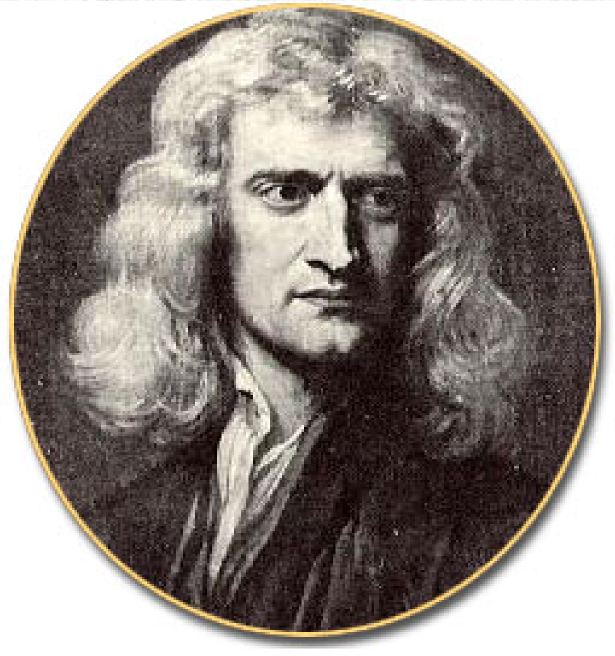
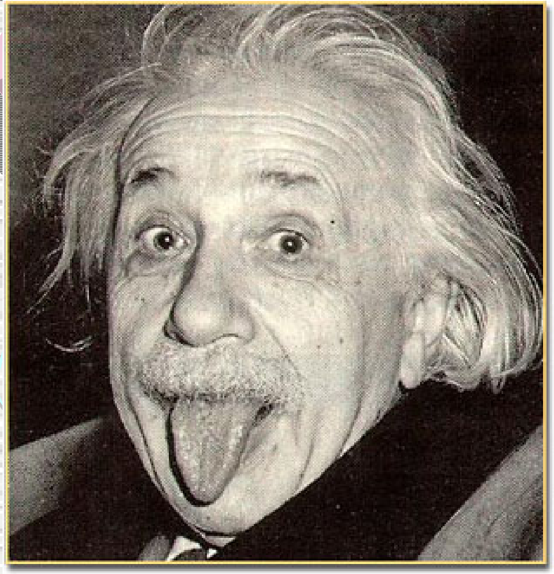


力学



第一章

杨维纮

中国科学技术大学

第一章 质点运动学

§1.1 引 言

§1.1 引 言

1.1.1 力学的研究对象

运动学：研究物体运动的几何性质，而不研究引起物体运动的原因。（位移，速度，加速度，轨迹等的描述和计算）

动力学：研究受力物体的运动变化与作用力之间的关系。（运动微分方程的建立和求解）

静力学：研究物体在力系作用下的平衡规律，同时也研究力的一般性质和力系的简化方法等。（平衡方程的应用和受力分析）

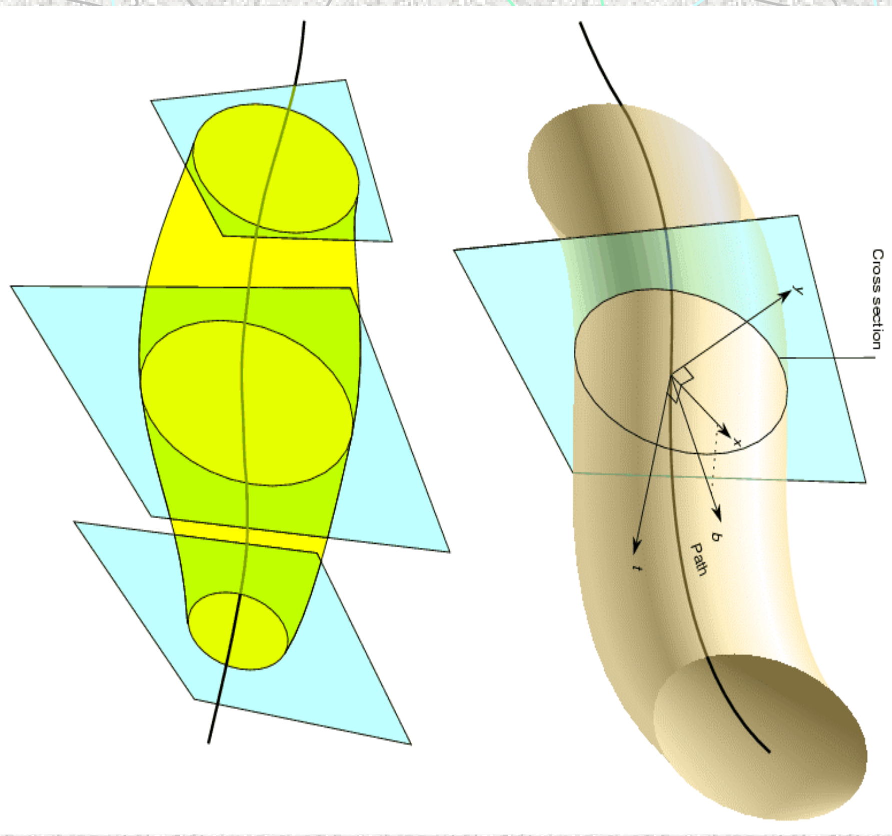
经典力学适用范围：弱引力场中宏观物体的低速运动。

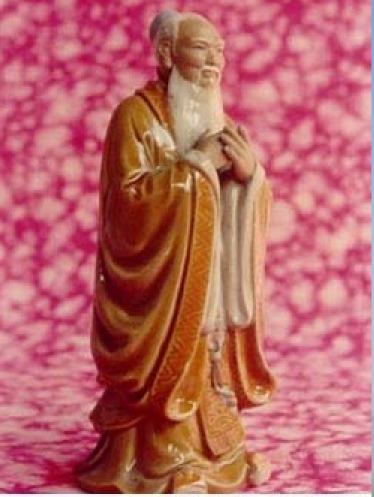

...SO, YOU SEE THE ORBIT OF A PLANET IS ELLIPTICAL
WHAT'S AN ORBIT?
WHAT'S A PLANET?
WHAT'S ELLIPTICAL?
Johannes Kepler
S. harris

1.1.2 时间、空间和牛顿力学的绝对量

时间：　时间用以表述事物之间的顺序

空间：　空间用以表述事件相互之间的位形



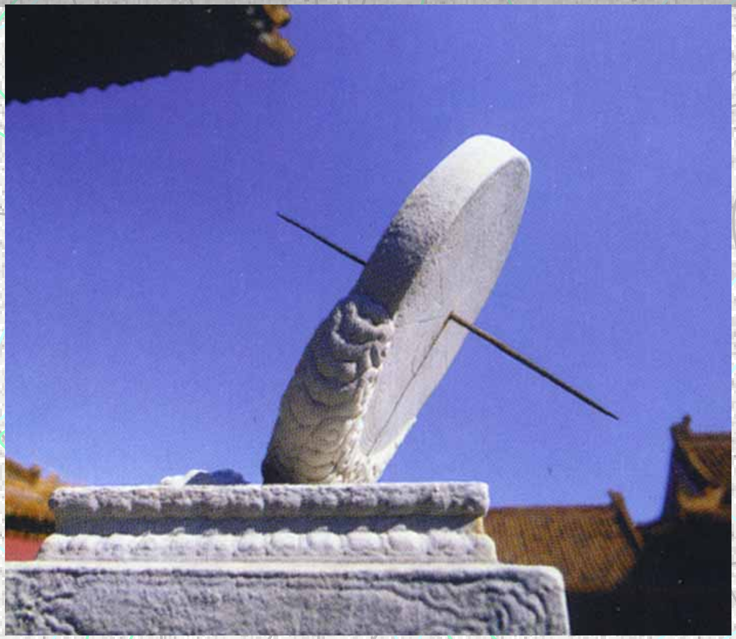


圖片由吳汝寧先生提供

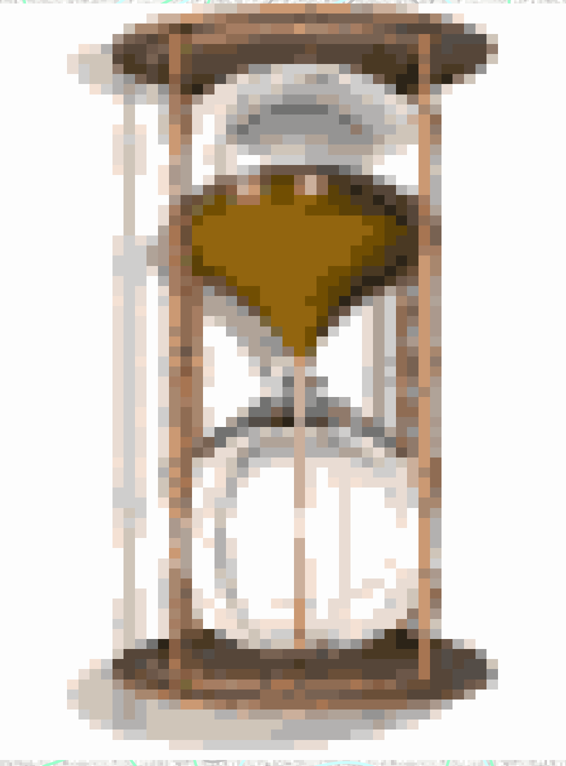
朴素时间观

太阳每天会升起，
一年四季总更替。

子在川上曰：
“逝者如斯夫，不舍昼夜。”
－－《论语》



我们今天还能见到的古代日晷位于北京故宫太和殿前的明清时期的日晷。它是一个圆形的石盘，两面都有刻度，盘中心竖立一根铁针，沿赤道面斜立在汉白玉基座上。



只要使漏壶中的水位基本固定，滴水速度就可以保持稳定，从而提高了计时的准确性。后人又增加了漏壶的级数，出现了二、三级，甚至是四级漏壶，但三级漏壶最为普及。

时间的测量：

任何具有重复性的过程或现象，都可以作为测量时间的一种钟。

时间的测量：

1967年10月在第十三届国际度量衡会议上规定：

位于海平面上的铯原子的基态的两个超精细能级在零磁场中跃迁辐射的周期T与1秒的关系为

1秒 = 9,192,631,770 T

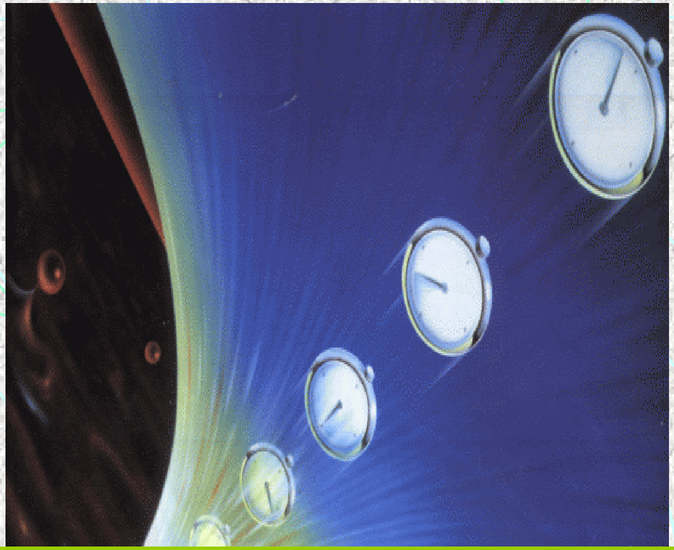
这样的时间标准称为**原子时**

用铯钟作为计时标准，误差若按一个周期计算，测量精度要比秒表作时计提高 10^{10} 倍，即误差下降到秒表的 10^{10} 之一

自从人类发明机械计时的时钟以来，400年来时间计量准确度的提高是惊人的，现代的原子钟的计时误差已小于 10^{-10} 秒/天。目前，时间是测量得最准确的一个基本量

