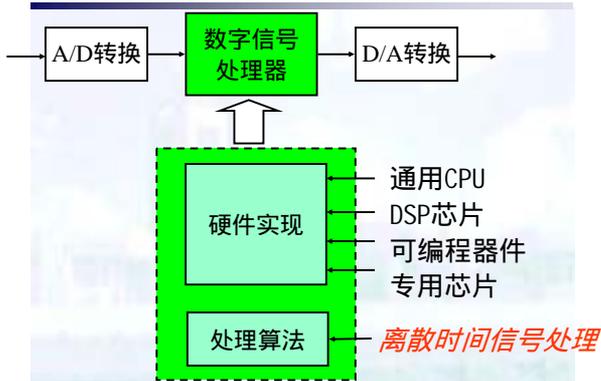


数字信号处理

绪论

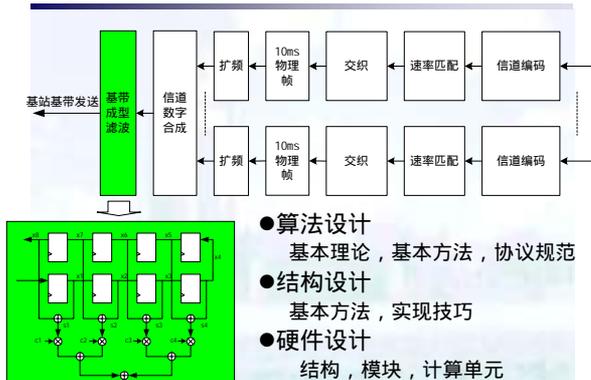
绪论



常用的硬件实现方法

- 通用CPU
Intel 80x86系列, ARM系列
- DSP芯片
AD系列, TI系列
- 可编程器件
FPGA (Field Programmable Gate Array)
- 专用芯片
ASIC (Application Specific Integrated Circuit)

绪论



数字信号处理系统的基本设计过程与本课程的关系



1 离散时间信号与系统

1.1 引言

1.1 引言

信号分类：取值形式；变化规律；能量特征

- 取值形式 - 时间与信号幅度
模拟信号：时间与幅度均连续
连续时间信号：时间连续，幅度连续或离散
离散时间信号：时间离散，幅度连续或离散
数字信号：时间与幅度均离散

1.1 引言

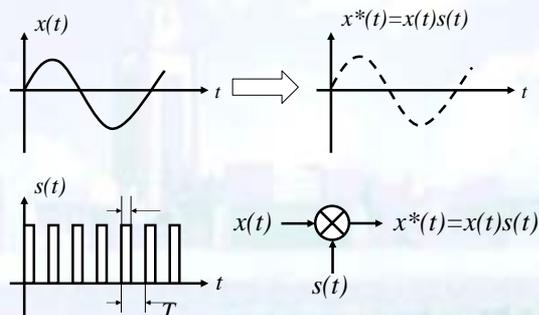
信号分类：

- 变化规律 - 确定信号
- 随机信号
- 能量特征 - 能量信号
能量有限，平均功率为零
- 功率信号
平均功率有限，能量无限

1.2 连续时间信号的离散化

1.2 连续时间信号的离散化

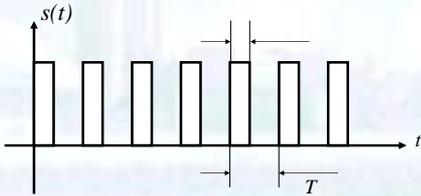
对信号进行均匀取样：



1.2 连续时间信号的离散化

两个重要因素：

- 1) 取样周期 T ，或取样频率 $f_s = \frac{1}{T}$
- 2) 取样脉冲宽度



1.2 连续时间信号的离散化

□ 取样周期 T 对取样信号的影响

设 $s(t)$ 为理想冲激取样脉冲， $\ll T$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_s t}, \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x(t)s(t) \\ &= x(t) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_s t} \end{aligned}$$

