导，可以知道，在满足一定的边界条件时，可以通过对标量方程的处理得到原来的矢量方程的解。为了进一步求解方程组，还要采取其它的方法。常用的就是分离变量法，在这里，就是将空间变量与时间变量分离。

介质的磁导率和介电常数如果保持为常数，则可以应用分离变量法。首先对齐次方程 (1.1.9) 的标量形式求解。

将方程

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.28)$$

的解设为 $E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r})f(t)$ ，则方程化为

$$\frac{1}{E(\mathbf{r})} \nabla^2 E(\mathbf{r}) = \frac{1}{v^2} \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \quad (1.1.29)$$

令方程的两端都等于常数 l ，可以得到

$$f''(t) - lv^2 f(t) = 0 \quad (1.1.30)$$

$$\text{和 } \nabla^2 E(\mathbf{r}) - lE(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1.31)$$

对于 (1.1.30)，通解为

$$f(t) = f_0 e^{\pm i\nu\sqrt{l}t}$$

原则上， l 可以取任意的常数值，即可以是正数、负数或者复数。这里仅讨论当 $l > 0$ 的情形，可以令 $\nu\sqrt{l} = \omega$ ，即 $l = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2$ ，记 $k = \frac{\omega}{\nu}$ ，则有

$$f(t) = f_0 e^{\pm i(\omega t + \phi_1)}$$

可以将 $f(t)$ 中的常数并入 $E(\mathbf{r})$ 中，而将其记作

$$f(t) = e^{\pm i\omega t} \quad (1.1.32)$$

ω 称为电磁波的圆频率或角频率。

而空间部分的方程变为

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) - k^2 E(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1.33)$$

这就是 Helmholtz 方程的形式。下面将分别求出平面场和球面场中 Helmholtz 方程的解。

1. 平面波

在平面场中，利用 1.1.3 中的结论，可知一般情形下，当电场强度在法线为

$\mathbf{s} = s_x \mathbf{e}_x + s_y \mathbf{e}_y + s_z \mathbf{e}_z$ 的平面上有相等的值时，方程的标量形式可以写作

$$\frac{\partial^2 E(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(\zeta, t)}{\partial t^2} = 0$$

Helmholtz 方程为

$$\frac{d^2 E(\zeta)}{d\zeta^2} - k^2 E(\zeta) = 0 \quad (1.1.34)$$

是常微分波动方程，则解为

$$E = E(\zeta) = E_0 e^{i(k\zeta + \phi_0)} \quad (1.1.35)$$

ζ 是 XYZ 坐标系中沿 $\mathbf{s} = s_x \mathbf{e}_x + s_y \mathbf{e}_y + s_z \mathbf{e}_z$ 方向任一点的坐标值，也是过该

点且与 ζ 轴垂直的平面上任一点 $\mathbf{r}(\eta, \xi, \zeta)$ 在 ζ 轴上的投影。

而 $\eta\xi\zeta$ 系中的任一点 $\mathbf{r}(\eta, \xi, \zeta)$ ，在 XYZ 坐标系中为

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

在 s 上的投影为

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}(x, y, z) = (s_x\mathbf{e}_x + s_y\mathbf{e}_y + s_z\mathbf{e}_z) \cdot (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) = xs_x + ys_y + zs_z$$

$$\text{即 } \zeta = xs_x + ys_y + zs_z$$

如果引入矢量 $\mathbf{k} = ks$ (1.1.36)

$$\text{则 } k\zeta = ks \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

空间部分的解，即 (1.1.35) 式可以写成在 XYZ 坐标系下的表达式，为

$$E(\mathbf{r}) = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)} \quad (1.1.37)$$

则平面场中 Maxwell 方程的解可以写成

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \varphi_0)} \quad (1.1.38)$$

而磁场强度可以用同样的方法求出，为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \varphi_1)} \quad (1.1.39)$$

说明波是沿着矢量 \mathbf{k} 的方向 ($+\mathbf{k}$ 或 $-\mathbf{k}$) 传播的。

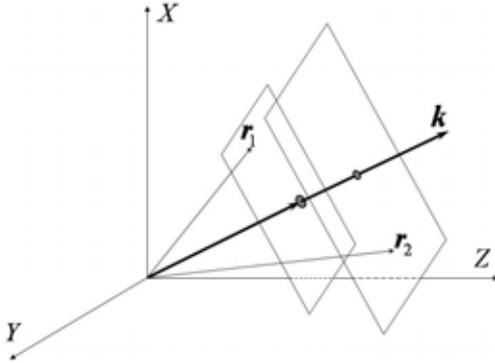


图 5 平面波

$$\text{由 (1.1.28) 式, 知道电磁波的速度为 } v = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}}$$

$$\text{真空中的波速为 } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

设波长为 λ ，则由波的周期性，在 \mathbf{k} 方向每变化 λ ，振动不变，于是

$\mathbf{B}(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}}{r}\lambda, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ，可以得到

$$k\lambda = 2\pi, \text{ 即 } \mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s} \quad (1.1.40)$$

k 称为波矢，其方向为波的传播方向，数值为 $\frac{2\pi}{\lambda}$ 。因为常用波长的倒数

$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ 表示单位长度内波长的数目，称作波数；则 k 表示 2π 长度内波长的数目，

也称圆波数或角波数。

又由前面的推导过程，知道

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0} \quad (1.1.41)$$

利用 Maxwell 方程组 (1.1.4) 的第二式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \frac{\partial e^{\pm i\omega t}}{\partial t} = \pm i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \varphi_0)}) = \nabla e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \varphi_0)} \times \mathbf{E}_0 = \nabla(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \varphi_0)}$$

$$= \nabla(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \varphi_0)} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

$$\text{即 } \pm i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \pm \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (1.1.42)$$

取 (1.1.38) 式的散度，有

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cdot \nabla e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \varphi_0)} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t + \varphi_0)} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

由 (1.1.3) 式的第一式， $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ ，所以

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1.43)$$

由(1.1.42)及(1.1.43)式，可以判断三个矢量 \mathbf{k} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是相互正交的，故为横波，而且 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是同步的（即同时取得极大值）。

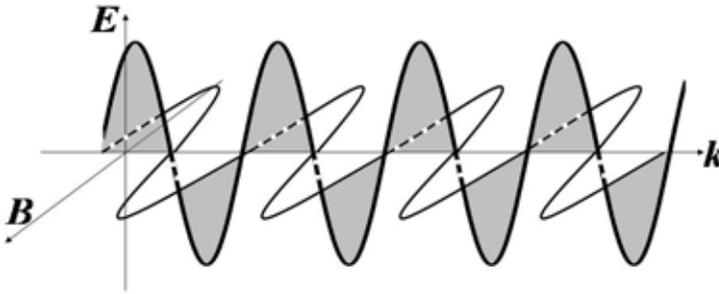


图 6 平面波的电矢量、磁矢量和波矢

2. 球面波

如果电磁场的边界条件为：电场分量和磁场分量在一个球面上分别有相同的值，即 E 和 B 的值只与 r 有关，即

球面场中，波动方程为 (1.1.25) 式，Helmholtz 方程为

$$\frac{d^2}{dr^2}[rE(r)] - k^2[rE(r)] = 0 \quad (1.1.44)$$

与 (1.1.34) 式解的形式 (1.1.35) 相同，为

$$E(r) = \frac{E_0}{r} e^{i(kr + \varphi_0)} \quad (1.1.45)$$

故球面场中 Maxwell 方程的解可以写成

$$E(r, t) = \frac{E_0}{r} e^{i(kr \pm \omega t + \varphi_0)} \quad (1.1.46)$$

或写作矢量式

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{\mathbf{E}_0}{r} e^{i(kr \pm \omega t + \varphi_0)} \quad (1.1.47)$$

$$\mathbf{B}(r, t) = \frac{\mathbf{B}_0}{r} e^{i(kr \pm \omega t + \varphi_0)} \quad (1.1.48)$$

说明电磁波沿着 $\pm r$ 的方向传播。

取 (1.1.47) 式的散度，有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(r, t) &= \nabla \cdot \frac{e^{i(kr \pm \omega t + \varphi_0)}}{r} \cdot \mathbf{E}_0 = [e^{i(kr \pm \omega t + \varphi_0)} \nabla \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \nabla \cdot e^{i(kr \pm \omega t + \varphi_0)}] \cdot \mathbf{E}_0 \\ &= e^{i(kr \pm \omega t + \varphi_0)} \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right] \nabla r \cdot \mathbf{E}_0 = \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right] \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{E}(r, t) = 0 \end{aligned}$$

要使上式成立，只有 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(r, t) = 0$ 即电场强度与球面法线垂直。