宇宙的时间

- 有没有开端？有没有终结？
- 时间箭头的产生？
- 时间均匀吗？



自从盘古开天地，三皇五帝到于今。
天地玄黄，宇宙洪荒。

空间

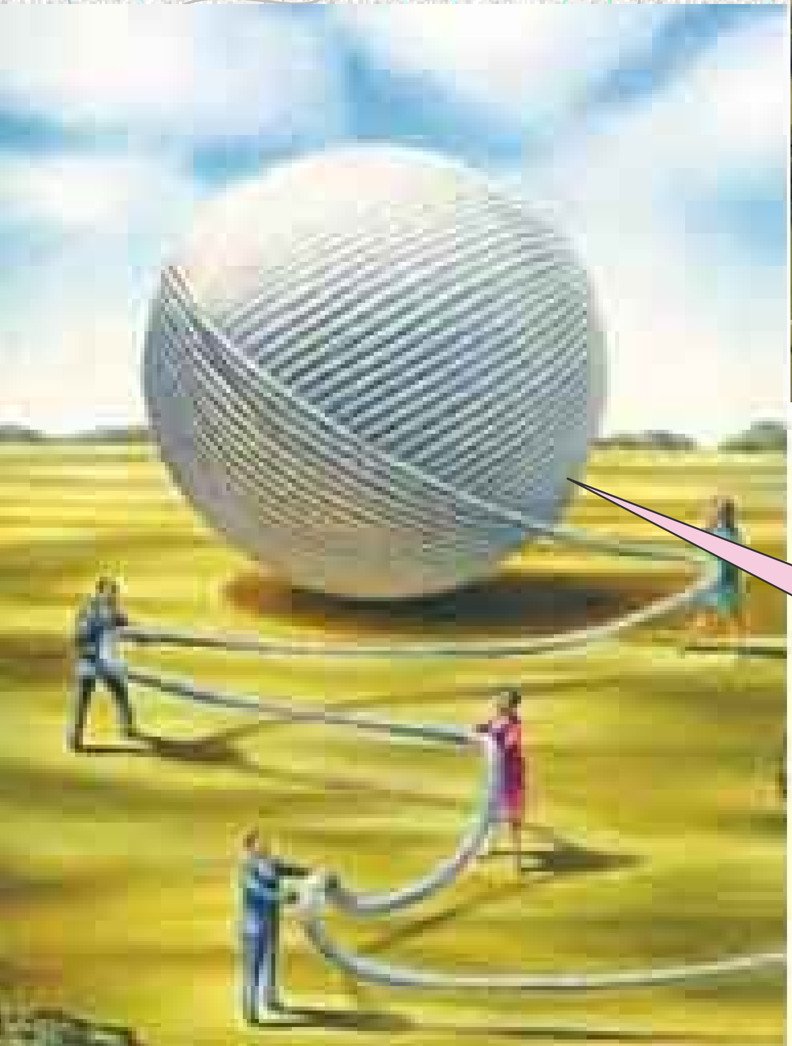
线是由点组成的?

$$line = \sum \Delta\ell$$

Quantization of space?

The zeroth law of Physics

The space of physics is 3D Euclidean space R^3



It is a 2D manifold

It is nested in 3D, but it is 1D.

空间的测量：

米： 规定为通过巴黎的自北极至赤道的子午线长度的1/10,000,000

1875年起，决定改用米原器（截面呈“X”形的铂铱合金尺）作为长度标准。由于这样规定的标准米不易复制，精度又不高

1960年在第十一届国际计量大会上规定：
1米等于氪86原子的和能级之间跃迁时所对应的辐射（橙色谱线）在真空中的波长 λ 的1,650,763.73倍。这样规定的米叫**原子米**

1983年10月在第十七届国际计量大会上规定：
米是光在真空中在1/299,792,458秒的时间间隔内所传播的路程长度

光速：$c = 299{,}792{,}458$ 米 / 秒

古代的宇宙观

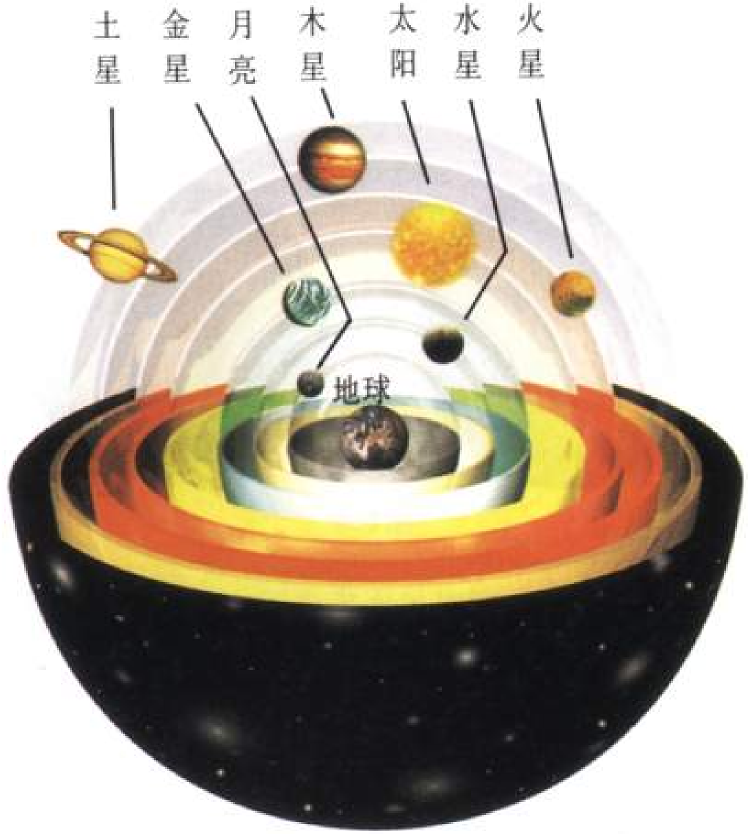


图 1.2

托勒密用象限仪测量月亮的高度。
巴塞尔，1508 年。

但也许是 200 码(1 码 = 0.9144 米)左右，这样就使得亚里士多德的估计为现在公认数值的两倍。希腊人甚至为地球是球

中世纪的典型宇宙观

FIGURE 4-1

The universe as described in Dante's *Divine Comedy*

Dante's picture was typical of medieval views of the universe.