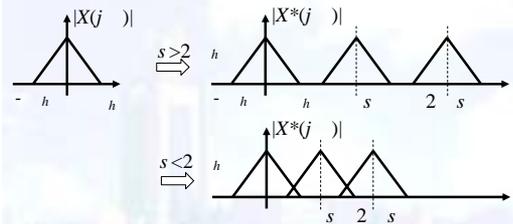
1.2 连续时间信号的离散化

$x^*(t)$ 的功率谱：

$$\begin{aligned} X^*(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - n\Omega_s)] \end{aligned}$$

这里 $\Omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$ ， $X(j\Omega)$ 为 $x(t)$ 的功率谱

1.2 连续时间信号的离散化



结论：经过取样，原信号的频谱被周期性地扩展，当 $s < 2h$ 时，发生频谱混迭。

1.2 连续时间信号的离散化

取样定理

设信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(j\Omega)$ ，且当 $|\Omega| > h$ 时， $X(j\Omega) = 0$ ；则 $x(t)$ 可由其均匀取样值重建，

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \frac{\sin \Omega_h(t - nT)}{\Omega_h(t - nT)}$$

这里 $T = \frac{\pi}{\Omega_h}$

h ：信号 $x(t)$ 的截止频率（最高频率）

1.2 连续时间信号的离散化

取样定理的证明：

在 $|\Omega| < \Omega_h$ 的范围内， $X(j\Omega)$ 可用 Fourier 序列表示，

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\Omega T / \Omega_h}$$

$$x_n = \frac{1}{2\Omega_h} \int_{-\Omega_h}^{\Omega_h} X(j\Omega) e^{jn\Omega T / \Omega_h} d\Omega$$

$$\therefore X(j\Omega) = 0, \text{ 当 } |\Omega| \geq \Omega_h$$

$$\therefore x_n = \frac{2\pi}{2\Omega_h} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{jn\Omega T / \Omega_h} d\Omega$$

$$= Tx(nT), \quad T = \frac{\pi}{\Omega_h}$$

1.2 连续时间信号的离散化

$$\therefore X(j\Omega) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T x(nT) e^{-jnT\Omega} & |\Omega| < \Omega_h \\ 0 & |\Omega| \geq \Omega_h \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{且有 } x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \Omega_b(t-nT)}{\Omega_b(t-nT)} \end{aligned}$$

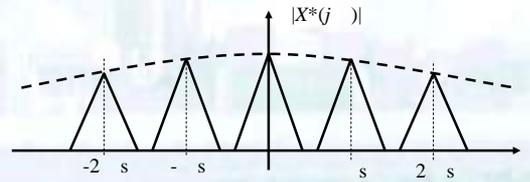
结论：只要取样频率 $s > 2 f_h$ ，原信号可以通过取样重建

1.2 连续时间信号的离散化

□ 取样脉宽 对取样信号的影响

若 $\tau \neq 0$ ，则有

$$X^*(j\Omega) = \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\Omega_s \tau / 2}{n\Omega_s \tau / 2} X[j(\Omega - n\Omega_s)]$$



1.2 连续时间信号的离散化

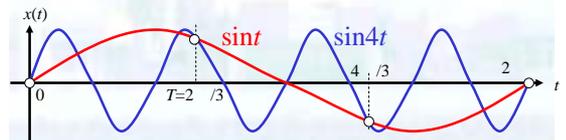
□ 关于取样信号频谱周期延拓的时域理解

考虑一个正弦信号 $x_1(t) = e^{j\Omega_1 t}$ ，对其作周期为 T 的取样，

$$\begin{aligned} x_1(nT) &= e^{j\Omega_1 nT} \\ &= e^{j\Omega_1 nT} \cdot e^{j2\pi nk} \\ &= e^{jnT(\Omega_1 + \frac{2\pi}{T}k)} \\ &= e^{jnT(\Omega_1 + k\Omega_s)} \end{aligned}$$

1.2 连续时间信号的离散化

在同样的取样率下， $x_2(t) = e^{j(\Omega_1 + k\Omega_s)t}$ 与 $x_1(t)$ 有着相同的取样值。取样序列 $x_1(nT)$ 所表示的频率成分为 $(\Omega_1 + k\Omega_s)$ ， k 为任意整数，对应的连续序列不唯一。