与平面波相似，取 (1.1.47) 式的旋度

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \left(\frac{\mathbf{E}_0}{r} e^{i(kr \pm \omega t + \varphi_0)} \right) = \nabla \frac{e^{i(kr \pm \omega t + \varphi_0)}}{r} \times \mathbf{E}_0 = \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right] \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \pm i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

可以判断三个矢量 \mathbf{r} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是相互正交的。此时如果同样引入矢量 $\mathbf{k} = k \frac{\mathbf{r}}{r}$ ，表示波的传播方向， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 则 \mathbf{k} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 相互正交。

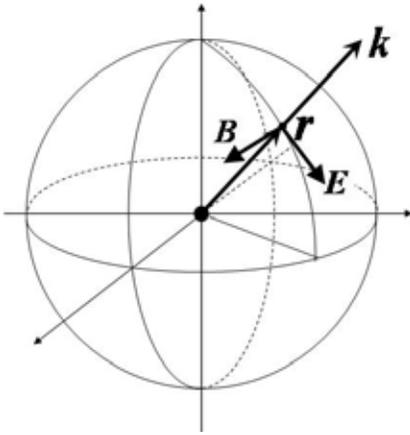


图 7 球面波的矢量

在前面的推导过程中，以假设介质的介电常数和磁化率保持为常数。事实上，实验研究表明， ϵ_r 和 μ_r 都随着电磁波的频率 ω 改变，即 $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$ ， $\mu_r = \mu_r(\omega)$ ，这种现象称为介质的色散。因而，在介质中，是不能推导出关于电场分量和磁场分量的一般的波动方程的。方程 (1.1.6) 和 (1.1.7) 只有在固定不变的频率下才能够成立。也就是说，上述结论只对单色波才适用。这种以确定频率振荡的称为定态电磁波。上述结论就是 Maxwell 在定态条件下的解。

1.2 定态光波及其描述

在前一节中，通过求解特定边界条件下的 Maxwell 方程组，得到了定态电磁波的数学表达式，并引入了一些重要的物理概念，下面将着重从物理模型出发，阐述光波场，尤其是定态光波场的特征。

1.2.1 光波场具有时间和空间两重周期性

波是振动的传播。振动在空间的传播形成物理量在空间的分布，即为波场。

振动和波的共性是都具有周期性。而波的周期性又与振动不完全相同。振动具有时间周期性，而波同时具有时间和空间的周期性。

波场中任一点：具有振动的周期性，该点的物理量经过一定时间后又可以恢复原来的数值，即具有时间的周期性。这种周期性可以用振动的周期 T 描述。振动的频率为 $\nu = \frac{1}{T}$ ；圆频率或角频率为 $\omega = 2\pi\nu$ ，表示在 2π 时间内振动的次数。



图 8 波的时间周期性

在任一时刻：波场在空间的分布具有周期性，即物理量在空间周期分布，这种周期性用波长 λ 描述。波长的倒数 $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ 称为波数，表示单位长度内的周期数，即单位长度内波长的数目，则波矢 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 即表示 2π 长度内波的数目。



图 9 波的空间周期性

从以上的讨论，可以看出，波场具有时间和空间两重周期性。这是所有波动的共性。

所以波的表达式，必须能够同时反映时间和空间的周期性。上述平面电磁波的表达式 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ ，或者 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ 就具有这两重周期性。

由于波是振动的传播，所以波的表达式就是要反映出一个振动量随时间和空间变化的情况，即物理量偏离其平衡位置的程度，以及这一物理量在空间是如何传播的。

一般情况下，平面光波场中电场强度的表达式记作 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)}$ ，

其中， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0 = \varphi(\mathbf{r}) - \omega t = \varphi(\mathbf{r}, t)$ 称为波的相位，与时间和空间相关。

而 φ_0 被称作初相位，即初始时刻原点的相位。

1.2.2 波的传播

波的传播，就是将波场中的振动从一点传播到另一点。例如对于定态平面波 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)}$ ，就是将其电场强度矢量 \mathbf{E} （电场分量）的方向和数值从空间的某一点传播到另一点。在没有吸收等其它损耗的情况下，就是将该物理量以不变的量值传播。而该物理量的值取决于波场的相位 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ，所以振动的传播其实就是相位的传播。在振动传播过程中，相位保持不变。在 t 时刻，空间点 \mathbf{r} 处的波经过时间 Δt 后，传播到了空间另一点 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ ，可以表示为

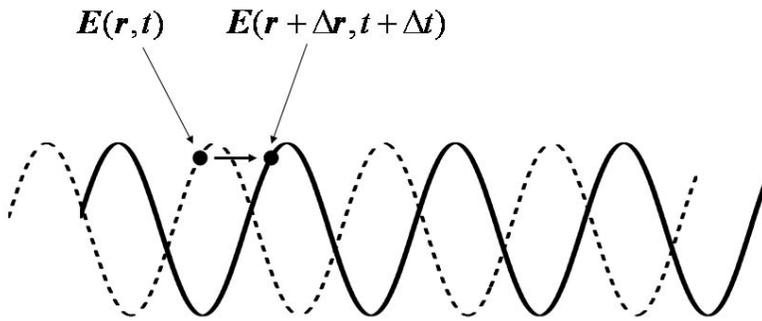


图 10 振动与相位的传播

$$\varphi(\mathbf{r}', t') = \varphi(\mathbf{r}, t)$$

对于平面波，即 $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \omega(t + \Delta t) + \varphi_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0$

$$\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r} - \omega \Delta t = 0$$

$$k_x \Delta x + k_y \Delta y + k_z \Delta z = \omega \Delta t, \quad k_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + k_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + k_z \frac{\Delta z}{\Delta t} = \omega$$

$\mathbf{k} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \omega$ ，即 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega$ ， \mathbf{v} 就是平面波振动传播的速度，称作相速度。对

于沿 z 方向传播的平面波，相速度

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (1.2.1)$$

球面波，由于 $\varphi(r) = \pm kr - \omega t + \varphi_0$ ，同样可以得到

$$kv = \pm \omega \quad \text{即} \quad v = \pm \frac{\omega}{k}$$

“+”表示沿着 r 方向传播的球面波，即从原点发散的球面波；“-”表示沿着 $-r$ 方向传播的球面波，即向原点汇聚的球面波。

$$\text{光速} \quad v = 1/\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0} = c/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \text{ 为真空中的光速。}$$

$$\text{折射率} \quad n = c/v = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \quad (1.2.2)$$

实验研究表明，对于绝大多数各向同性的光传播介质而言，可见光几乎不会引起介质的磁化，也就是说，在光的波长范围内，可以认为光传播介质是“磁真空”的，因而有 $\mu_r \approx 1$ ，所以

$$n \approx \sqrt{\varepsilon_r} \quad (1.2.3)$$

正是基于这样的原因，研究光在介质中的行为时，只需要考虑其电场强度，即电场分量 E 即可。

1.2.3 光波是矢量波

光是电磁波，因而是一种矢量波，电场分量、磁场分量、波的传播方（波矢），都是矢量。因而应该用矢量描述光波的物理特征。

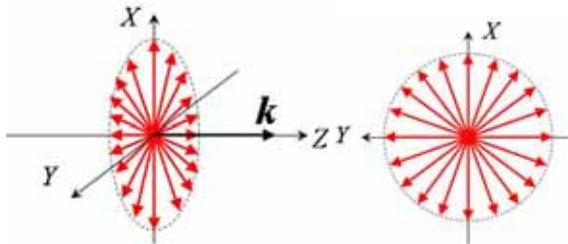


图 11 光是横波

光波是横波，在真空和各向同性介质中，电场强度矢量、磁场强度矢量、波矢是两两正交的。

但是，用矢量描述光波，给数学上的计算和推导都带来了许多不便。而事实上，在多数情况下，光波电矢量在横向是均匀和对称的，因而任意选定一个方向之后，电矢量在这一方向的特征与其它任何方向没有区别，因而只需要用标量对波的特征进行描述即可。即使电矢量的分布式非对称的，也通常可以采用正交分解的方法，得到 $E = E_x e_x + E_y e_y$ ，对于两个分量 E_x 和 E_y ，都可以用标量表示。