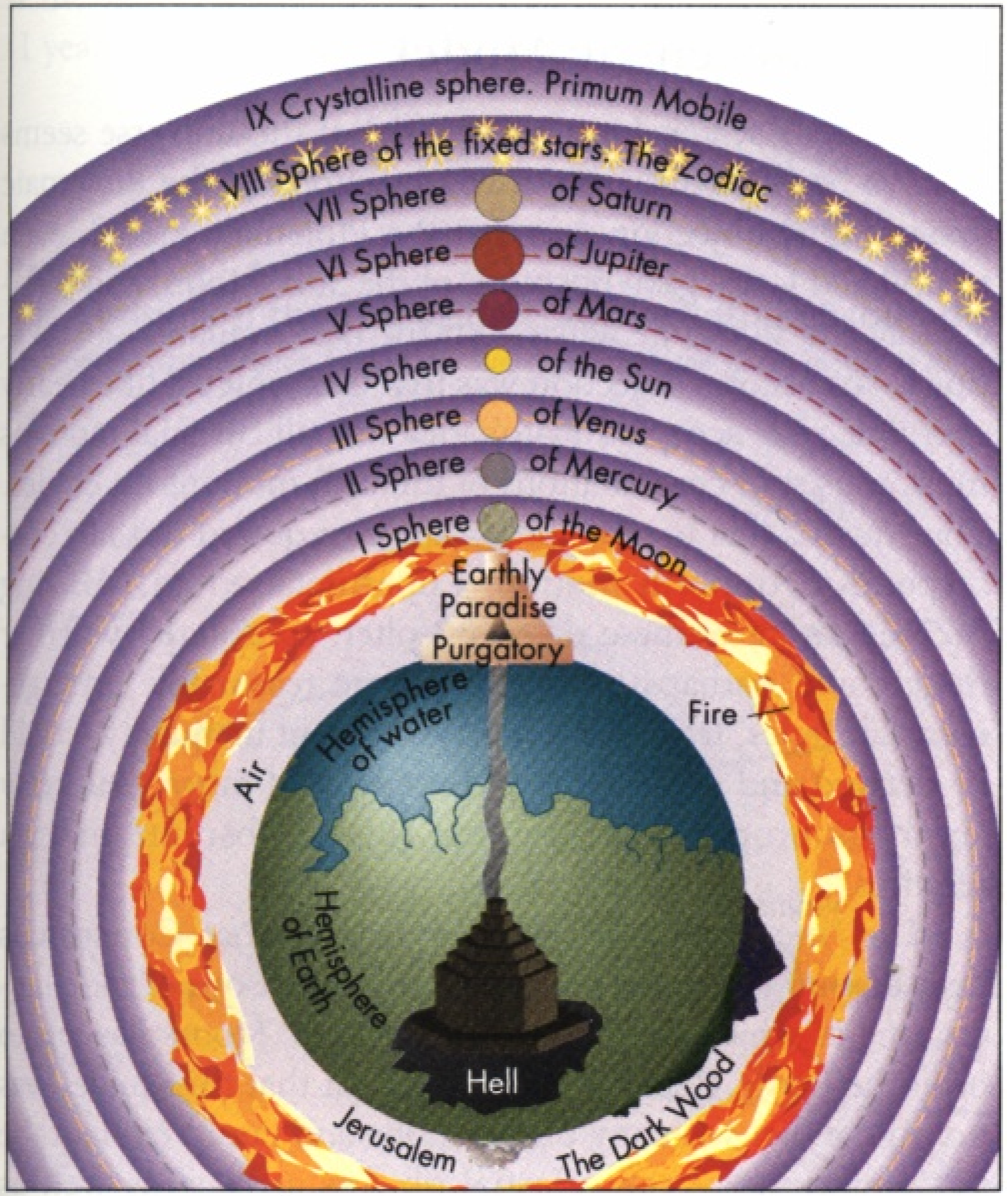
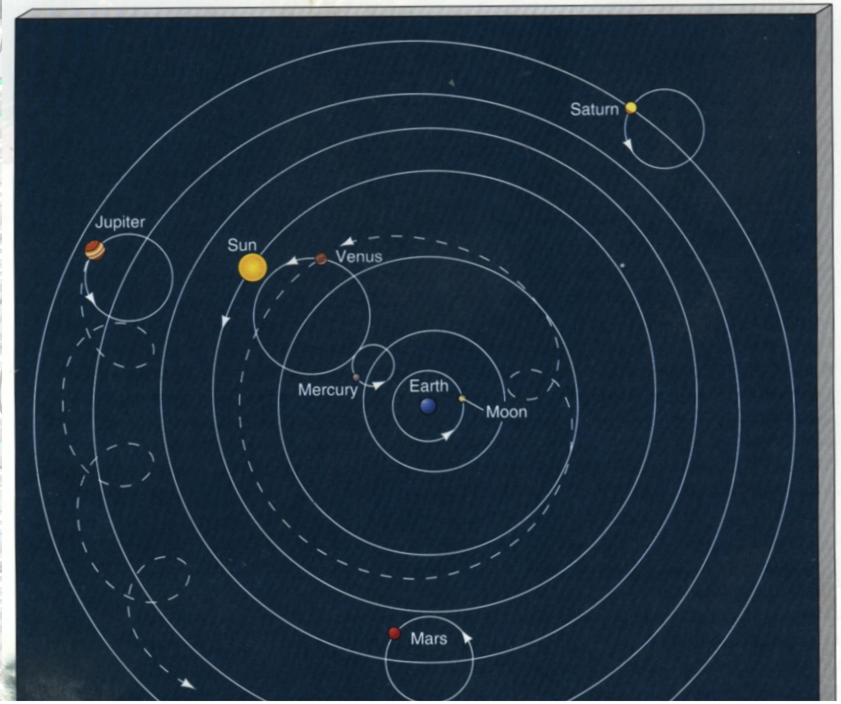
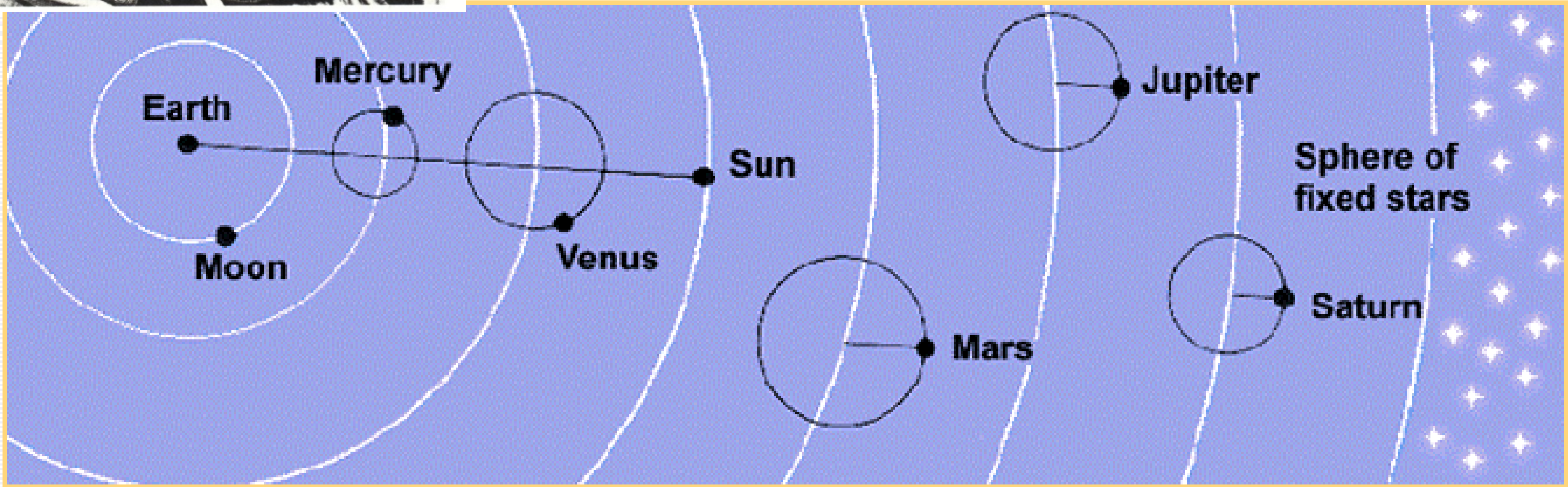
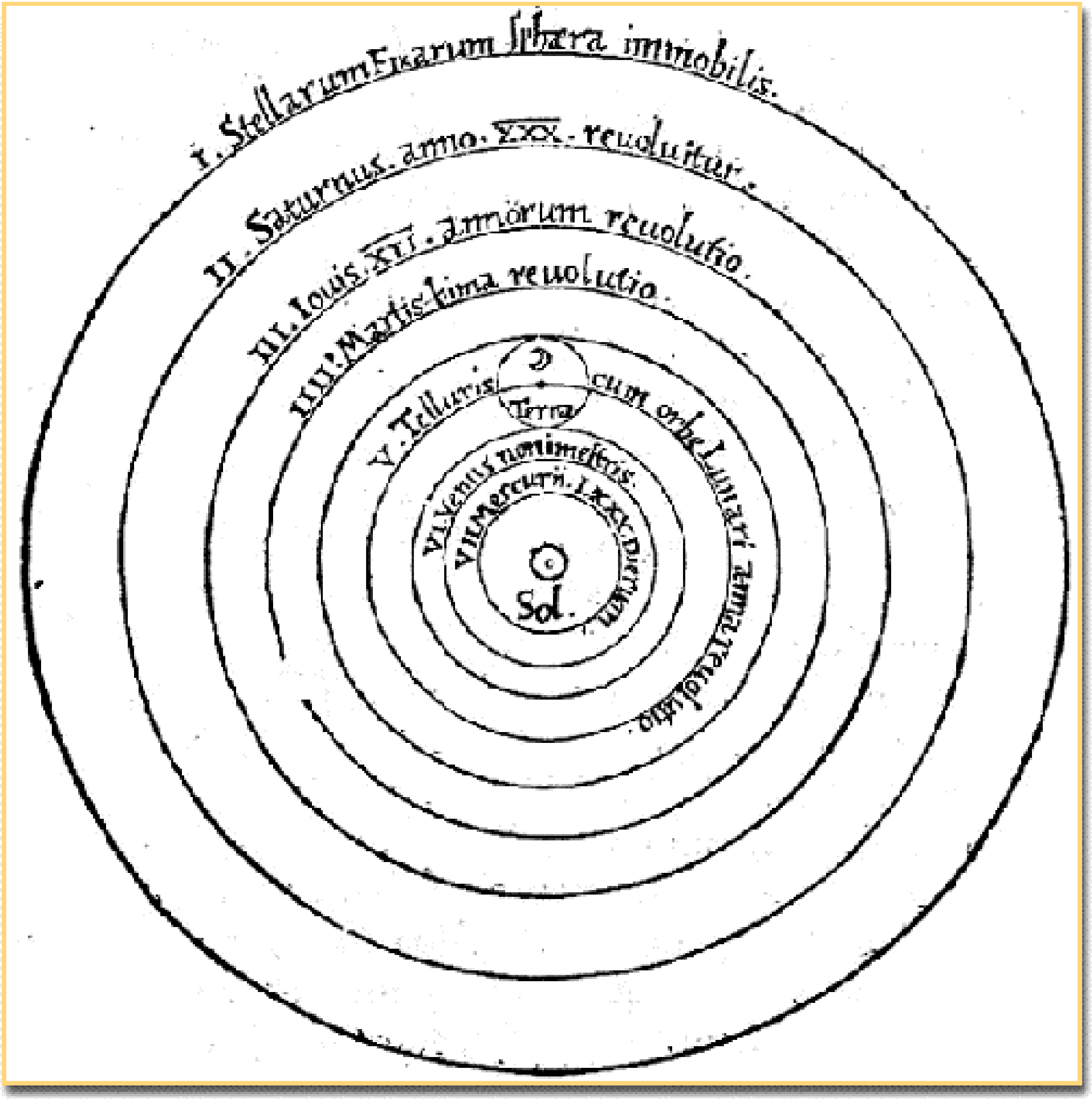