1.2 连续时间信号的离散化

□ 利用取样信号恢复原信号

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow x(t)$$

以模拟形式表示一个离散时间信号：

$$x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

1.2 连续时间信号的离散化

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x'(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - \tau - nT) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT) \end{aligned}$$

← 一般表达

1.2 连续时间信号的离散化

□利用取样信号恢复原信号

1) 理想情况：非因果低通滤波器

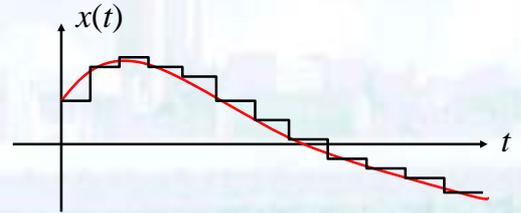
$$h(t) = \frac{\sin \Omega_h t}{\Omega_h t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \frac{\sin \Omega_h(t - nT)}{\Omega_h(t - nT)}$$

1.2 连续时间信号的离散化

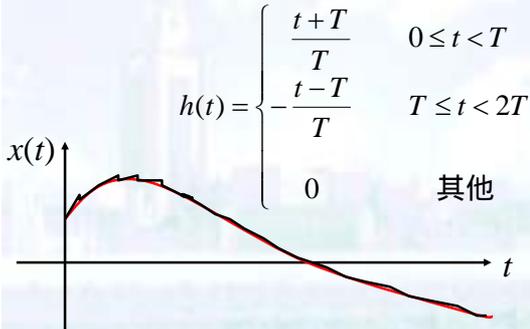
2) 零阶保持电路 (外推)

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



1.2 连续时间信号的离散化

3) 一阶保持电路 (外推)



$$h(t) = \begin{cases} \frac{t+T}{T} & 0 \leq t < T \\ -\frac{t-T}{T} & T \leq t < 2T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

1.2 连续时间信号的离散化

考察 $n_0 T < t < (n_0 + 1)T$ 间隔内的输出

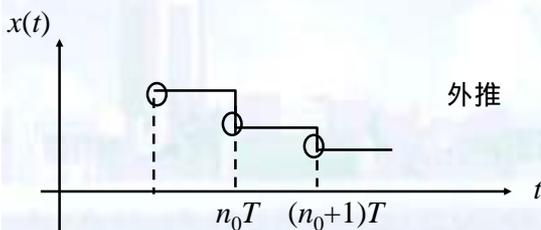
1) 零阶保持

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(t - n_0 T) &= 1, & n &= n_0 \\ h(t - n_0 T) &= 0, & n < n_0 \text{ or } n > n_0 \end{aligned}$$

1.2 连续时间信号的离散化

$$\therefore x(t) = x(n_0 T), \quad n_0 T < t < (n_0 + 1)T$$



1.2 连续时间信号的离散化

2) 一阶保持 (外推)

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t+T}{T} & 0 \leq t < T \\ -\frac{t-T}{T} & T \leq t < 2T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

1.2 连续时间信号的离散化

当 $n_0T < t < (n_0 + 1)T$ 时 ,

$$h(t - n_0T) = \frac{t - n_0T + T}{T} \quad n = n_0$$

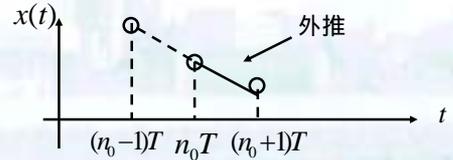
$$h[t - (n_0 - 1)T] = -\frac{t - n_0T}{T} \quad n = n_0 - 1$$

$$h(t - nT) = 0 \quad \text{其他}$$

1.2 连续时间信号的离散化

$\therefore x(t)$

$$= x(n_0T) + [x(n_0T) - x((n_0 - 1)T)] \frac{t - n_0T}{T}$$



1.2 连续时间信号的离散化

3) 一阶保持 (内插)

$$h(t) = \begin{cases} -\frac{t-T}{T} & 0 \leq t < T \\ \frac{t+T}{T} & -T \leq t < 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