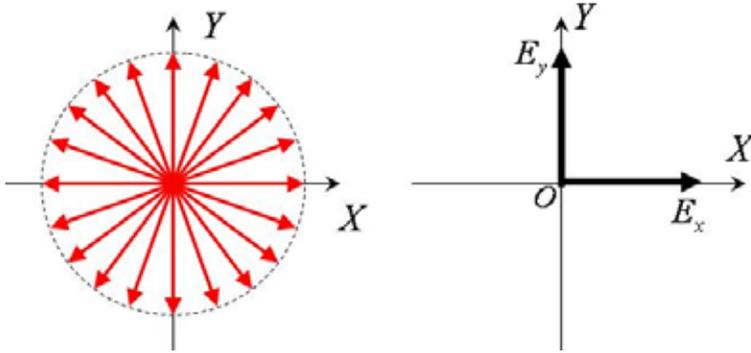


图 12 光波振动矢量的正交分解

因而，在光学中，用标量方法处理矢量波，是一种常用的手段。当蔡用标量表达式处理光波时，有时也将研究对象称作“标量波”。

电场分量振幅、磁场分量振幅、波长、频率等是标量。

1.2.4 光强

光的强度即是其平均能流密度的绝对值，就是平均坡印廷矢量的绝对值。例如，对于平面波，利用 (1.1.42)，得到

$$I = \langle |S| \rangle = \langle |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \rangle = \left\langle \left| \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_r \mu_0} \right| \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k}{\omega \mu_r \mu_0} E^2 dt$$

$$\text{而 } \frac{k}{\omega} = \sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{所以}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{k}{\omega \mu_r \mu_0} E^2 dt &= \int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} E^2 dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} \int_0^T E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) dt \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} \frac{T}{2} E_0^2 \end{aligned}$$

即

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} E_0^2 = \frac{1}{2\mu_r \mu_0} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \mu_0 \varepsilon_0} E_0^2 = \frac{n}{2c\mu_r \mu_0} E_0^2 \approx \frac{n}{2c\mu_0} E_0^2 \quad (1.2.4)$$

故

$$I \propto nE_0^2 \quad (1.2.5)$$

如果光只是在同一种介质中传播，通常取

$$I = E_0^2 \quad (1.2.6)$$

可以用电场分量振幅的平方表示光强。

1.2.5 定态光波

根据 1.1 中的讨论，定态光波具有如下的性质

1. 定态光波

具有下述性质的波场为定态波场

- (1) 空间各点的扰动是同频率的简谐振动。
- (2) 波场中各点扰动的振幅不随时间变化，在空间形成一个稳定的振幅分布。

满足上述要求的光波应当充满全空间，是无限长的单色波列。但当波列的持续时间比其扰动周期长得多时，可将其当作无限长波列处理。

任何复杂的非单色波都可以分解为一系列单色波的叠加。

定态光波不是简谐波，其空间各点的振幅可以不同。

2. 定态光波的描述

对符合上述条件的定态光波，如果没有偏振性，即其电场分量在各个方向都是相同的，通常用标量表达式描述，其实是在一个取定的平面内描述定态光波某一分量的振动。

$$U(P, t) = A(P) \cos[\varphi(P) - \omega t] = A(P) \cos[\omega t - \varphi(P)] \quad (1.2.7)$$

P 表示空间众任一点。则 $A(P)$ 是振幅的空间分布； $\varphi(P)$ 是相位的空间分布。

均与时间 t 无关。

3. 定态光波按波面分类

波面：空间中 $\varphi(P)$ 相同的点所组成的平面或曲面是光波的等相位面，即波面或波阵面。可根据波面的形状将光波分类。

相位同的空间点应满足下述方程（相同时刻）

$$\varphi(P) = \text{Const.} \quad (1.2.8)$$

场点 P 可以用直角坐标表示为 $P(x, y, z) = xe_x + ye_y + ze_z$

或者用球坐标表示为 $P(r, \theta, \varphi)$

对于 1.1 中从电磁场边界条件所得到的平面波和球面波，具有如下的特性。

- (1) 平面波：波面是平面。

平面波具有下列特征：

- (a) 振幅 $A(P)$ 为常数；
- (b) 空间相位 $\varphi(P)$ 为直角坐标的线性函数，即

$$\varphi(P) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0 \quad (1.2.9)$$

常数 φ_0 为初相位，即时刻 $t = 0$ 时原点的相位。

$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}$ ，波矢，指向波的传播方向，其数值为角波数，表示 2π 长度内的波长数目。

波面的条件为 $\varphi(P) = \text{Const.}$ ，即 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{Const.}$ ，为与波矢垂直的一系列平面，故名。

波矢的方向角表示：

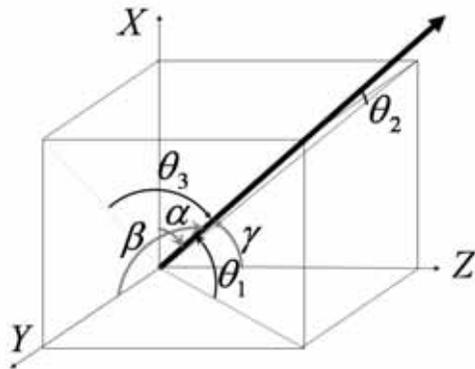
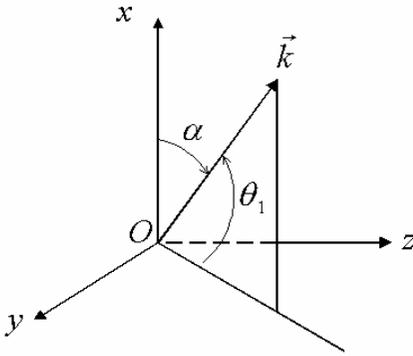


图 13 波矢的方向表示 图 14 波矢的方向表示

在数学中常用方向余弦表示矢量的方向，即用矢量与坐标轴间的夹角表示。

波矢的方向可以用方向余弦角表示为 (α, β, γ) ，其中的三个角度分别是波矢 \mathbf{k} 与 X, Y, Z 轴的夹角。则波矢可以用矢量式表示为：

$$\mathbf{k} = k(\cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z) \quad (1.2.10)$$

在光学中，我们习惯上用上述三个角的余角表示波矢的方向，即 $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ， $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \beta$ ， $\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \gamma$ 。则 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 就是 \vec{k} 与 YOZ 、 XOZ 和 XOY 三个平面的夹角。

$$\text{则上述波矢表示式变为 } \mathbf{k} = k(\sin \theta_1 \mathbf{e}_x + \sin \theta_2 \mathbf{e}_y + \sin \theta_3 \mathbf{e}_z) \quad (1.2.11)$$

空间点 $P(x, y, z)$ 处的相位为

$$\varphi(x, y, z) = k(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2 + z \sin \theta_3) + \varphi_0 \quad (1.2.12)$$

由于光学中的探测器或接收屏往往是一个平面，所以通常总是研究波场中一个平面上的相位。可以取该平面位于坐标系中 $z=0$ 处，则该平面上的相位分布为

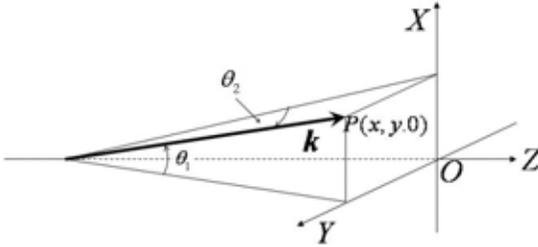


图 15 平面波前上的相位

$$\varphi(x, y, 0) = k(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2) + \varphi_0 \quad (1.2.13)$$

如果平面波沿 $+Z$ 向传播，其波面垂直于 Z 轴。 t 时刻轴上某一点 z 处波面的相位为 $\varphi(t, z) = kz - \omega t + \varphi_0$ 。在下一时刻， $t' = t + dt$ ，要保持相位不变，该波面的位置为 $z' = z + dz$ ，则有

$$kz - \omega t + \varphi_0 = k(z + dz) - \omega(t + dt) + \varphi_0, \text{ 即 } kdz = \omega dt, \text{ 波面传播的速度}$$

为

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \nu\lambda, \text{ 该速度为波面传播的速度, 即相位传播的速度,}$$

称为相速度。如果波面的表达式为 $\varphi(z) = -kz - \omega t + \varphi_0$ ，或者

$$\varphi(z) = kz + \omega t + \varphi_0, \text{ 其相速度为 } v = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{k} = -\nu\lambda, \text{ 向 } -Z \text{ 方向传播。}$$

一列平面波在 XOZ 平面传播，并以 θ 角入射到 XOY 平面上，则入射波的波矢为

$$\mathbf{k} = k(\mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_z \sin \theta)$$

反射波的波矢为

$$\mathbf{k}' = k(-\mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_z \sin \theta)$$

相位分别为

$$\varphi(P) = k(x \cos \theta + z \sin \theta) \text{ 和 } \varphi'(P) = k(-x \cos \theta + z \sin \theta)$$