Figure 2.25 Claudius Ptolemy. *(The Granger Collection)*

托勒密的宇宙体系

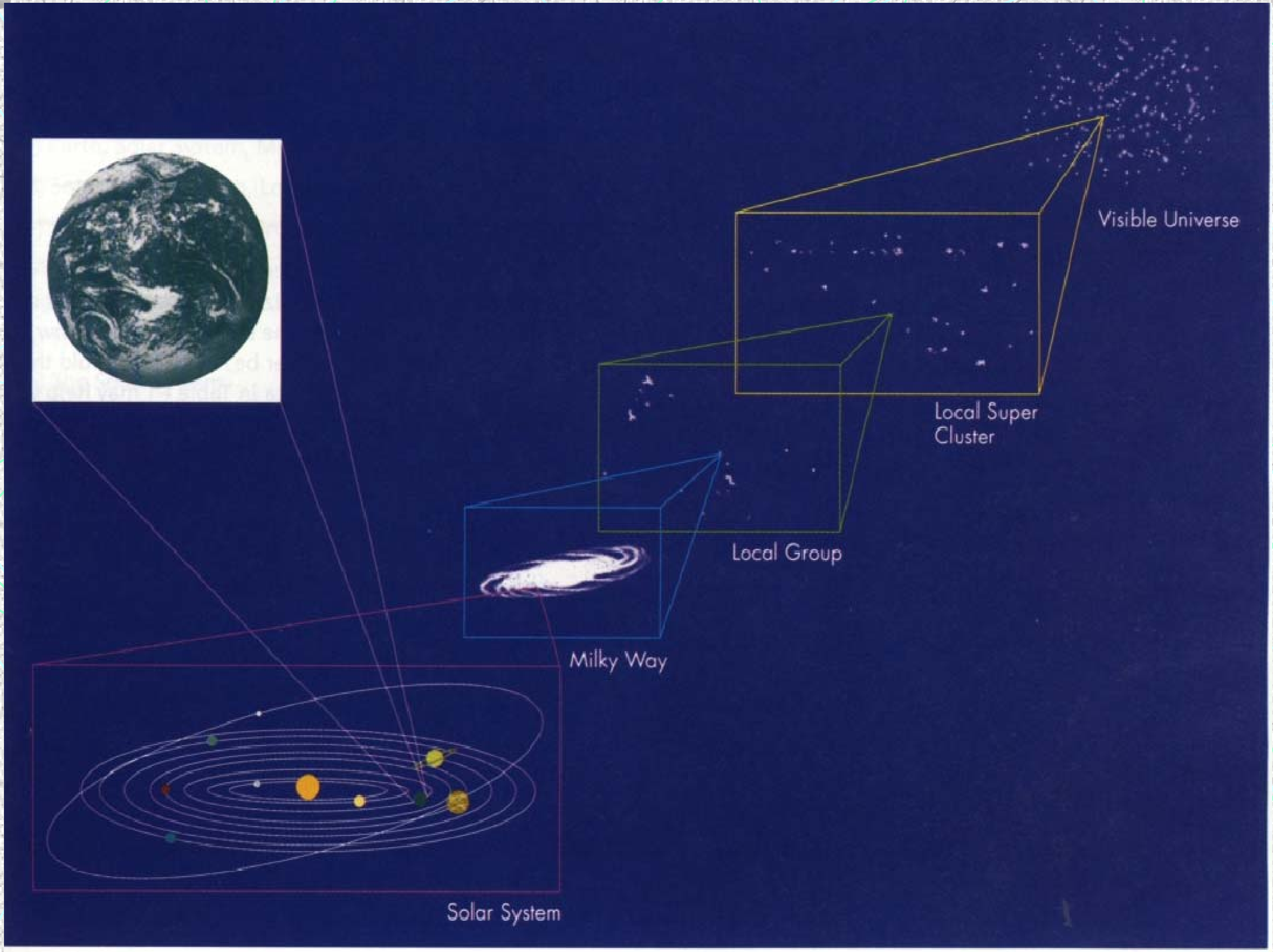




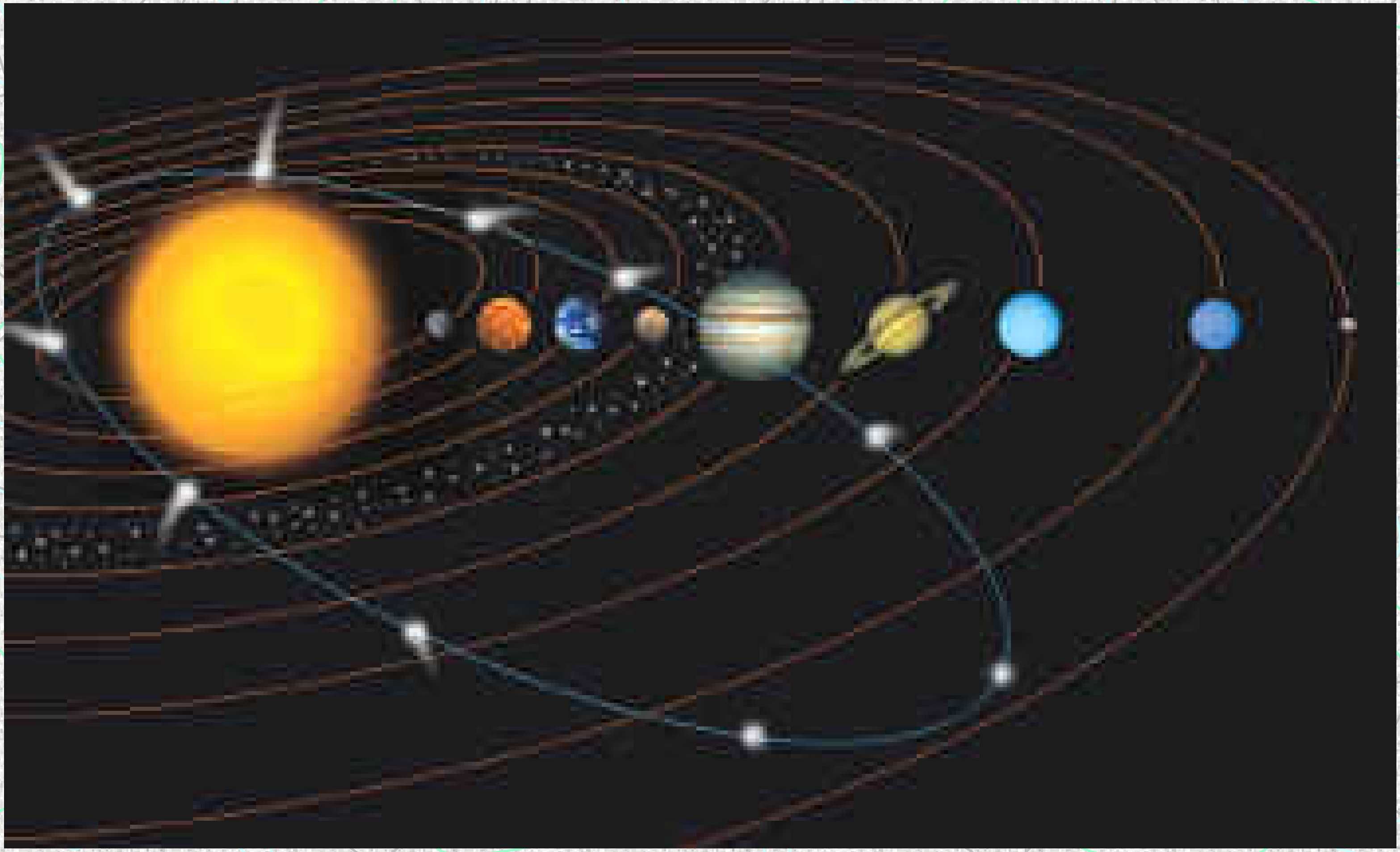

I. Stellarum Fixarum ſphæra immobilis.
II. Saturnus. anno. XXX. reuoluitur.
III. Iouis. XII. annorum reuolutio.
IIII. Martis bima reuolutio.
V. Telluris cum orbe Lunari anni reuolutio.
Terra
VI. Venus nono mense.
VII. Mercurii. LXXX. dierum.
Sol.

