第九章 交流电

§9.1 基本概念和描述方法

§9.2 交流电路的复数解法

§9.3 交流电路的功率

§9.4 交流电路的分析举例

回顾

我们已经学了两种电路：稳恒电路(第四章)和暂态电路(§7.4)，复习一下其主要内容.

稳恒电路

1. 电流

电流强度：$I=\dfrac{dq}{dt}$

电流密度：$|\vec{j}|=\dfrac{dI}{dS_{\perp}}$　　$I=\iint\vec{j}\cdot d\vec{S}$

电流连续性方程 $\oiint\vec{j}\cdot d\vec{S}=-\dfrac{dq}{dt}$

稳恒电流条件 $\oiint\vec{j}\cdot d\vec{S}=0$

2.电阻

$$R=\rho\frac{\ell}{S},\quad \rho=\frac{1}{\sigma}$$

3.欧姆定律

外电路中：$U=IR,\quad I=\dfrac{U}{R},\quad \vec{j}=\sigma\vec{E}$

全电路中：$\varepsilon=\int_{-内}^{+}\vec{K}\cdot d\vec{\ell}=\oint_{L}\vec{K}\cdot d\vec{\ell},$

$$\vec{j}=\sigma(\vec{E}+\vec{K})\ ,\quad I=\frac{\varepsilon}{R+r}$$

4.电功率

$$P = UI \quad P = I^2 R \quad P = \frac{U^2}{R}$$

热功率密度：$p = \dfrac{j^2}{\sigma}$

5.基尔霍夫定律

节点电流方程 $\sum I = \sum (I_{入} - I_{出}) = 0.$

回路电压方程 $\sum U = \sum (\pm \varepsilon \pm Ir \pm IR) = 0.$

暂态电路

暂态电路中，电流随时间的变化是在接通或断开直流电源的短暂时间里进行的，是从初态趋于最终的稳态的变化过程。这一变化过程的快慢由电路参量*R*、*L*和*C*决定。属于一种特殊的非稳态过程，即暂态过程。

我们只研究**似稳电路的暂态过程。**

似稳电路的判据：

$$l/c << 1/f \xrightarrow{\lambda = c/f} l << \lambda$$

- 似稳电路的基本方程：

$$\varepsilon = iR + \frac{1}{C}\int i\,dt + L\frac{di}{dt} + M\frac{di'}{dt}$$

§9.1 基本概念和描述方法

1、交流电路

交流电路不同于稳恒电路和暂态电路.

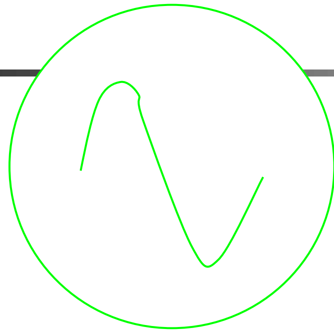
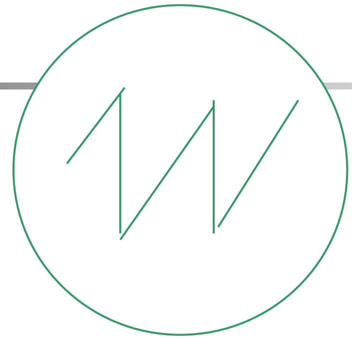
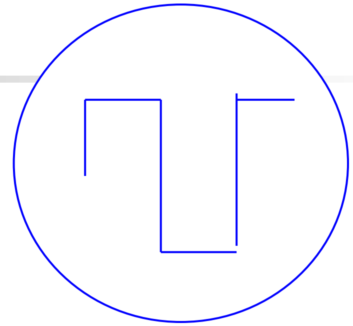
■电路中电源的**电动势**随时间作周期变化，电路各段上的**电流**和**电压**也随时间作周期变化，这种电路称为**交流电路**.