(2) 球面波：波面是球面

球面波有以下两个主要的特征：

(a) 振幅

$$A(P) = a / r \quad (1.2.13)$$

振幅与到波源的距离成反比；

(b) 空间相位是球面对称的

$$\varphi(P) = kr + \varphi_0 \quad (1.2.14)$$

波面 $\varphi(P) = kr + \varphi_0 = \text{Const.}$ ，即 $r = \text{常数}$ ，代表一个球面。振幅沿传播方向衰减。

球面光是从某一光源点源发出的，或是向某一点汇聚的波。

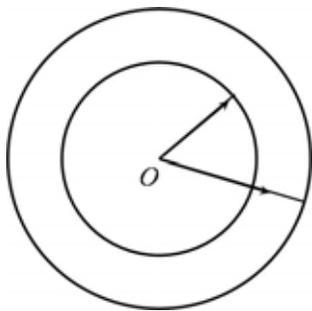


图 16 发散球面波

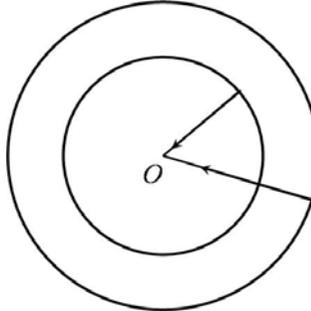


图 17 汇聚球面波

如果波源为 $O(0, 0, 0)$ ，波前为 $\varphi(p) = kr - \omega t + \varphi_0$ ，沿任一球面法线方向，有

$$kr - \omega t + \varphi_0 = k(r + dr) - \omega(t + dt) + \varphi_0,$$

波面传播速度为 $v = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k}$ ，为从原点发出的发散球面波。

如波面表达式为 $\varphi(P) = -kr - \omega t + \varphi_0$ ，波面传播速度为 $v = -\frac{dr}{dt} = -\frac{\omega}{k}$ ，

为向中心传播的球面波，即向原点汇聚的球面波。

例题 1. 比较从 $(0, 0, -z_0)$ 和 $(0, 0, z_0)$ 处发出和向 $(0, 0, -z_0)$ 和 $(0, 0, z_0)$ 汇聚的球面波在 $(x, y, 0)$ 平面上的振动表达式。

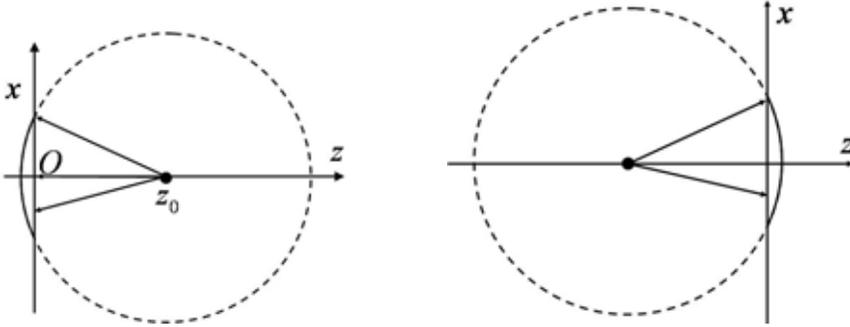


图 18 图 19

$(0, 0, z_0)$ 出发出的球面波在 $(x, y, 0)$ 平面上的振动为

$$U_+(x, y, 0) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}} \cos[k\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2} - \omega t + \varphi_0]$$

$(0, 0, -z_0)$ 出发出的球面波在 $(x, y, 0)$ 平面上的振动亦为

$$U_-(x, y, 0) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}} \cos[k\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2} - \omega t + \varphi_0]$$

向 $(0, 0, z_0)$ 点汇聚的球面波为

$$U_+^*(x, y, 0) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}} \cos[-k\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2} - \omega t + \varphi_0]$$

向 $(0, 0, -z_0)$ 点汇聚的球面波为

$$U_-^*(x, y, 0) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}} \cos[-k\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2} - \omega t + \varphi_0]$$

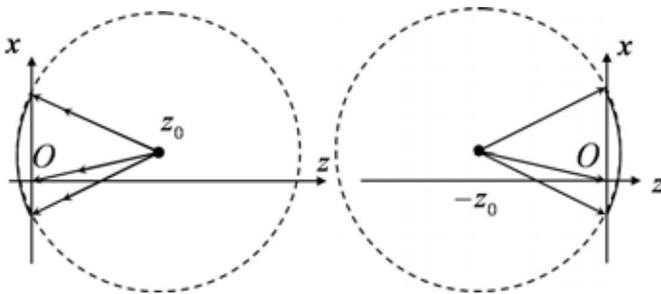


图 20 图 21

例 2 . 比较从 $(x_0, y_0, -z_0)$ 和 (x_0, y_0, z_0) 处发出和向 $(x_0, y_0, -z_0)$ 和 (x_0, y_0, z_0) 汇聚的球面波在 $(x, y, 0)$ 平面上的振动表达式。

点如果点光源在 $(x_0, y_0, \pm z_0)$ ，则发出和汇聚的球面波分别为

$$U_{\pm}(x, y, 0) =$$

$$\frac{A}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} \cos[k\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2} - \omega t + \varphi_0]$$

$$U_{\pm}^*(x, y, 0) =$$

$$\frac{A}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} \cos[-k\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2} - \omega t + \varphi_0]$$

对于球面波，其在某点的振幅和相位只与该点到源点的距离 r 有关，而与场点相对于源点的方位无关，所以在球面波的表达式化简和变换的过程中，应该注意这一点。

4 . 光波的复振幅描述

波动的表达式，即可以用余弦或正弦函数表示，也可以用复指数表示。用复数表示，则为

$$\tilde{U}(P, t) = A(P)e^{\pm i[\varphi(P) - \omega t]} = A(P)e^{i\varphi(P)}e^{-i\omega t} \quad (\text{取正指数})$$

定态光波的频率都是相等的，可以不写在表达式中。定态部分，即与时间无关部分称为复振幅。即复振幅为

$$\tilde{U}(P) = A(P)e^{i\varphi(P)} \quad (1.2.15)$$

复振幅包含了振幅和相位的空间分布，直接表示了光波在空间 P 点的振动，或者说复振幅表示了波在空间的分布情况。所以，对于定态光波，凡是需要用振动描述的地方，都可以用复振幅描述。

光波场在 P 点的强度可以直接从复振幅求得

$$I(P) = A^2(P) = \tilde{U}^*(P)\tilde{U}(P) \quad (1.2.16)$$

1.2.6 有关光波的几个概念

1. 波面：相相位等的空间点构成的曲面，也称波阵面。
2. 波前：光波场中的任一曲面。
3. 等幅面：振幅相等的空间点构成的曲面。
4. 共轭波：复振幅互为共轭的波。

互为共轭的波，其传播方向应该是相关联的。

对于球面波， $\tilde{U} = \frac{A}{r} \exp[ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}]$ ，为从

(x_0, y_0, z_0) 点发出的波。

其共轭波 $\tilde{U}^* = \frac{A}{r} \exp[-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}]$ 则是向

(x_0, y_0, z_0) 点汇聚的。

波矢相反的平面波，其复振幅是定是共轭的，即 $E_0 e^{-ik \cdot r}$ 和 $E_0 e^{ik \cdot r}$ 互为共轭。但反过来则不尽然。

例如，在 XOZ 平面中沿 θ_1 方向传播的平面波，其复振幅在 $z=0$ 的波前上表示为 $\tilde{U}(x, y, 0) = A \exp(ikx \sin \theta_1)$ ，共轭波 $\tilde{U}^*(x, y, 0) = A \exp[ikx \sin(-\theta_1)]$ ，则是沿 $-\theta_1$ 方向传播。

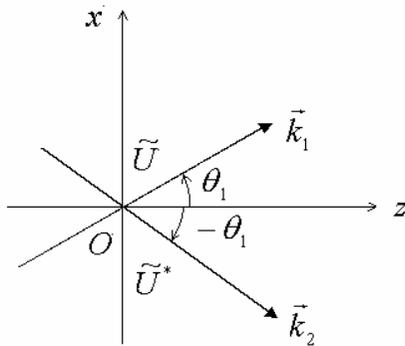


图 22

5. 波线

与波面垂直的直线，表示波的传播方向。

与波矢的方向是相同的。

波线就是几何光学中的光线。

1.3 远场条件、近轴条件

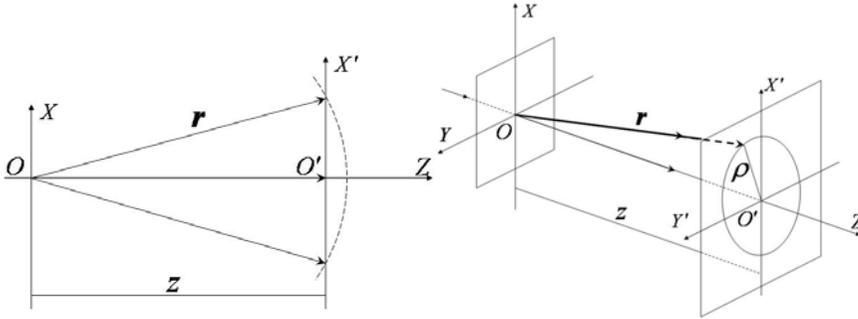


图 23 图 24

尽管平面波的表达式非常简单，但在实际中，遇到的往往是球面波。在一个平面上，例如成像面或者探测器表面，其相位并不相同，而且表达式相当复杂。往往需要在一定条件下，将球面波近似为平面波处理。