哥白尼和他的宇宙观

我们的宇宙观：宇宙阶梯


Visible Universe
Local Super Cluster
Local Group
Milky Way
Solar System

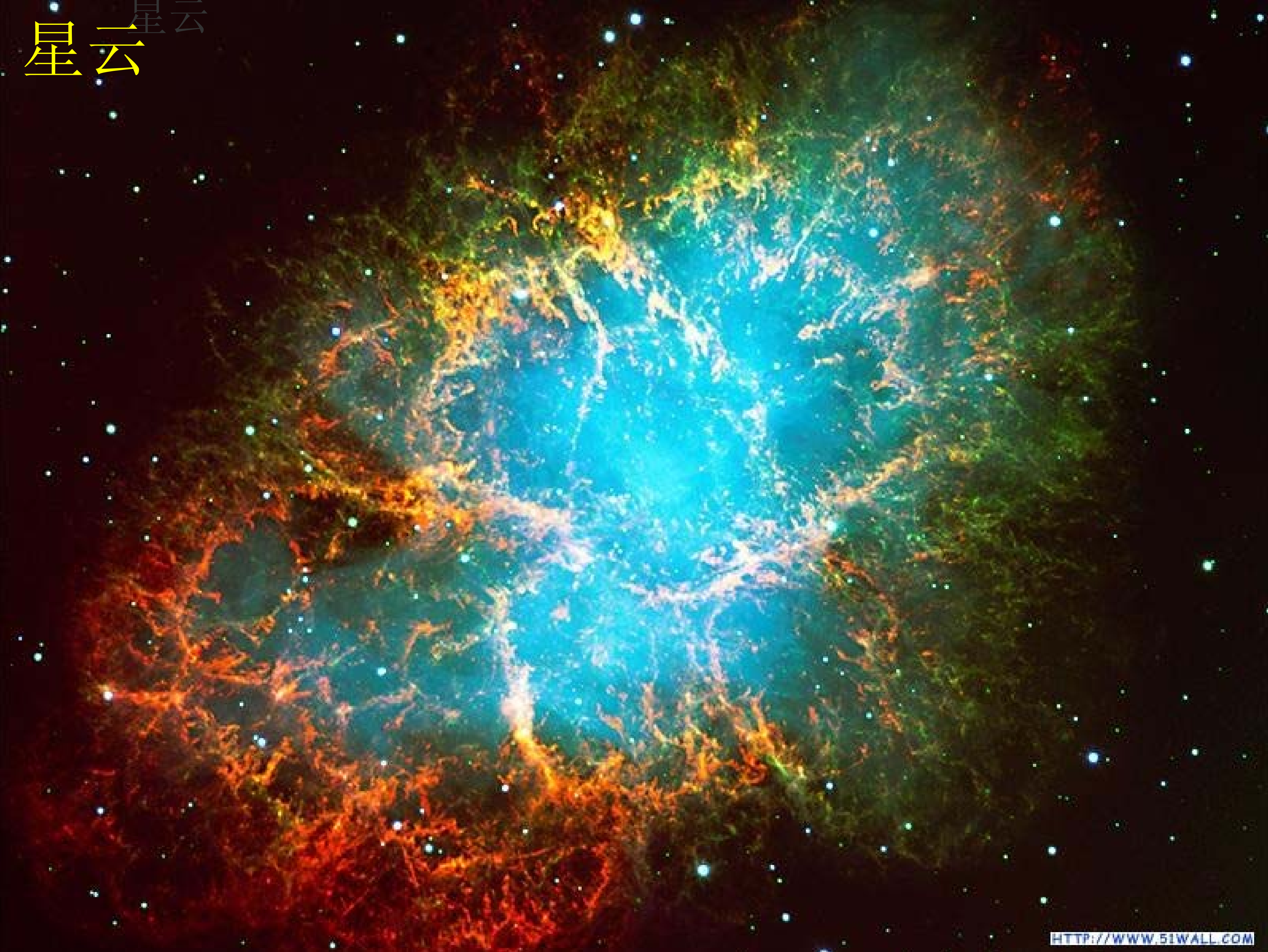
太阳系



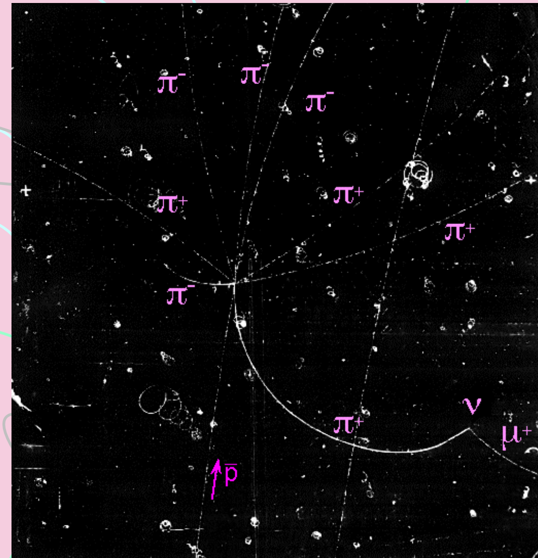

恒星世界

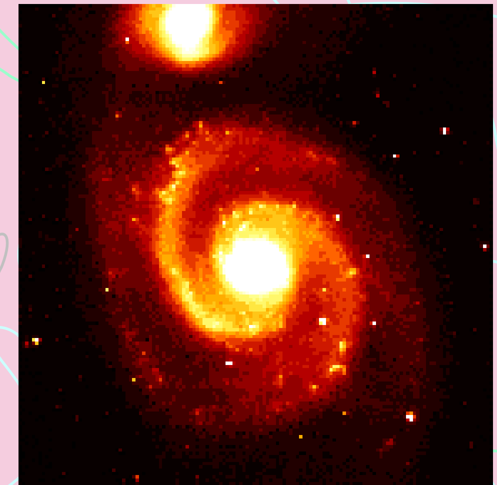
星云

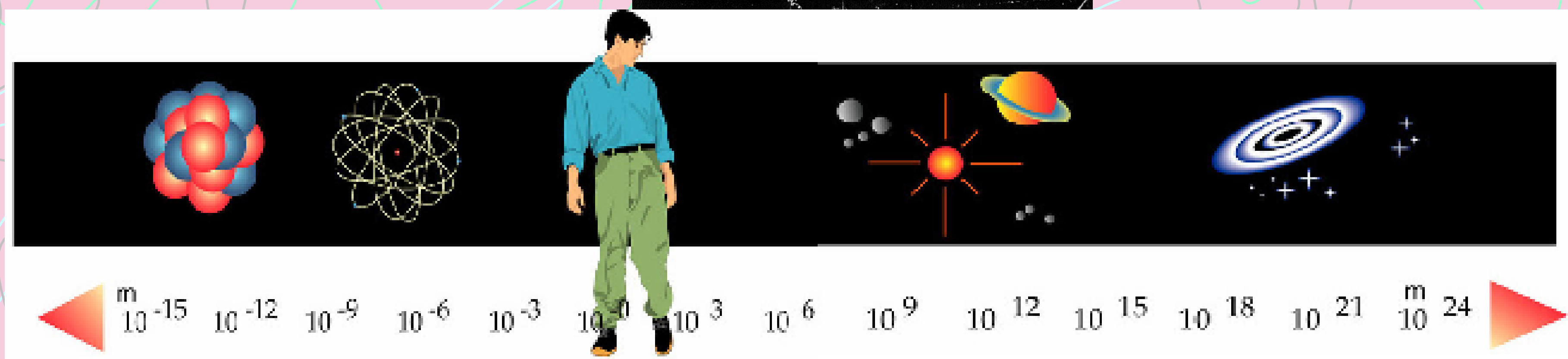
星云



我们所知的世界







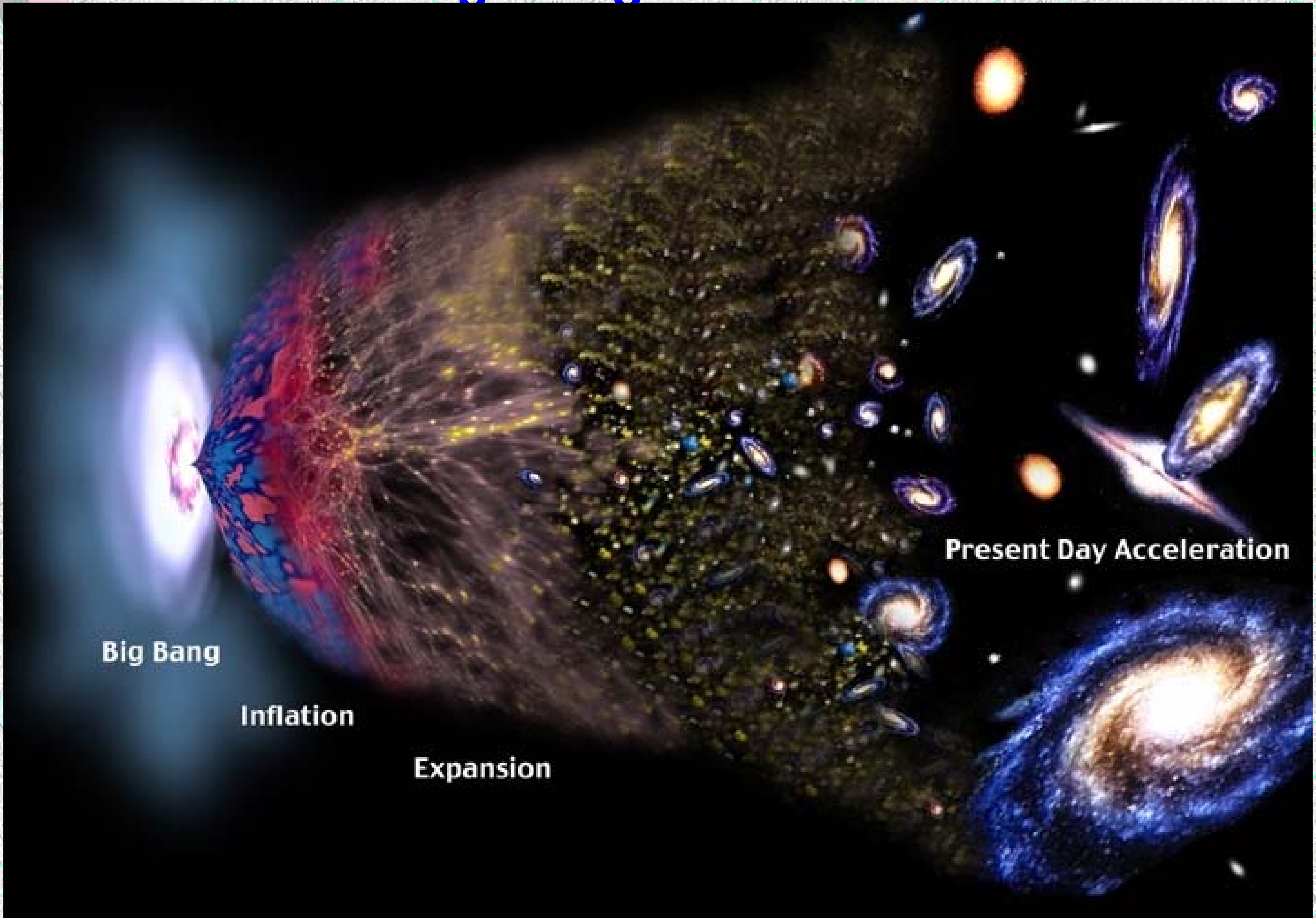
已知的世界：$10^{-15} \leftrightarrow 10^{24}$ 米

宇宙起源问题：

（1）有限，还是无限？
（2）有界，还是无界？
（3）平直，还是弯曲？
（4）静态，还是动态？
（5）宇宙是怎样产生的？
（6）有些怎样的物理规律在支配着宇宙？
（7）… …

可能的答案：宇宙大爆炸理论 **(Big Bang)**

Big Bang



§1.2 质点和参考系

1.2.1 质点和参考系

质点：突出了"物体具有质量"、"物体占有位置"

正确吗？ 显然？ 近似正确？

理论依据：质心运动定理。

§1.2 质点和参考系

1.2.1 质点和参考系

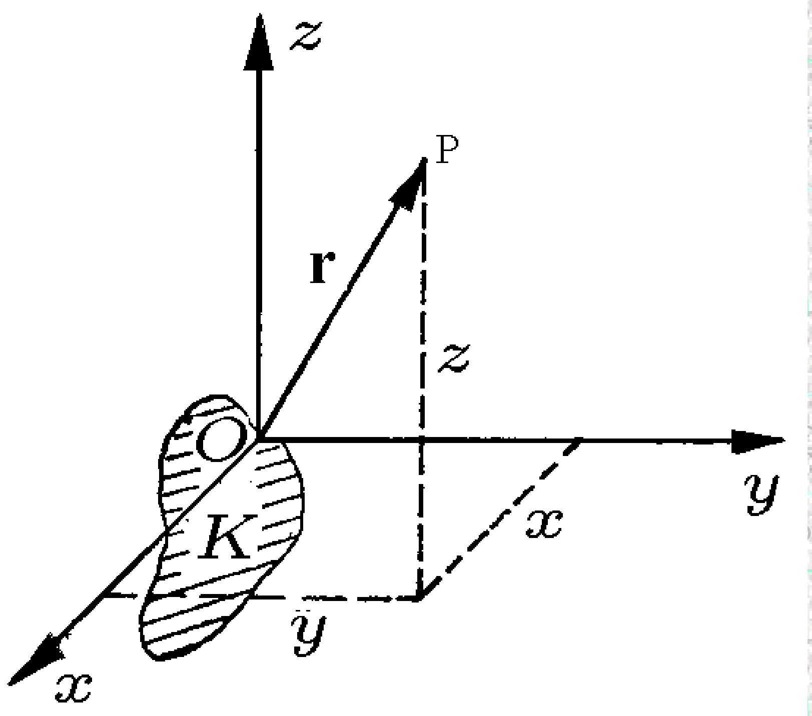
参考物 ： 为了研究运动，固定坐标系的物体

参考坐标系 ： 参考系 = 参考物 + 坐标架 + 钟

假定：空间为欧几里德空间
时间均匀流逝

1.2.1 质点和参考系

René Descartes (1596-1650)



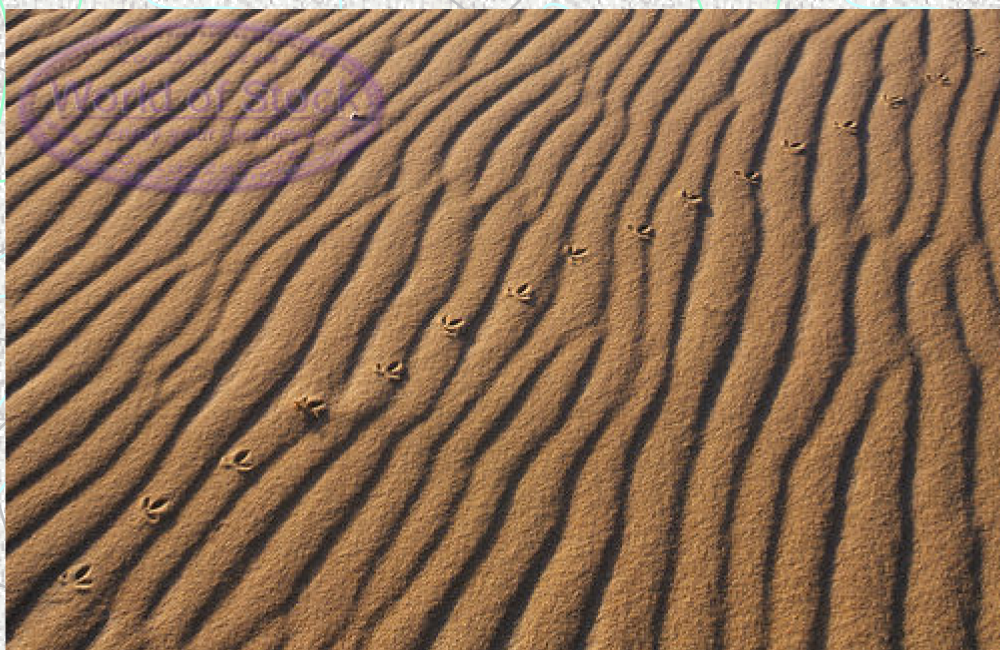
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