1.2 连续时间信号的离散化

当 $n_0T < t < (n_0 + 1)T$ 时 ,

$$h(t - n_0T) = -\frac{t - n_0T - T}{T} \quad n = n_0$$

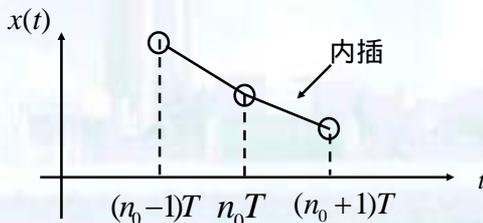
$$h[t - (n_0 + 1)T] = \frac{t - n_0T}{T} \quad n = n_0 + 1$$

$$h(t - nT) = 0 \quad \text{其他}$$

1.2 连续时间信号的离散化

$\therefore x(t)$

$$= x(n_0T) + [x((n_0 + 1)T) - x(n_0T)] \frac{t - n_0T}{T}$$



1.3 离散时间信号

□信号用离散时间序列表示

$$x(n) = x(nT), t = nT$$

□基本运算

积 $x \cdot y = x(n)y(n)$

加减 $x \pm y = x(n) \pm y(n)$

标乘 $A \cdot x = Ax(n)$

延时 (移位) $y(n) = x(n-n_0)$

□数字域频率 $\omega = \frac{\Omega}{f_s} = \Omega T$

$$\sin \Omega t = \sin \Omega nT = \sin n\omega$$

频率的归一化表示

用数字域频率表示的其他频率概念

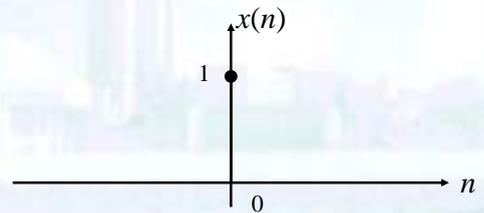
取样频率 $\omega_s = \frac{\Omega_s}{f_s} = \frac{2\pi f_s}{f_s} = 2\pi$

折叠频率 $\omega_0 = \frac{\omega_s}{2} = \pi$

信号最高频率 $\omega_h = \frac{\Omega_h}{f_s} = 2\pi \cdot \frac{f_h}{f_s}$

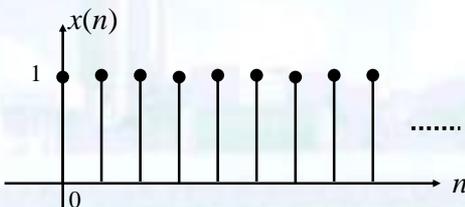
□常用序列

单位取样序列 $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$



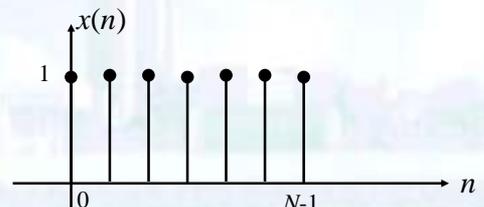
□常用序列

单位阶跃序列 $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$



□常用序列

矩形序列 $R(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & 0 < n, n \geq N \end{cases}$



1.3 离散时间信号

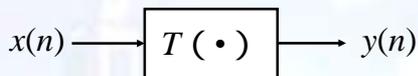
□序列的周期性 $x(n)=x(n+N)$ ，周期为 N

□序列能量
$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

1.4 离散时间线性非时变系统

1.4 离散时间线性非时变系统

□离散时间系统



$$y(n) = T[x(n)]$$

离散时间系统：对离散序列的一种运算

1.4 离散时间线性非时变系统

线性
$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

非时变 若 $y(n) = T[x(n)]$
则 $T[x(n-k)] = y(n-k)$

1.4 离散时间线性非时变系统

□单位取样响应

系统对单位取样序列的响应：

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

以此刻划系统的时域特性

1.4 离散时间线性非时变系统

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= x(n) * h(n) \quad \longleftarrow \text{卷积运算} \end{aligned}$$

□卷积（和）运算

定义：

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(k-n)$$

交换律 $x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$

结合律 $[x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n) = x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)]$