1.3.1 轴上物点的近轴条件和远场条件

物点在 $OXYZ$ 坐标平面的原点，接收屏 $X'O'Y'$ 与物平面 XOY 相距较远，在接收屏上的任一点 P ，有

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$$

$$\begin{aligned} \text{球面波在接收屏上的振幅为 } A(P) &= E_0 / \sqrt{z^2 + \rho^2} = E_0 / [|z| \sqrt{1 + (\rho/z)^2}] \\ &= E_0 / [|z| (1 + (\frac{1}{2})(\frac{\rho}{z})^2 + \dots)] \end{aligned}$$

$$\text{如 } \rho^2 \ll z^2 \quad (1.3.2)$$

则 $(\rho/z)^2$ 可忽略，有

$$A(P) = E_0 / |z| \quad (1.3.2)$$

$\rho^2 \ll z^2$ 称为近（傍）轴条件。

$$\text{球面波在接收屏上的相位为 } \varphi(P) = k\sqrt{z^2 + \rho^2} = k(|z| + \rho^2/2|z| + \dots)$$

如有

$$|z| \gg \rho^2 / \lambda \quad (1.3.3)$$

则 $\rho^2 / |z| \ll \lambda$ ，即 $k\rho^2 / 2|z| \ll k\lambda / 2 = \pi$ 则 $\rho^2 / 2|z|$ 可以忽略。此时

$$\varphi(P) = kz \quad (1.3.4)$$

$|z| \gg \rho^2 / \lambda$ 为远场条件。

满足远场条件时，在接收屏上，球面波的相位可按平面波处理。

由于 $\lambda \ll |z|$ ，所以由远场条件可得 $\rho^2 \ll \lambda |z| \ll |z| |z| = z^2$ ，即远场条件必然包含近轴条件。

近轴条件下，轴上物点发出的球面波可以简化为

$$\tilde{U}(x', y', 0) = \frac{E_0}{|z|} \exp\left[ik\left(z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) + i\varphi_0\right] \quad (1.3.5)$$

远场条件下，轴上物点发出的球面波可以简化为

$$\tilde{U}(x', y', 0) = \frac{E_0}{|z|} \exp[ikz + i\varphi_0] \quad (1.3.6)$$

可以作为平面波处理。

1.3.2 轴外物点的近轴条件和远场条件

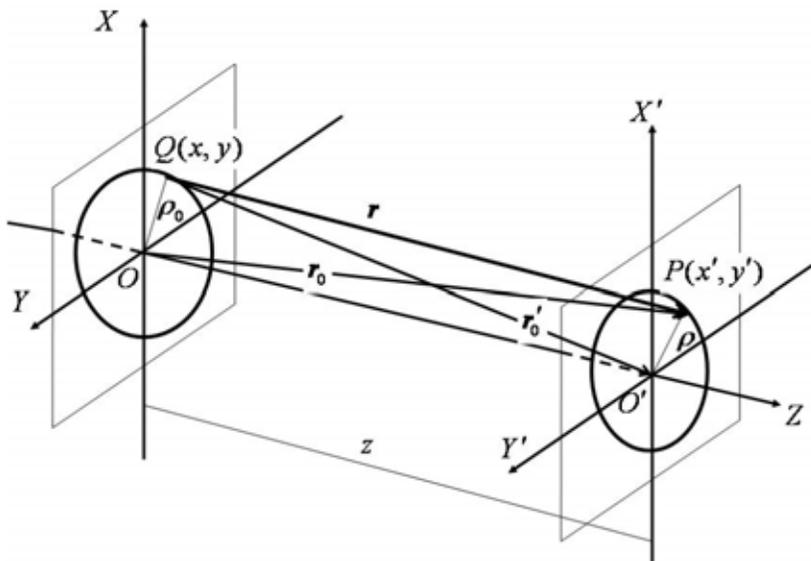


图 25

物平面上有一物点，在 $Q(x, y, 0)$ ，场点在平面 $X'O'Y'$ 上，为 $P(x', y', z)$ 。

场点到物点的间距

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \quad (1.3.7)$$

场点与物平面中心的间距

$$r_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2} \quad (1.3.8)$$

接收屏中心与物点的间距

$$r'_0 = \sqrt{\rho_0^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.3.9)$$

物点 Q 到物平面中心 O 的距离 $\rho_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

当物点场点都满足近轴条件时，即 $\rho^2 \ll z^2$ 和 $\rho_0^2 \ll z^2$ ，有

$$r_0 = z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} \quad (1.3.10)$$

$$r'_0 = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad (1.3.11)$$

$$r = z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} \quad (1.3.12)$$

$$= r'_0 + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} \quad (1.3.13)$$

$$= r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx' + yy'}{z} \quad (1.3.14)$$

接收屏上的复振幅

$$\tilde{U}(x', y') = \frac{E_0}{|z|} \exp[ik(r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z})] \exp[-ik(\frac{xx' + yy'}{z})] \quad (1.3.15)$$

$$= \frac{E_0}{|z|} \exp\left[ik\left(r'_0 + \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right)\right] \exp\left[-ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right] \quad (1.3.16)$$

物点的远场条件为 $|z| \gg \rho_0^2 / \lambda$ ，即

$$\frac{x^2}{\lambda} \ll z \text{ 和 } \frac{y^2}{\lambda} \ll z$$

场点的远场条件为 $|z| \gg \rho^2 / \lambda$ ，即

$$\frac{x'^2}{\lambda} \ll z \text{ 和 } \frac{y'^2}{\lambda} \ll z$$

如果物点满足近轴条件，而场点 P 再满足远场条件的话，(1.3.16) 式化为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x', y') &= \frac{E_0}{|z|} \exp\left[ikr'_0 - ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right] \\ &= \frac{E_0}{|z|} e^{ikr'_0} \exp\left[-ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right] \quad (1.3.17) \end{aligned}$$

如果场点满足近轴条件，而物点 Q 再满足远场条件的话，(1.3.15) 式化为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x', y') &= \frac{E_0}{|z|} \exp\left[ikr_0 - ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right] \\ &= \frac{E_0}{|z|} e^{ikr_0} \exp\left[-ik\left(\frac{xx' + yy'}{z}\right)\right] \quad (1.3.18) \end{aligned}$$

都是平面波的形式。

1.4 波场中的相位与光程

1.4.1 光程

虽然“光程”这一概念并不是在光的波动理论中最先被提出来的，但是这一概念却极其重要的。

对于平面波，其相位表示为

$$\varphi(P) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0$$

$$\text{波矢为 } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \quad (1.4.1)$$

λ_0 为真空中的波长， n 为介质的折射率。

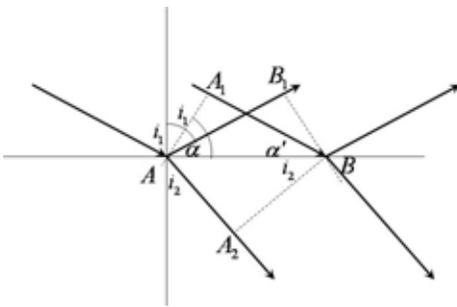
以一维为例，设 $\varphi_0 = 0$ ，则

$$\varphi(z) = kz = \frac{2\pi}{\lambda_0} nz = \frac{2\pi}{\lambda_0} ns \quad (1.4.2)$$

$nz = ns$ 为介质中波的光程，即光走过的路径（路程）与介质的折射率的乘积。可见相位由光程决定。即在同一时刻，空间中光程相同的点，其相位也相同，因而振动也相同。或者说，等光程面，就是等相位面，即波面。