参考系的选择是任意的，对于同一个质点的位置，用不同参考系来描写时，则具有不同的位置矢量。就这一点，我们可以说，位置是具有相对性的物理量。

1.2.2 轨迹和运动方程

质点在运动中所经过的各点在空间连成一条曲线，

这条曲线我们称之为轨迹。



轨迹——运动的记录

部分信息

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

圆周运动

刑

侦

学

一般曲线方程

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

天空中没有留下痕迹，但鸟儿已飞过。

－泰戈尔

1.2.2 轨迹和运动方程

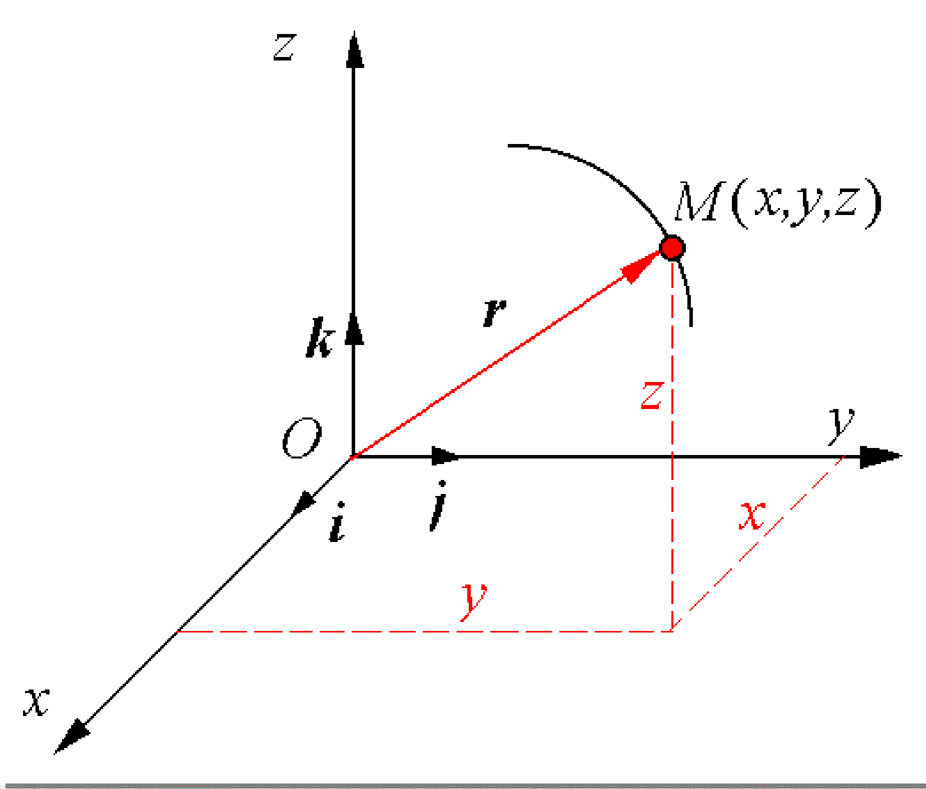
质点的位置关于时间的函数称为**运动方程**或**运动解**，

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

分量式

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

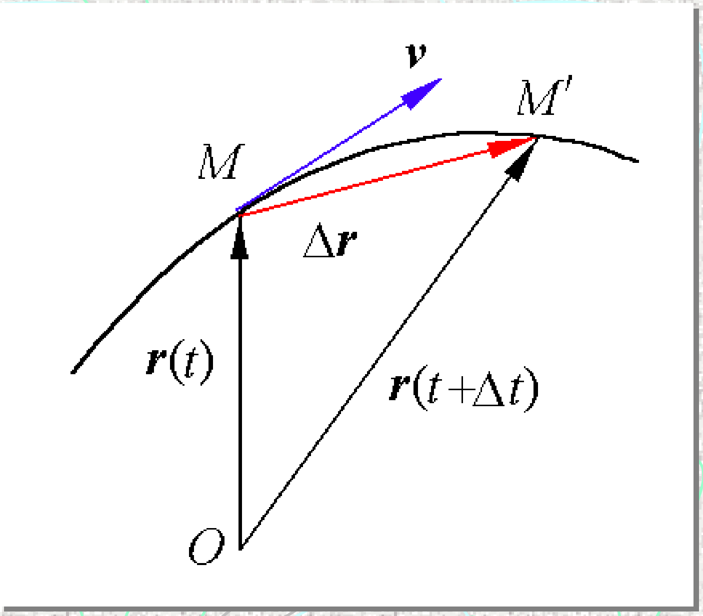


从运动方程中消去时间 t 即得到轨迹的方程

§1.3 速度与加速度

瞬时速度（简称速度）定义为：

$$\boldsymbol{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$



在国际单位制中，速度的单位是米/秒，常用的单位还有厘米/秒、千米/小时等

质点从 $t_1=t$ 到 $t_2=t+\Delta t$ 时间间隔内所走过的路程

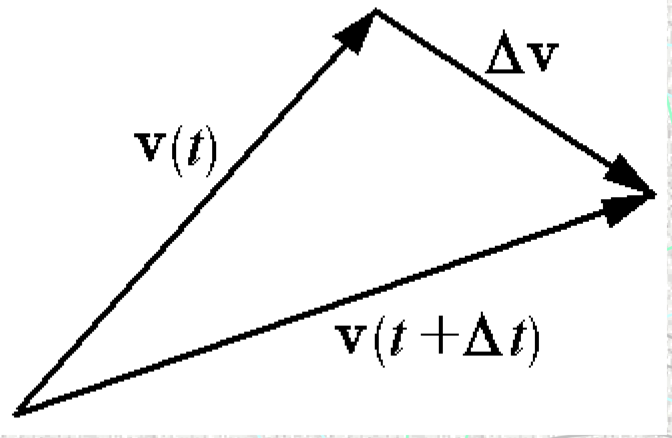
$$\Delta s=s(t_2)-s(t_1)$$

速度的数值大小（绝对值）称为速率，由上式知：

$$v(t)=|\boldsymbol{v}(t)|=\left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds(t)}{dt}$$

1.3.2 加速度

质点在 $t_1 = t$ 到 $t_2 = t + \Delta t$ 时间间隔内的平均加速度



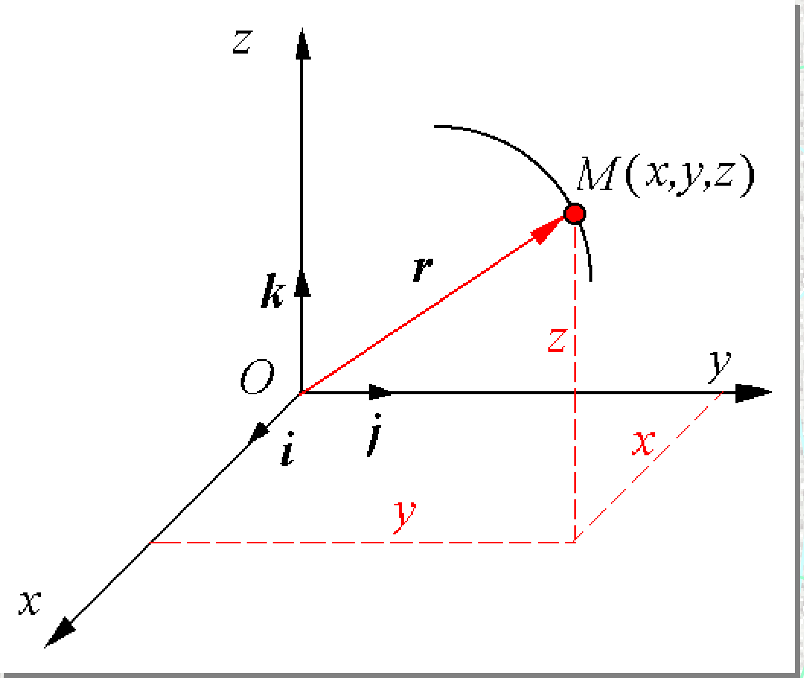
$$< \boldsymbol{a} >_{t \to t+\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

瞬时加速度（简称加速度）定义为：

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\ \boldsymbol{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$

在国际单位制中，加速度的单位是米/秒^2，常用的单位还有厘米/秒^2 等。

§1.4 直角坐标系中运动的描述



1. 运动方程

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

2. 速度

$$\boldsymbol{v}(t)=v_x(t)\boldsymbol{i}+v_y(t)\boldsymbol{j}+v_z(t)\boldsymbol{k}$$

分量式：

$$v_x(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\dot{x}(t) \qquad v_y(t)=\frac{dy(t)}{dt}=\dot{y}(t) \qquad v_z(t)=\frac{dz(t)}{dt}=\dot{z}(t)$$

速率：

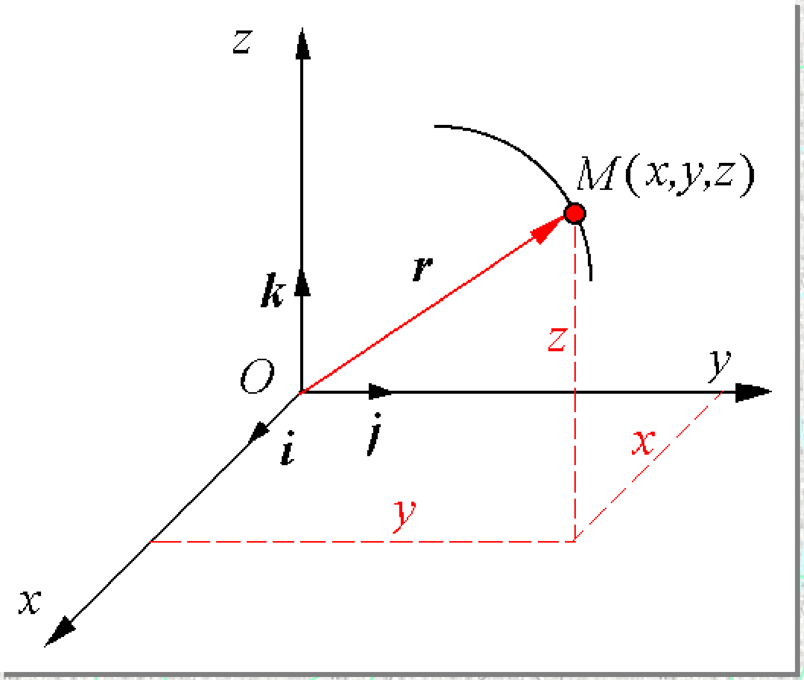
$$v(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

其中：

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

§1.4 直角坐标系中运动的描述

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\boldsymbol{i}+a_y(t)\boldsymbol{j}+a_z(t)\boldsymbol{k}$$



分量式：

$$a_x(t)=\frac{d^2x(t)}{dt}=\ddot{x}(t)$$

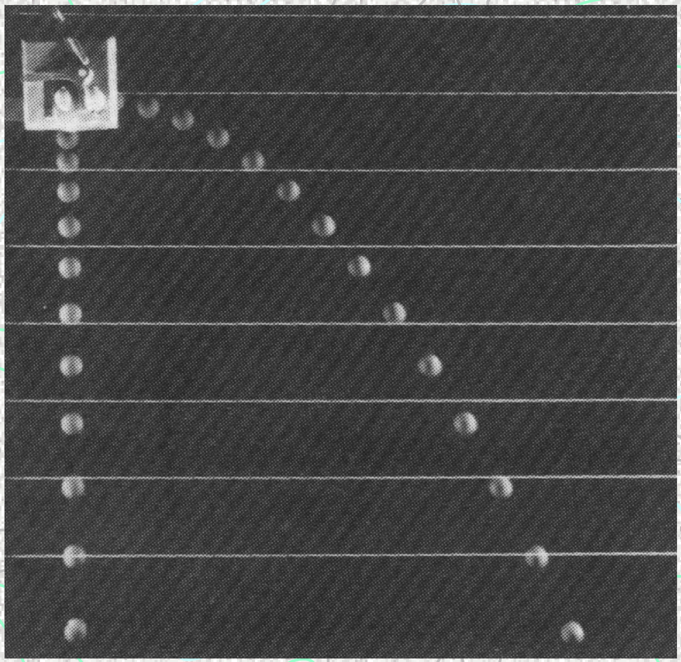
$$a_y(t)=\frac{d^2y(t)}{dt}=\ddot{y}(t)$$

$$a_z(t)=\frac{d^2z(t)}{dt}=\ddot{z}(t)$$

运动的重要性质：

运动的独立性

由速度、加速度的分量表达式可以看到，描写一个质点的复杂的曲线运动时，其 x 方向的坐标、速度和加速度与其它方向的坐标、速度和加速度无关；对 y 方向和 z 方向也有这种性质，即三个方向相互无关。这种性质称为运动的独立性。