■相应的电动势、电流和电压分别称为交流电动势、交流电流和交流电压，习惯上称为**交流电**。

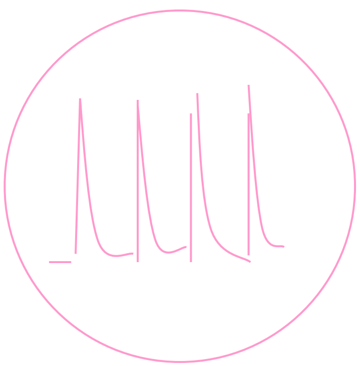
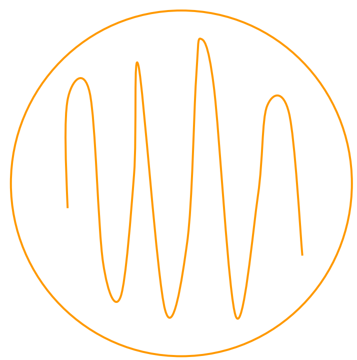
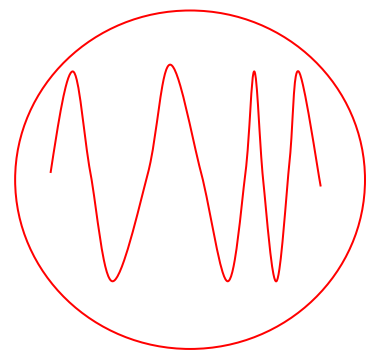
■本章主要介绍**似稳交流电路**的基本理论和计算方法，并着重介绍似稳交流电路的**复数解法**。

■我国采用的频率为**50Hz**的交流电，似稳条件为$l \ll 6\times10^{6}\ \mathrm{m}$，所以一个大城市内电路上电流的分布可以看成是似稳的。