平面波的反射、折射都可以用光程与波面的关系解释。

入射光的波面为 AA_1 ，反射光的波面为 BB_1 ，由于两个波面上的各个点之间必须保持等光程，于是有 $\overline{AB_1} = \overline{BA_1}$ ，即 $\alpha' = \alpha$ ，入射角等于反射角。对于折射波而言，要求 $n_2 \overline{AA_2} = n_1 \overline{AB_1}$ ，即 $n_2 \overline{AB} \sin i_2 = n_1 \overline{AB} \sin i_1$ ，即 $n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$ 。



平面波通过棱镜或透镜，将发生折射。折射后，方向和波面都会发生改变。棱镜、透镜的原理都可以从光程的变化进行解释。

例如，平面波射入棱镜之前，波面为 ABC ，射出时，经过的光程为 $n\overline{AA_1}$ ， $n\overline{BB_1}$ ， $n\overline{CC_1}$ ，各不相同，这时的波面，即等相位面必须处于 $A'B'C'$ 的方位，

才能使得 $n\overline{AA_1} + \overline{A_1A'} = n\overline{BB_1} + \overline{B_1B'} = n\overline{CC_1} + \overline{C_1C'}$ ，从 C 处入射的光到达另一侧表面 C' 时，从 C 点以上 x 处的 A 点入射的光应该到达距离另一侧表面上的出射点 A_1 为 $nx \tan \alpha$ 的球面上，由于出射后波面倒棱镜的距离是 x 的线性函数，故波面仍是平面。由图可以看出， $\overline{A_1A'} = \frac{x}{\cos \alpha} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha - \theta) = nx \tan \alpha$ ，即 $\sin(\alpha + \theta) = n \sin \alpha$ ，可以求出偏折角 θ 。

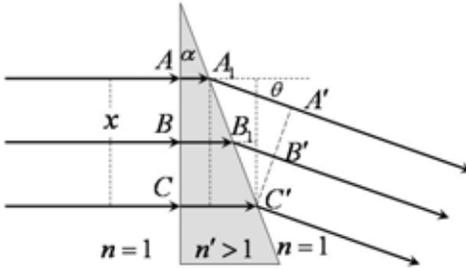


图 27

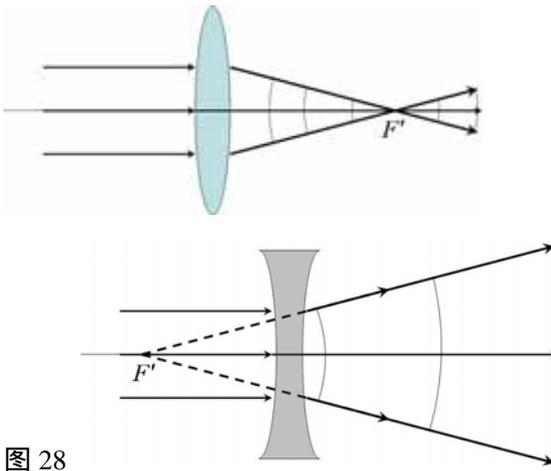


图 28

图 29

对于球面透镜，由于球面的形状是二次曲面的形式，所以平面波经过后，波面的形状发生改变，在满足近轴条件时，变为汇聚或者发散的球面波。

对于平面波，空间两点的光程差 $\Delta = j2\pi$ 时，其振动是相同的。平凸透镜中，如果将其分成一系列厚度为波长或波长整倍数的薄片，则在各个薄片的相应位置上，平面波的振动完全相同。所以，矩形薄片除了增加光程之外对折射并无贡献。可以将其去掉，只保留各个薄片两端上带有球面的部分，然后将它们放在同一个平面上，经过该透镜的平面光即平行光束仍将汇聚在原来的像方焦点上。根据这

一原理做成的透镜称为菲涅耳（Fresnel）透镜。但菲涅耳透镜不能用于成像。因为根据 Fermat 原理，平行光的汇聚点并不是像点。

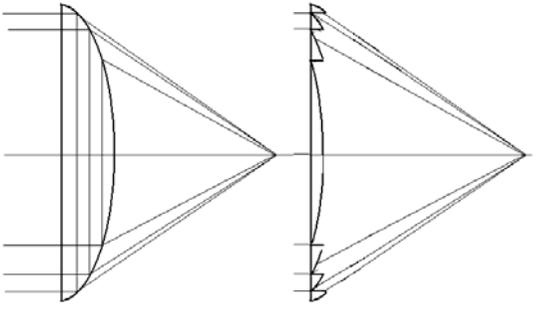


图 30 Fresnel 透镜

1.4.2 相位的超前与滞后

在光学中，时常要用到诸如“相位超前”或“相位滞后”等说法，这种超前或滞后的含义是什么？下面通过例子来说明。

第一，同一波场中不同空间点之间。如图所示，一维平面波，沿着 Z 方向传播， Z 轴上有 P 、 O 两点， P 点在 O 点的右侧。

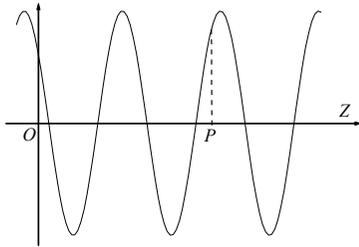


图 31

P 点的振动是由原点 O 传播出来的，即 P 点的振动比 O 点滞后。

如原点的振动用 $U(O, t) = A \cos(\varphi_0 - \omega t)$ 描述，而 P 点比 O 点延迟时间 Δt ，

即

$$\Delta t = OP / v = z / v$$

则 t 时刻 P 点的振动为 $t - \Delta t$ 时刻在 O 点的振动，即

$$U(P, t) = U(O, t - \Delta t) = A(P) \cos[\varphi_0 - \omega(t - z/v)]$$

$$= A(P) \cos[\varphi_0 - \omega t + (\omega/v)z] = A(P) \cos[\varphi_0 - \omega t + (2\pi/\lambda)z]$$

$$(\omega/v = 2\pi\nu/v\lambda = 2\pi/\lambda = k)$$

$$= A(P) \cos(kz + \varphi_0 - \omega t) = A(P) \cos[\varphi(P) - \omega t]$$

$\varphi(P) - \omega t = kz + \varphi_0 - \omega t$ ，为 P 点的相位。与 O 的相位比，增大了 kz

P 点的相位比 O 点滞后 kz ，在上述表达式中，相位大的为滞后。即在复数表达式或复振幅表达式中，相位数值大表示滞后。可以理解为，相位 φ 与光程成正比，光程大，则要落后，所以相位值大表示滞后。

但是，在有些著作中，由于习惯的原因，简谐波的表达式往往写作如下形式

$$U(P, t) = A(P) \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

在这种表达式中，情况则正好相反，相位的数值大表示超前。

第二，不同波在同一空间点。有两列波，在 O 点具有相同的相位，假设从 O 点开始沿着相同的方向传播。但经过时间 t 后，由于波的速度不同，两列波分别到达 P_1 和 P_2 点。即波列 1 比波列 2 滞后；或者，在相同的位置 P_2 ，波列 2 的

相位为 $\varphi_2 = k_2 z - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda_2} z - \omega t$ ，而波列 1 的相位为 $\varphi_1 = k_1 z - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda_1} z - \omega t$ 。

显然，由于 $\lambda_1 < \lambda_2$ ， $\varphi_1 > \varphi_2$ 。相位小表示超前。和第一种情况在表达方式上是相同的。

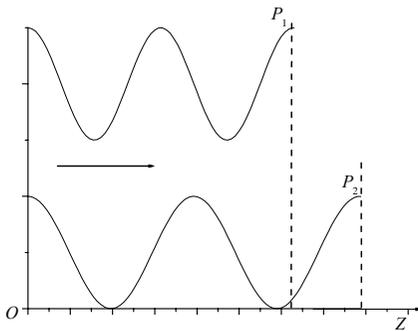


图 32

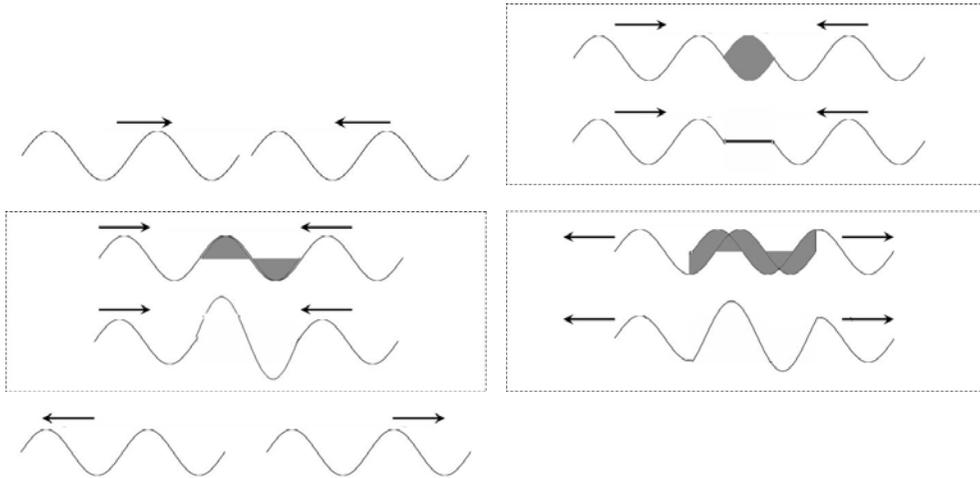
1.5 光波的叠加

光波场中各点都有振动，可以用复振幅来描述。振动本身是一个力学量，即是一个矢量，那么，如果几列波在空间相遇，则每一列波都将在这一点引起振动，这些波在相遇点引起的总的振动应该遵循力学的原理。