运动的独立性 的实验演示

任意曲线运动都具有运动的独立性吗？

运动学的反问题

如果已知： $\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{v}(t_0)$, $\boldsymbol{r}(t_0)$

可以完全描述运动。

速度： $$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}(t')dt'$$

位矢： $$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}(t')dt'$$

分量式：

$$\begin{cases} v_x(t)=v_{0x}+\int_{t_0}^{t}a_x(t')dt' \\ v_y(t)=v_{0y}+\int_{t_0}^{t}a_y(t')dt' \\ v_z(t)=v_{0z}+\int_{t_0}^{t}a_z(t')dt' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}v_x(t')dt' \\ y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}v_y(t')dt' \\ z(t)=z_0+\int_{t_0}^{t}v_z(t')dt' \end{cases}$$

路程：

$$\frac{ds(t)}{dt}=v(t)=|\boldsymbol{v}(t)|=\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)+v_z^2(t)}$$

$$s(t)=s(t_0)+\int_{t_0}^{t}\sqrt{v_x^2(t')+v_y^2(t')+v_y^2(t')}\,dt'$$

§1.5 自然坐标系中运动的描述

有时直角坐标系不是最好的坐标系，这是因为：

- 若我们研究的运动是受约束的运动，比如火车的行驶（它不能离开铁轨），或穿在弯曲钢丝上的小环的运动等。这类运动往往轨迹的形状是给定的，由于约束力的参与（本章中我们不讨论力，仅研究运动），加速度往往与轨迹上点的位置有关（有时还与质点在该点速度有关），此时运动的独立性往往失效。沿轨迹的曲线坐标系有可能是更好的坐标系。
- 即使我们研究运动的独立性有效的运动，使用直角坐标系使得数学计算简单了，但我们对其中的一些物理细节却并不很清楚。比如，我们知道速度的方向是沿着轨迹上质点所在位置的切线方向，但加速度的方向如何？加速度的方向对速度又有何影响？

于是，我们需要引入一种新的坐标系：自然坐标系。

§1.5 自然坐标系中运动的描述

1.5.1 切向加速度和法向加速度

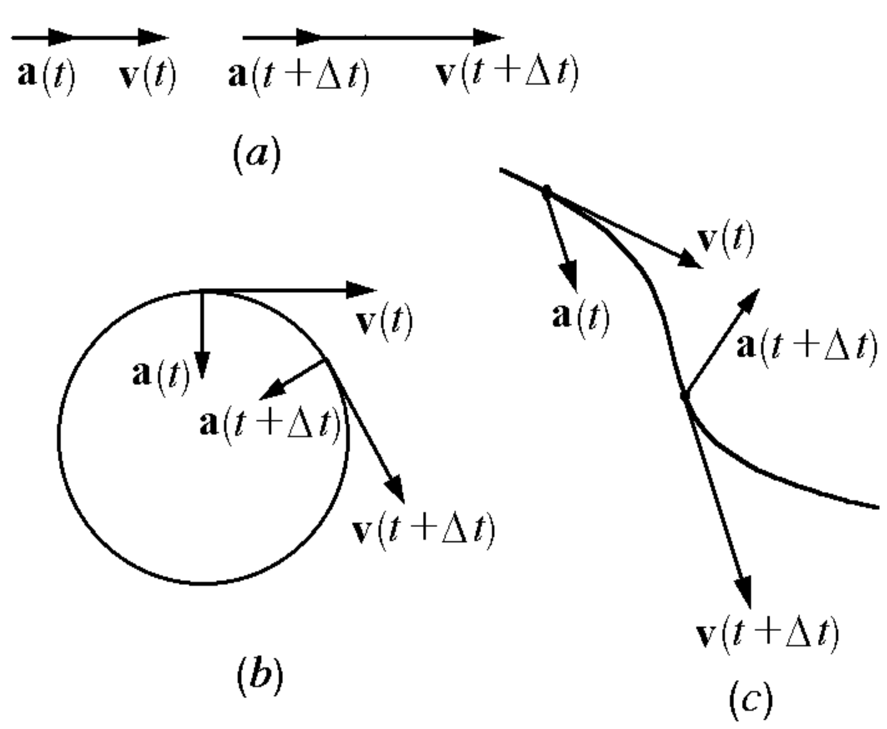


图 1.11 加速度与速度的关系

考虑:
加速度
的方向

1.5.1 切向加速度和法向加速度

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0} v(t)\frac{\hat{\boldsymbol{v}}(t+\Delta t)-\hat{\boldsymbol{v}}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0} v(t)\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{n}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{n}}=\frac{v^2(t)}{R(t)}\hat{\boldsymbol{n}}(t)$$

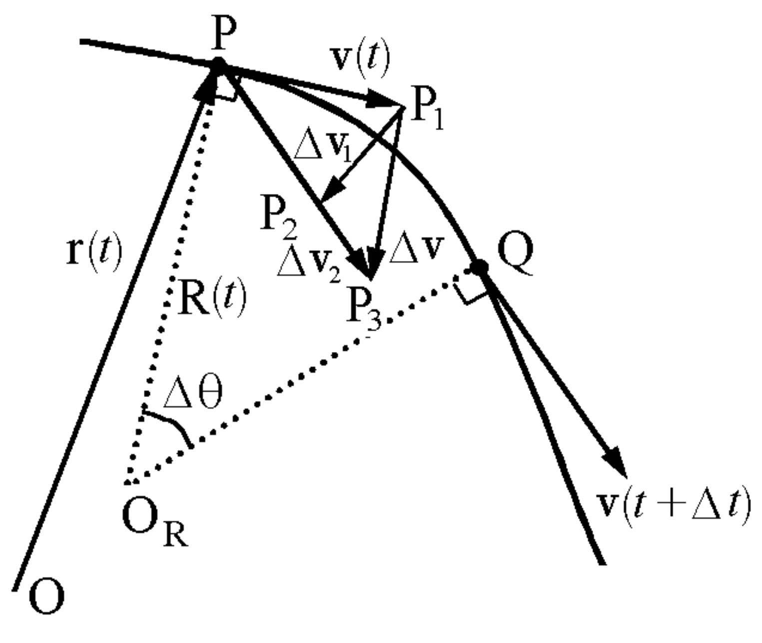


图 1.12 加速度的切向和法向分量

$$\boldsymbol{a}(t)=\hat{\boldsymbol{v}}(t)\frac{dv(t)}{dt}+\hat{\boldsymbol{n}}(t)\frac{v^2(t)}{R(t)}=a_t\hat{\boldsymbol{v}}+a_n\hat{\boldsymbol{n}}$$

$$a_t=\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}=\frac{dv(t)}{dt}$$

切向加速度，表示速度大小的变化

$$a_n=\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=\frac{v^2(t)}{R(t)}$$

法向加速度，表示速度方向的变化

$R(t)$ 曲率半径

1.5.1 切向加速度和法向加速度

加速度：$$\boldsymbol{a}(t)=\hat{\boldsymbol{v}}(t)\frac{dv(t)}{dt}+\hat{\boldsymbol{n}}(t)\frac{v^2(t)}{R(t)}=a_t\hat{\boldsymbol{v}}+a_n\hat{\boldsymbol{n}}$$

加速度的大小（绝对值）：

$$a(t)=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right)^2}$$

如果运动方程 已知：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$

可以求得：$\boldsymbol{v}(t),\ \boldsymbol{a}(t)$

可得轨迹上任意一点的曲率半径为：

$$R(t)=\frac{v^3(t)}{|\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{v}(t)|}$$

1.5.1 切向加速度和法向加速度

如果以弧长 s 为坐标，则：

$$v=\frac{ds}{dt} \qquad a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

可得:

$$v-v_0=\int_{t_0}^{t} a_t dt$$

$$s-s_0=\int_{t_0}^{t} vdt=\int_{t_0}^{t}\left[v_0+\int_{t_0}^{t} a_t dt\right]dt$$