分配律 $x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)$

□系统的稳定性：输入有界 输出有界

充要条件 $\sum_{-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

□系统的因果性：输出结果与未来无关

充要条件 $h(n) = 0, \quad n < 0$

□因果序列 $x(n) = 0, \quad n < 0$

□系统的差分方程表示

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

线性非时变 常系数线性方程

□系统对正弦信号的响应 - 频率响应

设 $x(n] = e^{j\omega n}$

则 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)}$

$$= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k}$$

记 $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k}$

则 $y(n) = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$

引入离散时间序列的傅氏变换概念。

1.5 离散时间序列的傅氏变换 (DTFT)

1.5 离散时间序列的傅氏变换 (DTFT)

□定义
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$x(n)$ 离散, $X(e^{j\omega})$ 连续

$x(n)$ 非周期, $X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期

1.5 离散时间序列的傅氏变换 (DTFT)

□主要性质

时域平移 $x(n-k) \leftrightarrow e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$

频域平移 $e^{j\omega_0 n} x(n) \leftrightarrow X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$

共轭对称 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

时域卷积 $x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega})$

能量守恒
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

1.6 离散时间序列的 Z 变换

1.6 离散时间序列的 Z 变换

□定义

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

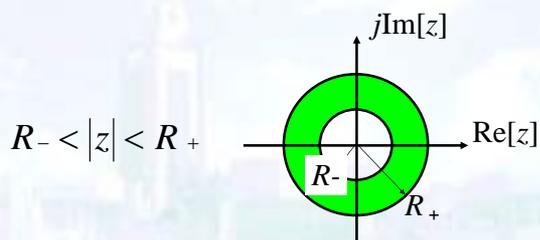
□收敛域: 使级数收敛的所有 z 值的集合

□收敛条件:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) z^{-n}| < \infty$$

若 $x(n)$ 绝对可和, 则 $X(z)$ 绝对收敛

1.6 离散时间序列的 Z 变换

□收敛域的一般描述



□有理函数表达

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

零点 z_0 : $P(z_0)=0$, $X(z_0)=0$

极点 z_p : $Q(z_p)=0$, $X(z_p)$

收敛域内不能有极点，以极点来限定收敛边界。

□序列特性与收敛域 (1)

有限长序列 $X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$

不同收敛域的4种情况：

$n_1 < 0, n_2 < 0$ $0 < |z| < \infty$

$n_1 < 0, n_2 > 0$ $0 < |z| < \infty$

$n_1 > 0, n_2 > 0$ $0 < |z| < \infty$

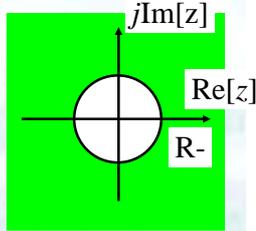
$n_1 = 0, n_2 = 0$ $0 < |z| < \infty$

□序列特性与收敛域 (2)

右边序列 $X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$n_1 \geq 0$, $x(n)$ 为因果序列，
收敛域包括

$n_1 < 0$, 收敛域不含

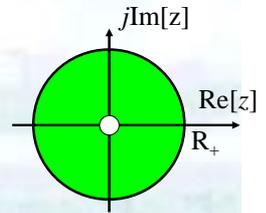


□序列特性与收敛域 (3)

左边序列 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$

$n_2 \leq 0$, 收敛域包括圆点

$n_2 > 0$, 收敛域不含圆点



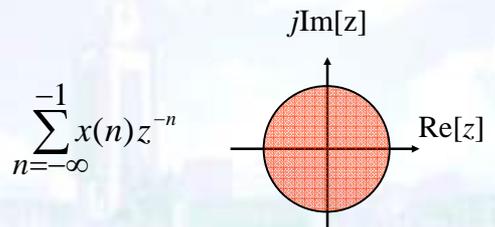
□序列特性与收敛域 (4)