1.5.1 波的独立传播定律

从不同振源（扰动源）发出的波在空间相遇时，如振动不十分强烈，各个波将保持各自的特性不变，继续传播，相互之间没有影响。

独立传播定律是波动的最基本原理之一，不同的波之间，只要在振动不十分强烈的情况下，就不会相互影响，这一点与我们在力学中所熟悉的物体间的相互作用是不同的。



1.5.2 波的叠加原理

几列波在相遇点所引起的合振动是各个波独自在该点振动的矢量叠加。

成立的条件：介质为线性。在振动很强烈时，线性介质会变为非线性的。

注意要点：不是强度的叠加，也不是振幅的简单相加，而是振动矢量的叠加。

需要指出的是，虽然上述波的叠加原理阐述的是一般性的原理，适用于普遍的情况，但是在光学中往往用来处理分立、有限的几列波，或无限但可数的波列叠加的情况。

1.5.3 光的叠加方法

光的叠加，就是振动的叠加，即各列光波的电场强度矢量的叠加。对于没有偏振特性的光波，可以用标量的方法处理其叠加问题。

首先讨论同频率、同振动方向的单色光间的叠加。

1. 代数法（瞬时值法）

设两列波在相遇点的振动表示为

$$\psi_1 = A_1 \cos(\varphi_1 - \omega t) \quad (1.5.1)$$

$$\text{和 } \psi_2 = A_2 \cos(\varphi_2 - \omega t) \quad (1.5.2)$$

两振动相加后，仍为简谐振动。则有

$$\psi = A_1 \cos(\varphi_1 - \omega t) + A_2 \cos(\varphi_2 - \omega t)$$

$$\begin{aligned}
&= A_1 \cos \varphi_1 \cos \omega t + A_1 \sin \varphi_1 \sin \omega t + A_2 \cos \varphi_2 \cos \omega t + A_2 \sin \varphi_2 \sin \omega t \\
&= (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin \omega t \\
&= A(\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t) = A \cos(\varphi - \omega t)
\end{aligned}$$

$$\text{即, } \psi = \psi_1 + \psi_2 = A \cos(\varphi - \omega t) \quad (1.5.3)$$

其中

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2}}$$

$$A = \sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2}$$

$$= \sqrt{A_1^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) + A_2^2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)}$$

$$+ 2A_1 A_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\text{即, } A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1.5.4)$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (1.5.5)$$

2. 复数法

两列波的相遇点的夫政府可以写作

$$\tilde{U}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$$

$$\tilde{U}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$$

合振动的复振幅为

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = A e^{i\varphi}$$

可得 A^2 及 $\text{tg} \varphi$ 表达式与 (1.4.4) 和 (1.5.5) 相同。

3. 振幅矢量法

复振幅 $\tilde{U}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$, $\tilde{U}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$ 都是复数，可以用复平面上的矢量表示，如

图所示：求 $\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$ ，就是求两个矢量的和，即 \tilde{U} 可以按照矢量求和的方法得到。

这种方法比较直观，特别是对于多列波的叠加，处理起来更加方便。可以让各个矢量按次序首尾相接，相邻两矢量的夹角就是它们的相位差。

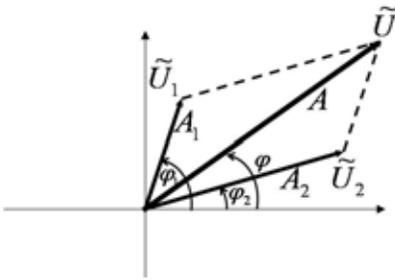


图 33

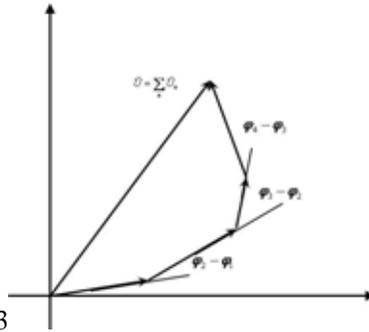


图 34

1.5.4 相互垂直的振动的叠加

若振动 ψ_1 , ψ_2 相互垂直，则可以直接应用矢量叠加的方法，得到合振动矢量，如图 35 所示。

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

两端取模的平方，因为 $\psi_1 \perp \psi_2$ ，故 $\psi_1 \cdot \psi_2^* = \psi_1^* \cdot \psi_2 = 0$ ，于是有

$$|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2, \text{ 即, } I = I_1 + I_2.$$

在这种情况下，两列波叠加后的光强就是它们各自的光强简单相加。

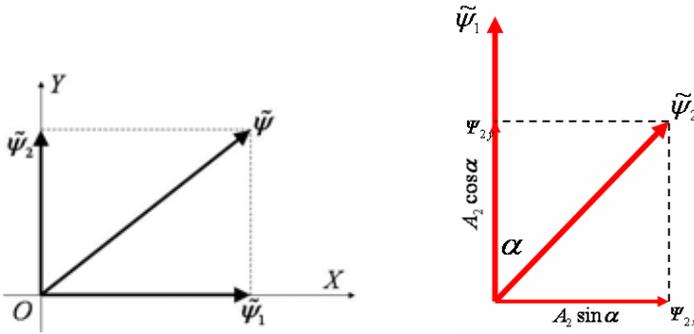


图 35 图 36

如两振动不平行，可将其中一个正交分解为和另一个分别平行、垂直的分量，再进行叠加。

$$\vec{\Psi} = \vec{\Psi}_1 + \vec{\Psi}_2 = (\Psi_1 + \Psi_{2y})\vec{e}_y + \Psi_{2x}\vec{e}_x$$

$$I = A_1^2 + A_{2y}^2 + 2A_1A_{2y} \cos \Delta\varphi + A_{2x}^2 = I_1 + I_2 + 2A_1A_2 \cos \alpha \cos \Delta\varphi$$

(1.5.6)

1.5.5 不同频率单色波的叠加

从数学上看，频率不同的两函数相加，其结果不能化简为一个简谐波的表达式，下面一个简单的例子可以说明这一点。

考虑振动方向相同、传播方向相同、振幅相同，频率不同的两列波，即

$$\psi_1 = A_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) \text{ 和 } \psi_2 = A_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t)$$

合振动

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$= 2A_0 \cos \frac{(k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cos \frac{(k_1 - k_2)z - (\omega_1 - \omega_2)t}{2}$$

$$= 2A_0 \cos(k_m z - \omega_m t) \cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t) \quad (1.5.7)$$

$$\text{其中 } \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad k_m = \frac{k_1 - k_2}{2}, \quad \omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

如果将 $2A_0 \cos(k_m z - \omega_m t)$ 看作是间歇部分 $\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$ 的振幅的话，则由于该振幅将随时间振荡，所以，合成后的光波场不再是定态的。但是，如果这两列

波的频率（波长）相差不大的话，即 $\bar{\omega} \approx \omega_1 \approx \omega_2$ ， $\bar{k} \approx k_1 \approx k_2$ ，而 ω_m 、 k_m 很小，相当于是 $\cos(k_m z - \omega_m t)$ 对 $\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$ 的振幅起调制作用，或者频率为 $\bar{\omega}$ 的波的振幅较缓慢地随时间变化，如下图示。