2、交流电类型

a. 简谐波　　b. 锯齿波　　c. 矩形波

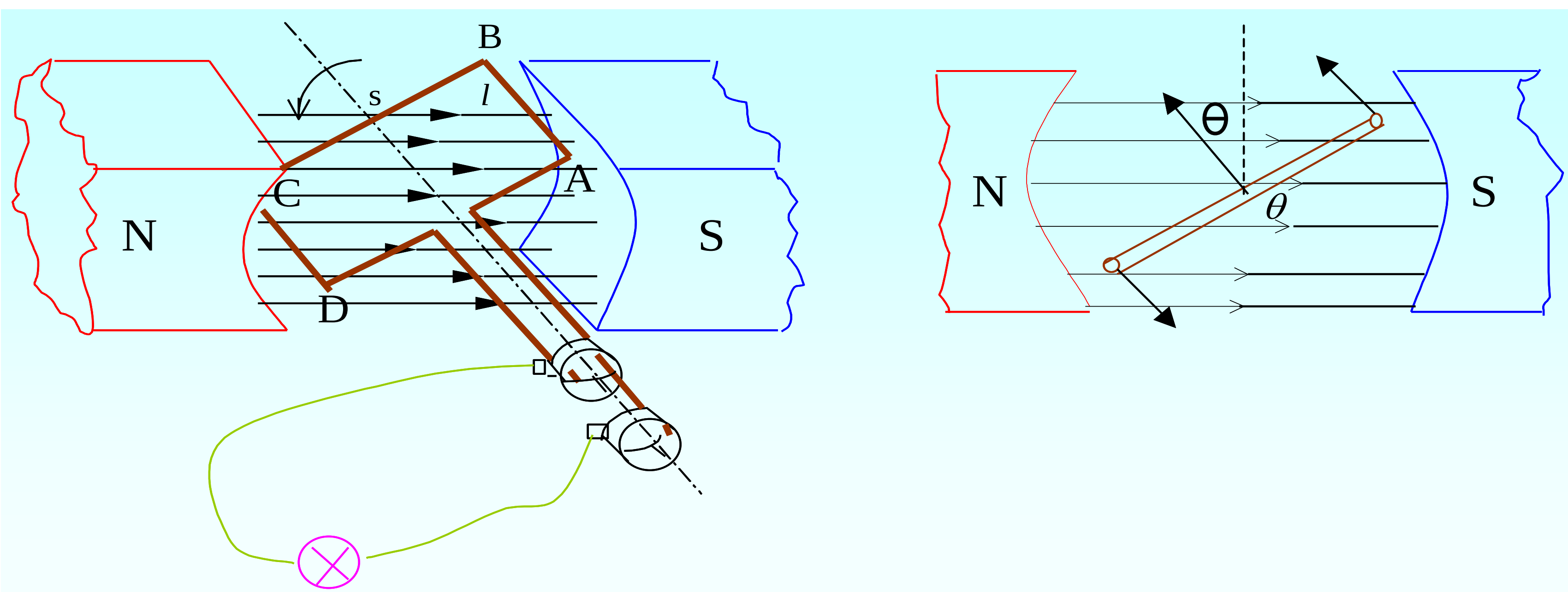




d. 尖脉冲　　e. 调幅波　　f. 调频波

- 不同类型的交流电由不同的电源或信号源产生，满足不同的需求。
- **简谐交流电**：以**正弦**或**余弦规律变化**的有一定**频率**和**峰值**的简谐波，我国工业和民用交流电的频率为50Hz。美国为60Hz。
- 各类交流电波形具有**共同特征**：
  - 具有固定的**频率**（或作周期性的变化）。
  - 任何非简谐式的交流电都**可以分解**为一系列不同频率的简谐成分。**最基本、最重要的是简谐交流电。**
  - **不同频率的简谐波**在线性电路中可以各自独立、互不干扰地传播，因此**可以单独地加以处理**。

2.1 简谐交流电的产生——交流发电机

- 交流发电机产生的感应电动势和感应电流是随时间作周期性变化的，为交流电；并且符合余弦函数的振动规律，属于简谐振动，因而为简谐交流电。交流发电机是根据电磁感应原理制成的，它是动生电动势的典型例子。



交流发电机原理

图中ABCD是一个单线圈，可以绕固定的转轴在N.S磁极所激发的均匀磁场中转动。为避免线圈的两根引线在转动过程中扭绞起来，线圈两端分别接在两个与线圈一起转动的铜环上，铜环通过两个带有弹性的金属触头与外电路接通。

2.2 简谐交流电动势的计算

■当线圈在原动机（如水轮机）带动下在均匀磁场中匀速转动时，AB和CD边切割磁力线，在线圈中产生**动生电动势**：

$$\xi_{AB}=\int_A^B(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\bullet d\,\mathbf{l}=\int_A^B vB\sin(\pi/2+\theta)dl=vBl\cos\theta$$

$$\xi_{CD}=\int_C^D(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\bullet d\,\mathbf{l}=\int_C^D vB\sin(\pi/2-\theta)dl=vBl\cos\theta$$

所以 $\xi_{totle}=\xi_{AB}+\xi_{CD}=2vBl\cos\theta$

因为 $\theta=\omega t,v=\dfrac{d}{2}\omega$

所以 $\xi=2\dfrac{d}{2}\omega Bl\cos\omega t=BS\omega\cos\omega t$

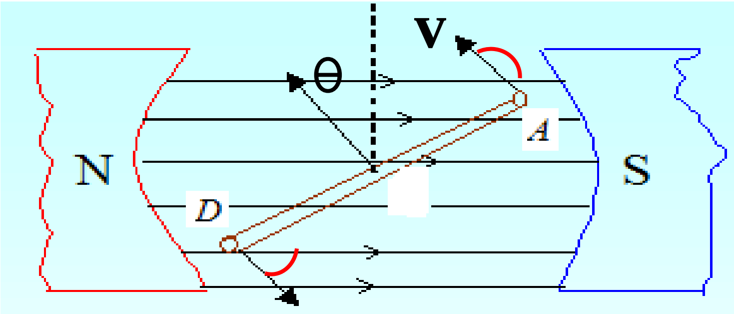
$\left\{\begin{array}{l} l\text{是AB或CD边的长度} \\ d\ \text{是BC或DA边的长度} \\ S=dl\text{为线圈面积} \end{array}\right.$

■这一结果也可从穿过线圈的磁通量的变化来考虑。当线圈处于图中位置时，磁通量为

$$\Phi=BS\cos(\theta+\pi/2)=-BS\sin\theta=-BS\sin\omega t$$

根据 Farady电磁感应定律：

$$\boxed{\xi=-\frac{d\Phi}{dt}=BS\omega\cos\omega t}$$



3、描述方法

- 任意形式的交流电 → 一系列不同频率简谐交流成分的叠加。所以只需研究简谐交流电。
- 简谐交流电的描述方法：
  - 函数描述
  - 矢量描述
  - 复数描述

3.1 函数描述

- 对简谐交流电来说，有电压、电流和电动势三个物理量，它们均可写成余弦(或正弦)函数形式：

  - 电　压　$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$
  - 电　流　$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$
  - 电动势　$e(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \phi_e)$