双边序列

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

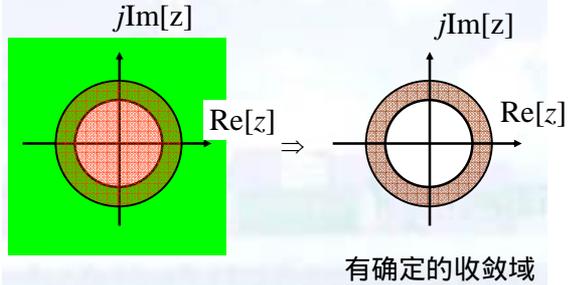
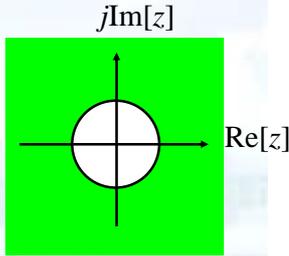
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

□序列特性与收敛域 (4)



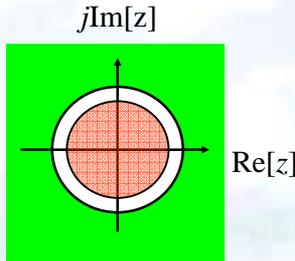
□ 序列特性与收敛域 (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



有确定的收敛域

没有相交的收敛域，
 $X(z)$ 不收敛



□ 反变换

- 1) $X(z)$ 部分分式展开，配合查表
- 2) $X(z)$ 幂级数展开
- 3) 应用留数定理求解围线积分

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz$$

围线 C 在 $X(z)$ 的收敛域内

设 z_k 为围线内 s 阶极点

$$x(n) = \sum_k \text{Res}[X(z)z^{n-1}, z_k]$$

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}, z_k]$$

$$= \frac{1}{(s-1)!} \cdot \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} [(z - z_k)^s X(z)z^{n-1}] \Big|_{z=z_k}$$

对右边序列，不考虑 $n < 0$ 引入的极点
对左边序列，不考虑 $n > 0$ 引入的极点

□ Z 变换的主要性质

- 1) 线性

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$$

- a) $X(z)$ 与 $Y(z)$ 极点不能相互抵消

收敛域： $R_x \cap R_y$

- b) $X(z)$ 与 $Y(z)$ 部分极点相互抵消

收敛域扩大

例： $x(n)=a^n u(n)$, $y(n)=a^n u(n-N)$

收敛域均为 $|z|>|a|$

而 $x(n)-y(n)=a^n u(n)-a^n u(n-N)$

收敛域扩大为 $|z|>0$

2) 时域移位

$$x(n+n_0) \leftrightarrow z^{n_0} X(z)$$

收敛域可能发生变化：

- a) $n_0>0$, 在 $z=$ 引入新极点
- b) $n_0<0$, 在 $z=0$ 引入新极点

例：求反变换

$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

利用部分分式展开， $X(z) = -4 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$

$$\text{则， } x(n) = -4\delta(n) + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

利用时域移位特性

$$X(z) = z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

则

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1) = -4\delta(n) + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

3) 指数序列相乘 $a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z)$

收敛域： $|a|R_x$

$X(z)$ 零极点的尺度与幅角发生改变

若 $a = e^{j\omega_0}$, 则实现频率偏移 (调制)
与DTFT的频移性质类似。

例：利用指数序列相乘性质求Z变换

$$\begin{aligned} \text{求 } x(n) &= r^n \cos(\omega_0 n) u(n) \\ &= \frac{1}{2} (re^{j\omega_0})^n u(n) + \frac{1}{2} (re^{-j\omega_0})^n u(n) \end{aligned}$$

$$\text{已知 } u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$\frac{1}{2} (re^{\pm j\omega_0})^n u(n) \leftrightarrow \frac{1/2}{1 - re^{\pm j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > r$$

$$\begin{aligned} \therefore X(z) &= \frac{1/2}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - r \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r \end{aligned}$$

4) $X(z)$ 微分

$$n x(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{收敛域不变}$$

例：求反变换

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) \quad (|z| > |a|)$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1 + az^{-1}}$$

利用微分性质

$$-z \cdot \frac{-az^{-2}}{1 + az^{-1}} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} \leftrightarrow nx(n)$$