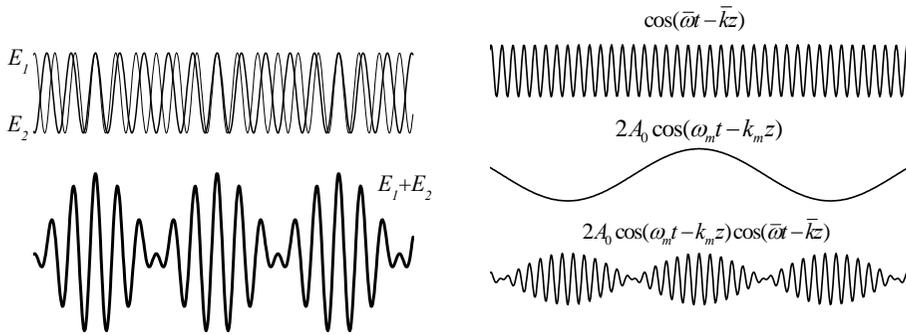


图 37

光强为

$$I = 4A_0^2 \cos^2(\omega_m t - k_m z) = 2A_0^2 [1 + \cos 2(\omega_m t - k_m z)] \quad (1.5.7)$$

形成光学拍，拍频为 $2\omega_m$ ，强度分布随时间和空间变化。

- 结论：
- 1、不同频率单色光叠加形成光学拍；
 - 2、不同频率的定态光波叠加形成非定态光。

§ 1.6 波包与群速度

一列单色波可以用复振幅表示为 $\tilde{U}(z, k, t) = a(z, k)e^{i(kz - \omega t)}$ 。而非单色光（即复色光）中包含有不同波长的光，实际上是波长不同的一系列单色波的叠加，叠加的结果将会形成“波群”。即

$$\tilde{U}(z, t) = \sum_k \tilde{U}(z, k, t) \quad (1.6.1)$$

如果这些非单色光的波长（波矢）是连续分布的，则上述求和变为积分，有

$$\tilde{U}(z, t) = \int_0^\infty \tilde{U}(z, k, t) = \int_0^\infty a(z, k)e^{i(kz - \omega t)} dk \quad (1.6.2)$$

设波矢的分布范围为 $k_0 \pm \Delta k / 2$ ，为计算简单，可以假设其中的各个单色成分有相等的振幅，如图所示，即

$$a(z, k) = A / \Delta k . \quad (1.6.3)$$

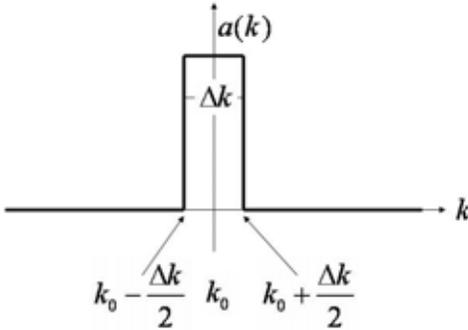


图 38

假设非单色波的波长范围 $\Delta\lambda$ 或 Δk 相当有限，是所谓的“准单色波”。对于准单色波，由于其波长范围很小，可以将 $\omega = \omega(k)$ 用 Taylor 公式展开，并取到 1 级近似，有

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} (k - k_0) \quad (1.6.4)$$

$$\text{记} \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = v_g$$

$$\begin{aligned} kz - \omega t &= kz - \left[\omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} (k - k_0) \right] t \\ &= (k - k_0)z - v_g (k - k_0)t + k_0 z - \omega(k_0)t \quad (1.6.5) \end{aligned}$$

积分 (1.6.2) 式化为

$$\tilde{U}(z, t) = \frac{A}{\Delta k} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{i[(k - k_0)z - v_g (k - k_0)t]} e^{i(k_0 z - \omega(k_0)t)} dk ,$$

记 $k - k_0 = k'$ ， $\omega(k_0) = \omega_0$ ，则有

$$\begin{aligned}\tilde{U}(z,t) &= \frac{A}{\Delta k} \left[\int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{ik'(z-v_g t)} dk \right] e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} = \frac{A}{\Delta k} \frac{e^{i\frac{\Delta k}{2}(z-v_g t)} - e^{-i\frac{\Delta k}{2}(z-v_g t)}}{i(z-v_g t)} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \\ &= \frac{A}{\Delta k} \frac{2i \sin \frac{\Delta k}{2}(z-v_g t)}{i(z-v_g t)} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} = A \frac{\sin \frac{\Delta k}{2}(z-v_g t)}{\frac{\Delta k}{2}(z-v_g t)} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}\end{aligned}$$

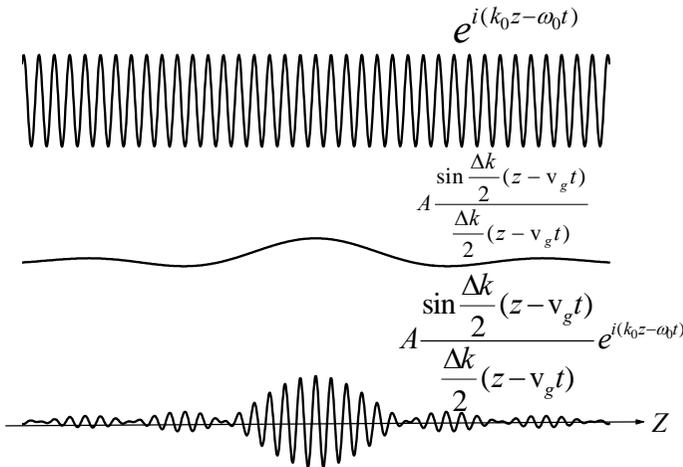


图 39

上述有一定波长分布范围的非单色波叠加的结果，可以用图表示，是具有不同频率的两部分的乘积：高频部分的角频率为 $\omega(k_0)$ ，波矢为 k_0 ；低频部分的角频率为 $\frac{1}{2} v_g \Delta k$ ，波矢为 $\frac{\Delta k}{2}$ 。由于低频部分变化缓慢，可以将其并入振幅部分。

则总的效果相当于波矢为 k_0 ，频率为 $\omega(k_0)$ ，振幅为 $A \frac{\sin \frac{\Delta k}{2}(z - v_g t)}{\frac{\Delta k}{2}(z - v_g t)}$ 的波。

即

$$\tilde{U}(z,t) = \left[A \frac{\sin \frac{\Delta k}{2}(z - v_g t)}{\frac{\Delta k}{2}(z - v_g t)} \right] e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \quad (1.6.6)$$

由于振幅在空间是震荡衰减的，合成的波的有效部分，只是途中的中央主极

大，而其余部分由于振幅小得多，效果不明显，从而形成了一个波包。其主极大值的位置为 $z_0 = v_g t$ ，相邻极小值的位置由 $\frac{\Delta k}{2}(z_{\pm 1} - v_g t) = \pi$ 决定，即 $z_{\pm 1} = v_g t \pm \frac{2\pi}{\Delta k}$ 。其有效分布区域、即中央极大分布区域的一半为

$$\Delta Z = 2\pi / \Delta k = \lambda^2 / \Delta \lambda \quad (1.6.7)$$

这就是波列的有效长度

$$L_0 = \Delta Z = \lambda^2 / \Delta \lambda \quad (1.6.8)$$

用频率表示

$$\frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = \frac{\lambda^2 v^2}{\Delta v c} = \frac{c}{\Delta v} \quad (1.6.9)$$

也可以表示为 $L_0 = c / \Delta v$ (1.6.10)

波包的速度为

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.6.11)$$

就是这些不同频率的单色波叠加之后所形成的波群传播的速度，称为群速度。

$\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} = v_g$ 则为其中每一单色成分的速度，即波的相速度。

由于 $\omega = \frac{2\pi}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} v_p = k v_p$ ，所以有 $\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_p)}{dk} = \mathbf{v}_p + k \frac{d\mathbf{v}_p}{dk}$ ，

而 $dk = d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda = -\frac{k}{\lambda} d\lambda$ ，最后得到

$$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} \quad (1.6.12)$$

$\frac{dv_p}{d\lambda}$ 反映的是波的色散关系，即不同波长的单色波有不同的速度。

在真空中，没有色散， $\frac{dv_p}{d\lambda} = 0$ ，因而 $v_g = v_p$ ，波的群速度和相速度都是

c 。但是，在介质中， $\frac{dv_p}{d\lambda} \neq 0$ ， $v_g \neq v_p$ 。

如果 $\frac{dv_p}{d\lambda} > 0$ ，则 $v_g < v_p$ ；如果 $\frac{dv_p}{d\lambda} < 0$ ， $v_g > v_p$ 。通常情况下，由于

短波的折射率较大，所以 $\frac{dv_p}{d\lambda} > 0$ ， $v_g < v_p$ ，即群速度小于相速度。

由于非单色波的能量主要集中在波包中，因而波包的速度，即群速度，就是波所携带的能量传播的速度，也就是实验上测得的波的速度。严格的单色波实际上是不存在的，所以，而介质通常都是有色散的，所以在介质中测量所得到的光速，都是群速度。只有在真空中，由于 $v_g = v_p$ ，测得的光速才与相速度相等。

目前光速的值

$$c = m/s$$

就是