- 频率、峰值和相位是描述简谐交流电的基本特征量。确定上面三个物理量中的任何一个，都必须事先知道这些特征量。

周期和频率

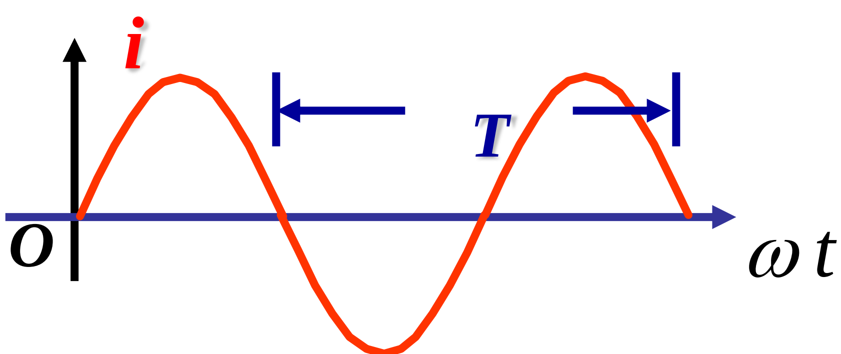
周期 T：交流电完成一次循环变化(或振荡)所需要的时间，单位为秒(s).

频率 f： 交流电在单位时间内完成周期变化的次数

单位为赫兹(即周／秒)，符号为Hz.

频率与周期的关系为：f=1／T

角频率： 交流电的角频率(或叫圆频率), 为交流发电机转子角速度： $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ 单位是弧度／秒，符号rad/s.



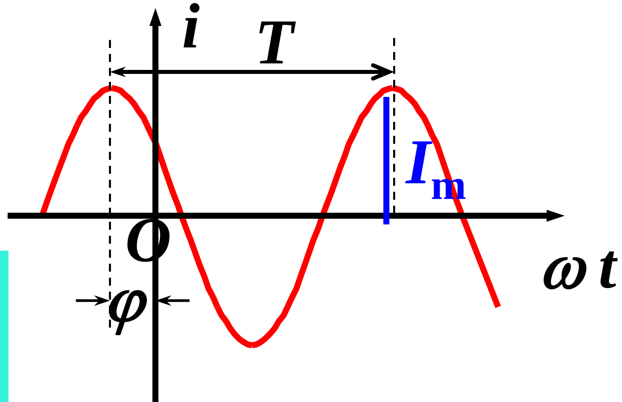
$$i = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi_i)$$

峰值与有效值

电流、电压、电动势的**峰值**：I_m、U_m、ε_m

有效值：与交流电热效应相等的直流电定义为交流电的有效值：

$$\int_0^T i^2 R\,dt = I^2 RT$$



$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2\omega t\,\mathrm{d}t}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)$$

$$V=V_m/\sqrt{2} \qquad \varepsilon=\varepsilon_m/\sqrt{2}$$

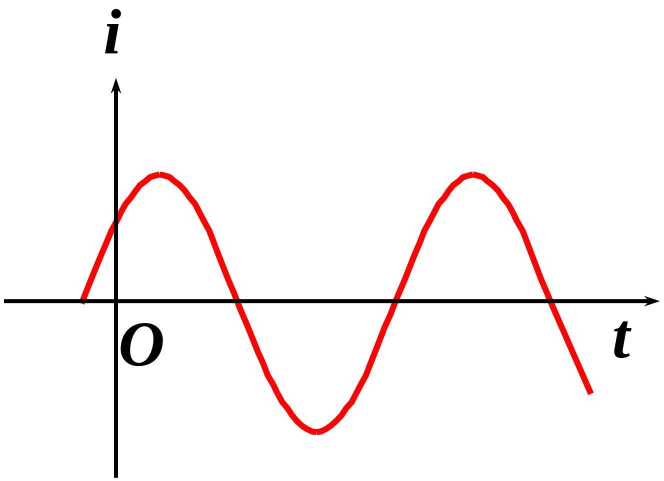
交流电压、电流表**测量的**数据均为有效值，

交流设备**铭牌标注的**电压、电流为有效值，

目的：**可利用直流电的公式去直接计算交流电的平均功率**

相位和相位差

- **相　位**：$\omega t+\varphi_v$、 $\omega t+\varphi_i$ 和 $\omega t+\varphi_e$ 为决定交流电瞬时状态的物理量。
- **初相位**：φ_v、 φ_i和 φ_e， 表示 t＝0 时刻的相位。
- 不同频率的简谐量均可用相位来描述其瞬间状态。
- 相位总是以2π为周期。当它改变2π之后，简谐量的状态重复出现。