质点的运动在形式上与直线运动相仿，所不同的是，质点走的实际上是曲线。

1.5.2 自然坐标系

$$\hat{e}_1 = \hat{v}, \quad \hat{e}_2 = \hat{n}$$

$$\hat{e}_3 = \hat{v} \times \hat{n} = \hat{b}$$

这样构成的正交坐标系称为自然坐标系（内禀坐标系、本性坐标系、路径坐标系等）

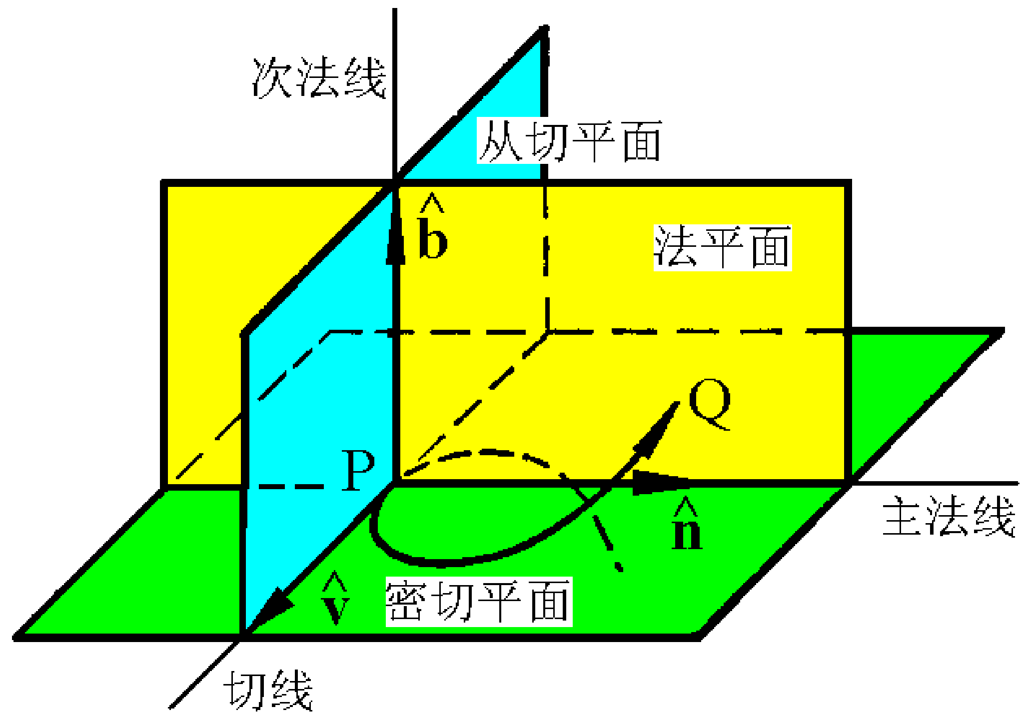


图 1. 15 轨迹上 P 点的自然坐标系

当质点作空间运动时，它的速度向量位于轨迹上的切线方向，而加速度向量位于该点的密切平面上。

1.5.3 圆周运动

1. $R(t)=R_0$
2. 轨道在一个平面上

称这样的运动为圆周运动。

若同时有 $v(t)=v_0=$ 常数

则称为匀速圆周运动。

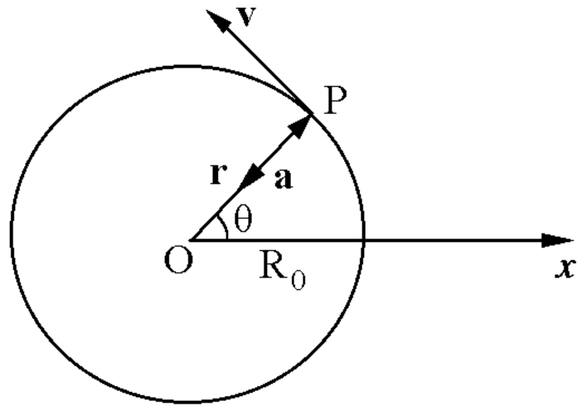


图 1.16 圆周运动

$$\begin{cases} a_t=\dfrac{dv(t)}{dt} & \text{切向加速度} \\ a_n=\dfrac{v^2(t)}{R_0} & \text{向心加速度} \end{cases}$$

1.5.3 圆周运动

圆周运动的另一种描述法：

定义：角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$，大小为 $d\theta/dt$，方向按右手系指向平行于转轴方向。

有了上述定义，则当坐标原点选在转轴上时，如图，有：

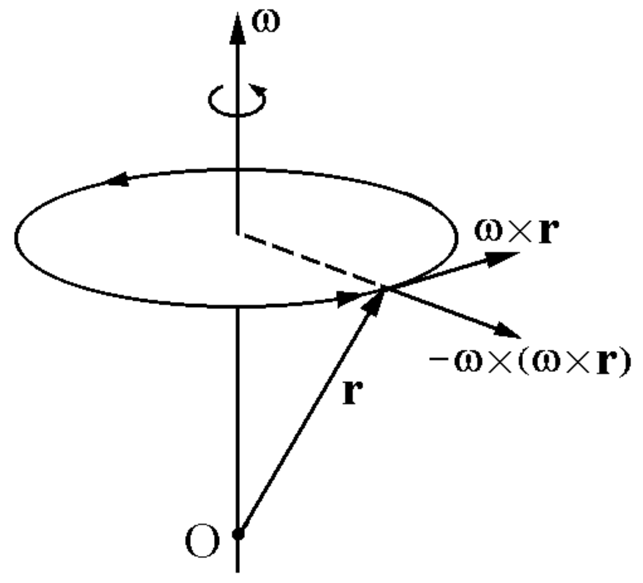


图 1.17 圆周运动

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

1.5.3 圆周运动

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{d\,\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\frac{d^2\,\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$

哪种描述法较简单？

§1.6 平面极坐标中的运动描述

1.6.1 平面极坐标

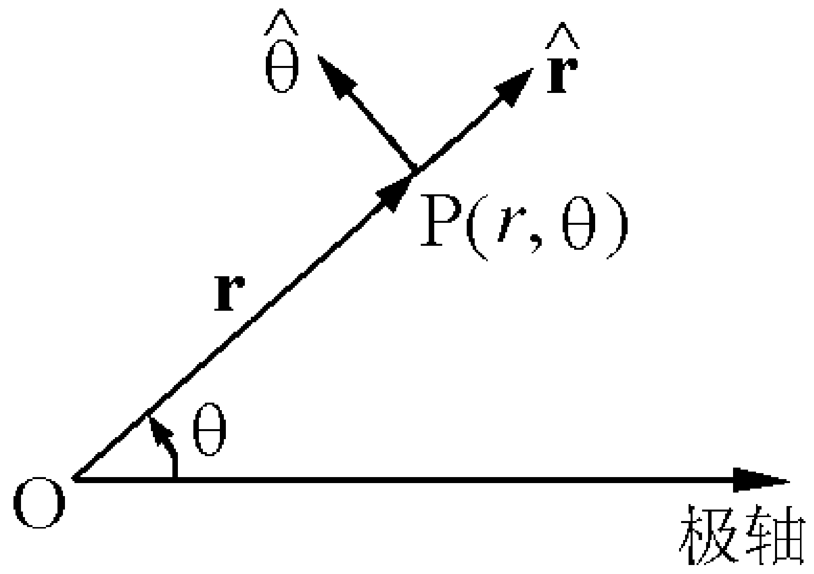


图 1.18 极坐标系

极坐标系

（只对平面曲线运动时可用）

1.6.1 平面极坐标

$$\frac{d\hat{r}(\theta)}{d\theta}=\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}(\theta)}{d\theta}=-\hat{r}$$

在极坐标系中，质点的运动方程为：

$$r=r(t),\qquad \theta=\theta(t)$$

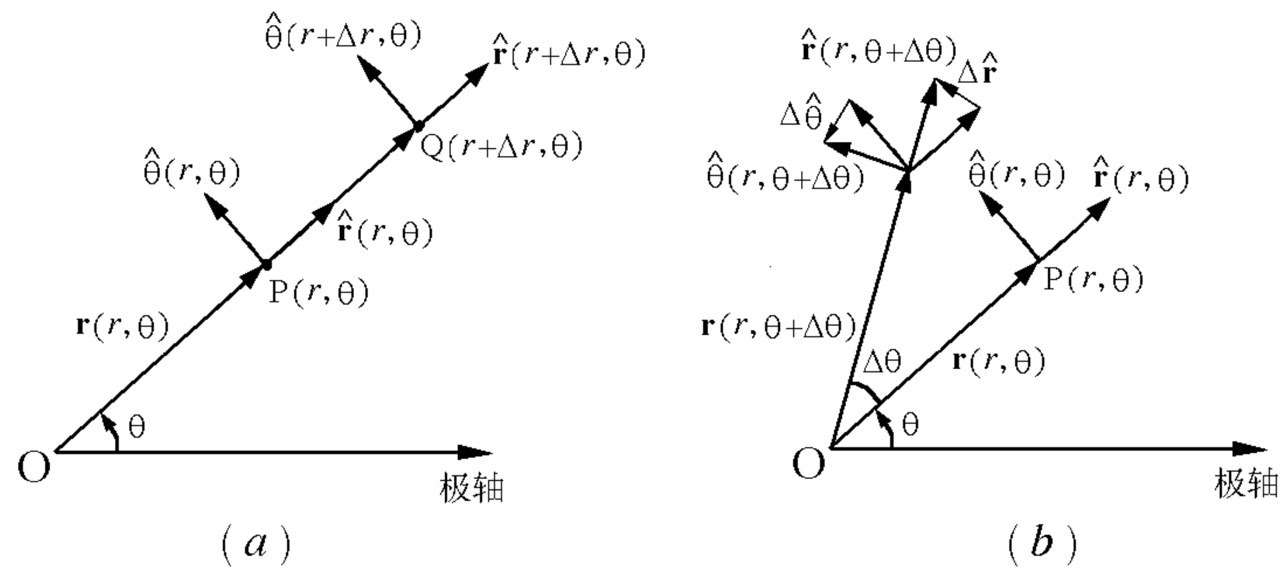


图 1.19 极坐标中的单位矢量

从该方程组中消去时间t，可得轨迹方程为：

$$f(r,\theta)=0$$

1.6.2 位矢、速度和加速度的极坐标表示

$$\boldsymbol{r}(t)=r(t)\hat{\boldsymbol{r}}(t)$$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta r\hat{\boldsymbol{r}}+r\Delta\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{r}}+\lim_{\Delta t\to 0}r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\theta}}=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boldsymbol{v}=v_r\hat{\boldsymbol{r}}+v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_\theta$$

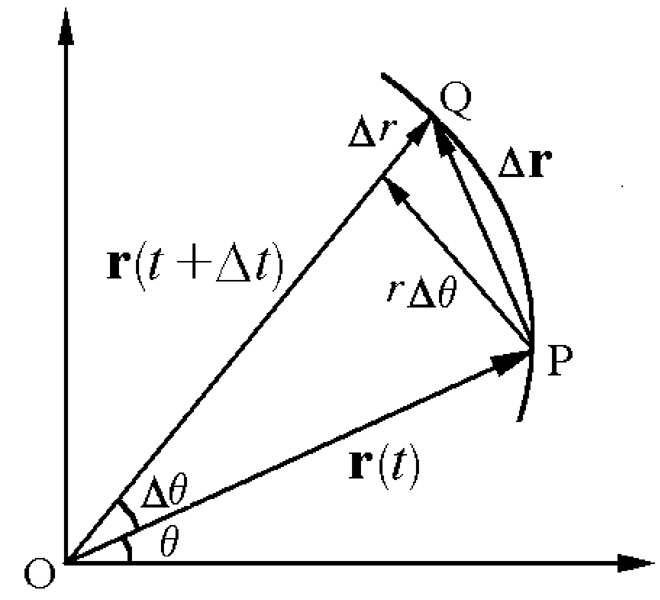


图 1.20 极坐标中的速度

径向速度 $$\boldsymbol{v}_r=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

横向速度 $$\boldsymbol{v}_\theta=r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

1.6.2 位矢、速度和加速度的极坐标表示

利用矢量的求导公式 推导:

由于: $\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}=\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ $\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}=\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{r}}$

可得:

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}[r(t)\hat{\boldsymbol{r}}]=\frac{dr(t)}{dt}\hat{\boldsymbol{r}}+r(t)\frac{d\ \hat{\boldsymbol{r}}}{dt}=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

$$=\ddot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+\dot{r}\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)}{dt}$$

$$=\ddot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\,\hat{\boldsymbol{r}}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$\boldsymbol{a}_r=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\,\hat{\boldsymbol{r}}$ 径向加速度

$\boldsymbol{a}_\theta=(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 横向加速度

例：设质点在匀速转动（角速度为）的水平转盘上从开始自中心出发以恒定的速率沿一半径运动，求质点的轨迹、速度和加速度。

解：　取质点运动所沿的半径在时的位置为极轴，得：

$$\begin{cases} r = ut \\ \theta = \omega t \end{cases} \qquad \begin{cases} v_r = dr/dt = u \\ v_\theta = r d\theta/dt = r\omega \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = -r\omega^2\hat{\boldsymbol{r}} + 2u\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

轨迹方程： $r = \dfrac{u}{\omega}\theta$

此曲线为阿基米德螺线

总结：

一般地，当加速度为常量（如重力加速度），应选取直角坐标系；当加速度总指向空间一点时（有心力情形），选极坐标系较方便；当质点的轨迹已知时（譬如限定在某曲线轨道上滑动），则可选用自然坐标系。

谢谢大家！