其中，

$$\frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}} = z^{-1} \cdot \frac{a}{1 + az^{-1}} \leftrightarrow a(-a)^{n-1} u(n-1)$$

$$\therefore x(n) = (-1)^{n+1} a^n u(n-1) / n$$

5) 时域卷积

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) X_2(z)$$

$$\text{收敛域: } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

例：已知

$$x_1(n) = a^n u(n)$$

$$x_2(n) = u(n)$$

求 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{z^2}{(z - a)(z - 1)} \\ &= \frac{1}{1 - a} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{a}{1 - az^{-1}} \right), \quad |z| > 1 \\ \therefore y(n) &= \frac{1}{1 - a} [u(n) - a^{n+1} u(n)] \end{aligned}$$

6) 时域乘积 $w(n) = x(n)y(n)$

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_x} X(v)Y(z/v)v^{-1}dv$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_y} X(z/v)Y(v)v^{-1}dv$$

Cx: $X(v)$ 与 $Y(z/v)$ 收敛域重合部分的围线Cy: $X(z/v)$ 与 $Y(v)$ 收敛域重合部分的围线

难点: 确定极点是否落在围线之内

例: $x_1(n) = a^n u(n)$, $x_2(n) = b^n u(n)$

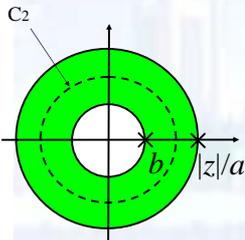
$$w(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

求 $W(z) = Z\{w(n)\}$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |z| > |b|$$

$$\text{则 } W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} \frac{-(z/b)}{v-z/a} \cdot \frac{1}{v-b} dv$$

 $X_2(v)$ 收敛域为 $|v| > b$ $X_1(z/v)$ 的收敛域为 $|z/v| > a$

$$\left| \frac{z}{v} \right| > a \Rightarrow v < \frac{|z|}{a}$$

所以, C_2 仅包含一个极点 $v=b$

$$W(z) = \frac{1}{1-abz^{-1}}, \quad |z| \geq |ab|$$

7) Parseval定理

$$x(n) \rightarrow X(z), \quad y(n) \rightarrow Y(z)$$

$$R_{x-} R_{y-} < 1, \quad R_{x+} R_{y+} > 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

$$\max\left\{R_{x-}, \frac{1}{R_{y+}}\right\} < |v| < \min\left\{R_{x+}, \frac{1}{R_{y-}}\right\}$$

 $x(n) = y(n)$ 时, 推出序列能量关系

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

8) 序列终值

因果序列 $x(n]$ ，在单位圆上可有一阶极点

$$\text{则 } x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

$$\begin{aligned} (z-1)X(z) &= (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} x(n+1)z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-1}^N x(n+1)z^{-n} - \sum_{n=0}^N x(n)z^{-n} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-1}^N x(n+1) - \sum_{n=0}^N x(n) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} x(N+1) \\ &= x(\infty) \end{aligned}$$

9) 序列初值

$$\text{因果序列, } x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

10) 时间倒置

$$x(-n) \leftrightarrow X(1/z), \text{ 收敛域: } 1/R_x$$

11) 共轭

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*), \text{ 收敛域不变}$$

□ Z变换与拉氏变换

Z变换：离散信号变换到复频域 - Z平面

L变换：连续信号变换到复频域 - S平面

$$\begin{aligned} L[x(t)] &= X(s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\Omega \end{aligned}$$