- 同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。
- 一般规定：$|\varphi|\leq\pi$ 。

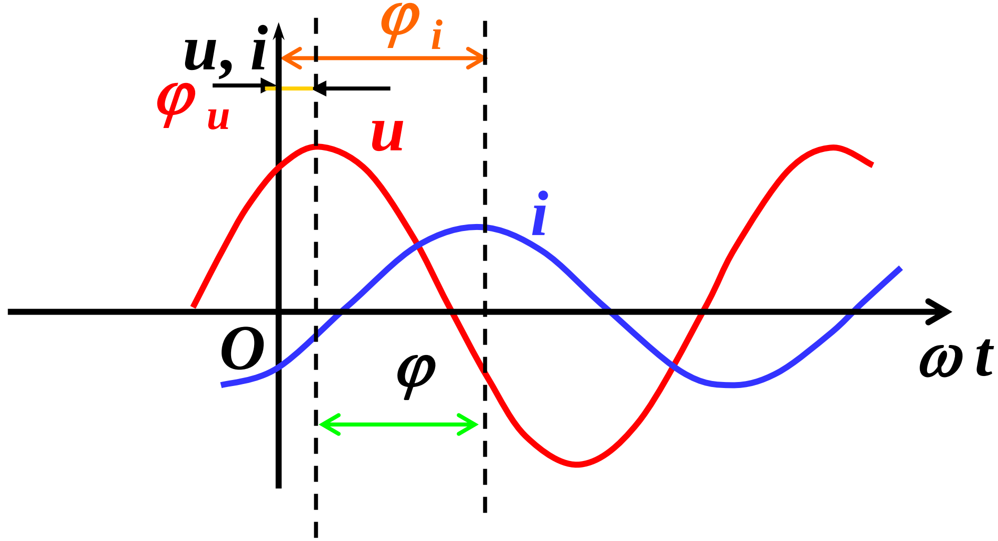
同频率余弦量的相位差

设 $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$，$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$

则 相位差即相位角之差：

$\varphi=(\omega t+\varphi_u)-(\omega t+\varphi_i)=\varphi_u-\varphi_i$ 恰好等于初相位之差

$\varphi>0$，u 领先(超前) i，或 i 落后(滞后) u (u 先到达最大值)；

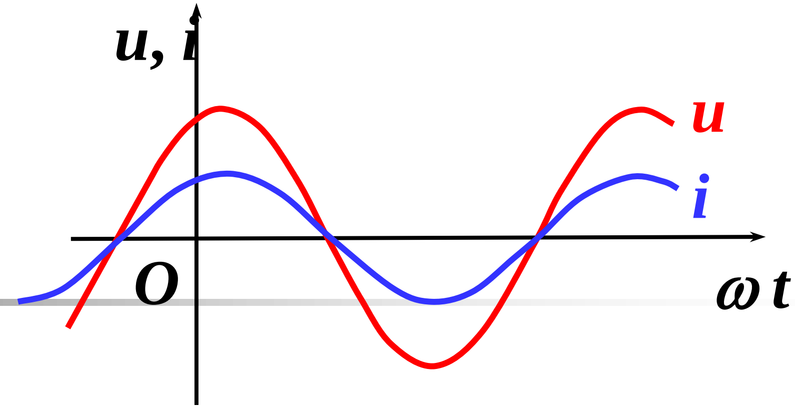


$\begin{cases}\varphi_u<0\\ \varphi_i<0\end{cases}$

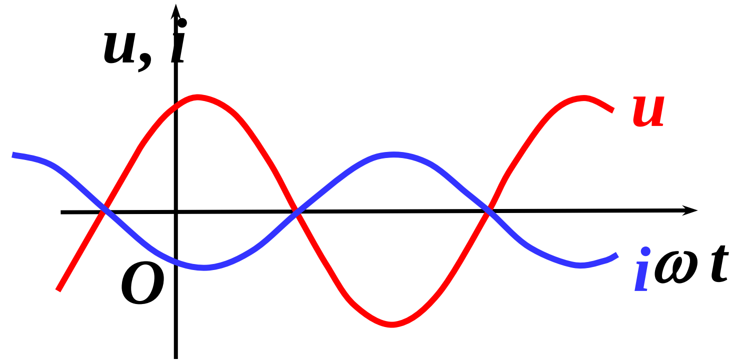
$\varphi<0$，i 领先(超前) u，或 u 落后(滞后) i (i 先到达最大值)

