

科目：数学分析

1. (15分) 定义函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

证明 f 在 $(0, 0)$ 处连续但不可微.

2. (20分) 设 $f_n(x) = x^n \log x$, n 是自然数.

(i) 证明

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$f_n'(x) = n f_{n-1}(x) + x^{n-1}$
两边同时对于 x^{n-1} 求导
 $f_n^{(n)}(x) = n f_{n-1}^{(n-1)}(x) + (n-1)!$
即证 (i)

(ii) 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$$

构造数列

完整版，请访问 www.kaoyancas.net 科大科院考研网 { 专注于中科大、中科院考研

3. (15分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中，由下列平面