先将连续信号离散化，然后进行拉氏变换

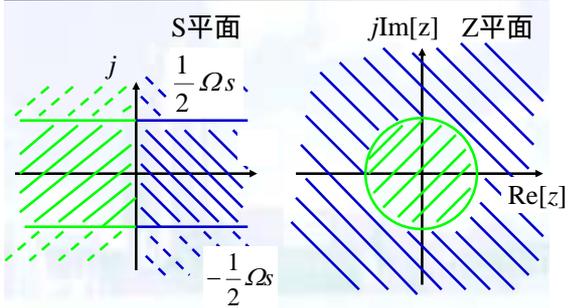
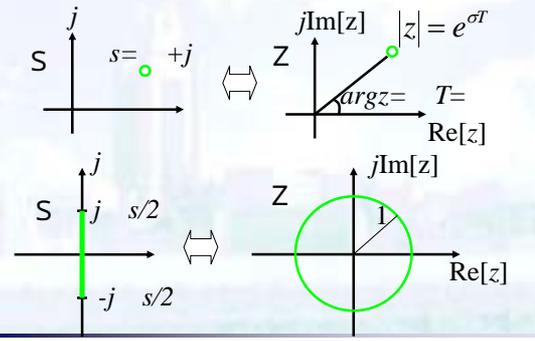
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-nT)$$

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-nsT}$$

与Z变换比较，

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T + j\Omega T}, \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

□ S平面到Z平面的映射变换



S平面的点周期性地映射到Z平面，对应点不唯一

□ Z变换与傅氏变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

若收敛域包括单位圆，取 $z = e^{j\omega}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$x(n)$ 序列傅氏变换是Z变换的一个特例：
单位圆上的Z变换

1.7 离散时间系统的系统函数

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对两边取Z变换

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = Z[h(n)] \text{ —系统函数}$$

系统用差分方程表示

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-k)$$

两边取Z变换，得

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

1.7 离散时间系统的系统函数

稳定系统的定义： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

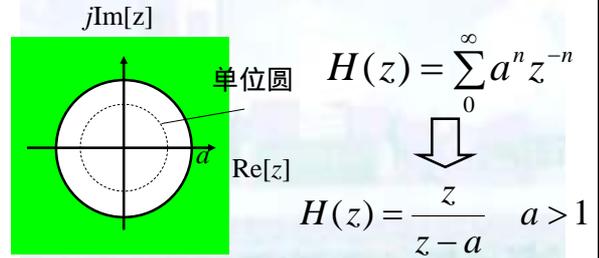
故，稳定系统 $H(z)$ 的收敛域必须包括单位圆。

因果系统的定义： $h(n)=0, n<0$

故，因果系统 $H(z)$ 的收敛域必须包括无穷远。

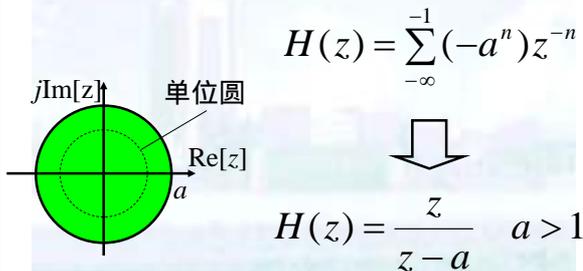
1.7 离散时间系统的系统函数

稳定系统： $H(z)$ 在单位圆上必没有极点。反之不充分，单位圆上没有极点不一定稳定：



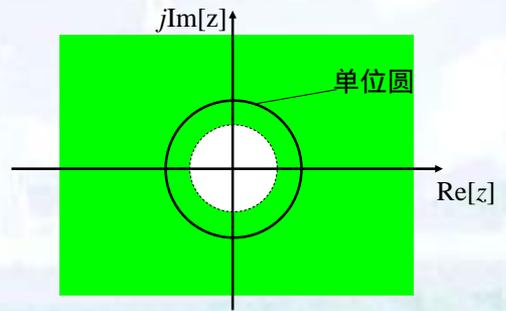
1.7 离散时间系统的系统函数

因果系统： $H(z)$ 在无穷远处必没有极点。反之不充分，无穷远处没有极点不一定因果。



1.7 离散时间系统的系统函数

稳定因果系统：极点全部位于在单位圆内



1.7 离散时间系统的系统函数

系统的频率响应：系统函数 $H(z)$ 在单位圆上

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

与单频输入导出的结果相同。

1.7 离散时间系统的系统函数

输入、输出之间的一般频谱关系：

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

对单频输入 $x(n) = Ae^{j\omega n}$ ，在形式上有

$$y(n) = H(e^{j\omega})Ae^{j\omega n}$$

对一般输入 $x(n)$ ， $y(n) \neq H(e^{j\omega})x(n)$