特殊相位关系：

φ =0， 同相：



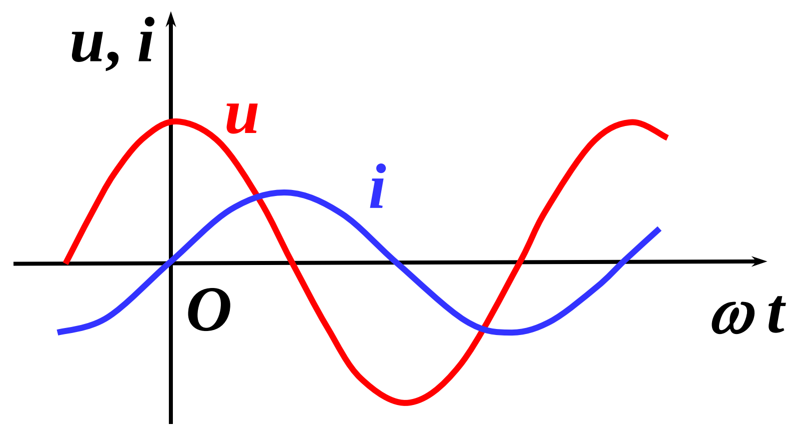
φ =±π（±180°），反相：



$\varphi = \pi/2$：

u **领先** ***i*** **于π/2, 不说**

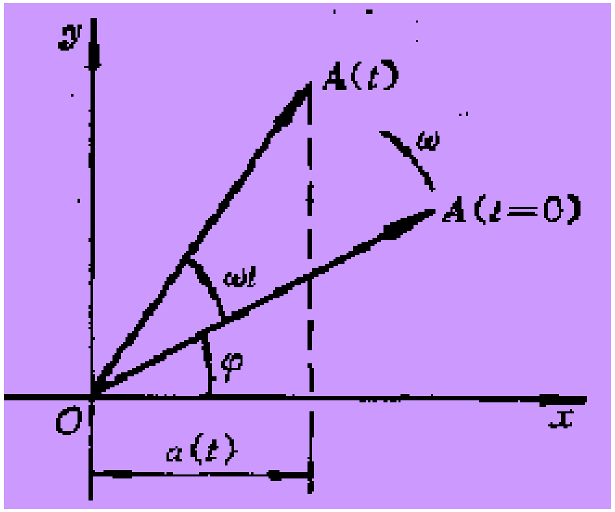
u **落后** ***i*** **于3π/2**



3.2 矢量描述

- 利用“旋转矢量”描述交流电
- 简谐交流电物理量：

$$a(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$



- 直角坐标系矢量图：
  - 从原点出发作一矢量A，其长度等于峰值A
  - 与x轴夹角等于初相位φ
  - 让矢量A以匀角速度ω绕o点逆时针旋转
  - 在任意时刻t，A与x轴的夹角为$\omega t+\varphi$，即相位
  - A在x轴上的投影值是简谐量的瞬时值$a(t)$
- 一个简谐量可以唯一地与一个旋转矢量相对应

- 两个同性质、同频率的简谐量：

$$a_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)\quad a_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

- 设该两个简谐量之和为其矢量合成：

$$a(t)=a_1(t)+a_2(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

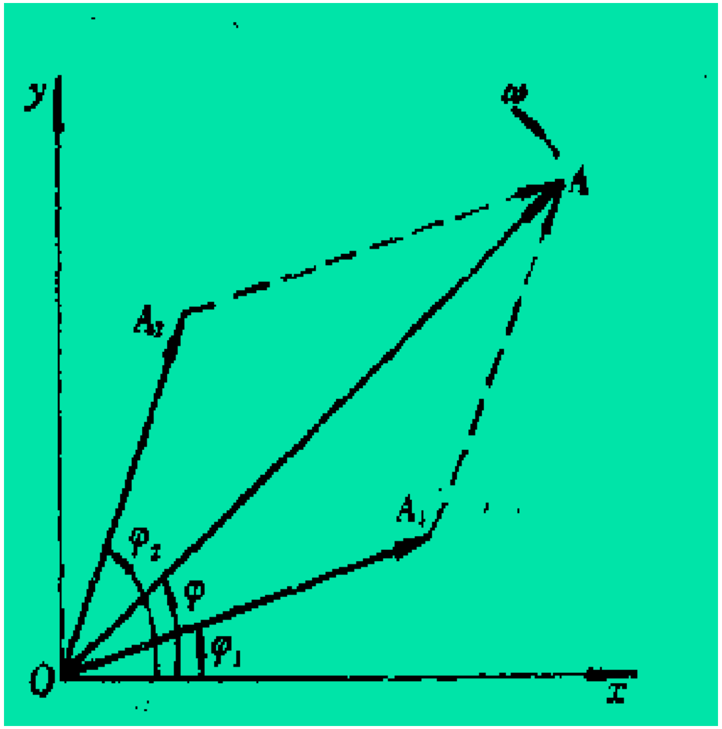
- 解出：

$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos(\phi_2-\phi_1)}$$

$$tg\phi=\frac{A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2}$$

- 矢量合成的运算规则一致

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$$



- 矢量方法的关键在于作出正确的矢量图
  - 适当的表示某电学量的矢量作为基准矢量。如串联电路，由于通过各元件的电流相同，一般以表示电流的矢量作为基准矢量；而并联电路，则由于各支路两端的电压相同，一般以表示电压的矢量作为基准矢量。
  - 按电学量间的关系，画出表示诸电学量的矢量。
  - 根据矢量图的几何关系，计算欲求之量

- 矢量法的优缺点：
  - 优 点：可以直观地表示各简谐量之间的相位关系，并通过矢量合成对同一性质、同频率的简谐量进行叠加。
  - 局限性：涉及复杂的三角函数运算，不便于分析复杂的交流电路。对于复杂的交流电路一般采用复数解法。

3.3 复数描述

1、基本知识：

j为虚数单位，满足$j^2=-1, \sqrt{-1}=\pm j$

$j^{4n}=1, j^{4n+1}=j, j^{4n+2}=-1, j^{4n+3}=-j$

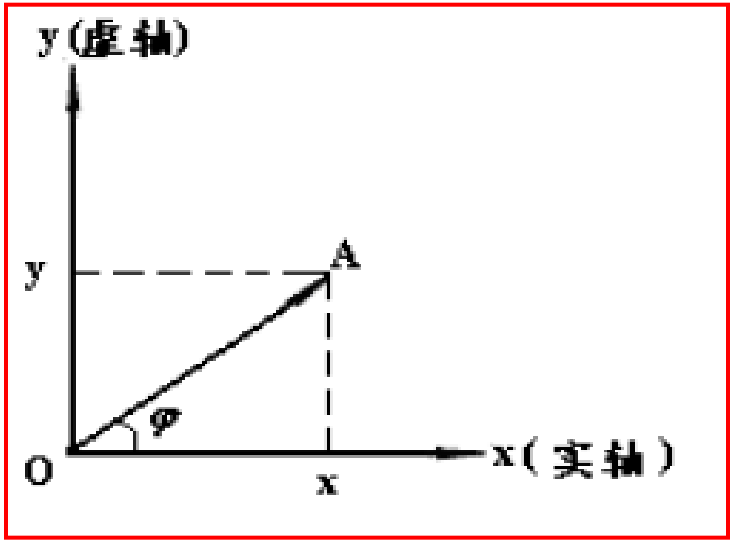
复数表示：

代数表示法：$\tilde{A}=a+jb$

指数表示法：$\tilde{A}=Ae^{j\varphi}$

几何表示法：$\tilde{A}=A\cos\varphi+jA\sin\varphi$

$$\begin{cases} A=\sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi=arctg\, b/a \end{cases}$$



复数运算：

$$\tilde{A}_1\pm\tilde{A}_2=(x_1+jy_1)\pm(x_2+jy_2)$$

$$=(x_1\pm x_2)+j(y_1\pm y_2)=Ae^{j\phi}$$

$$\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2=(A_1e^{j\phi_1})\cdot(A_2e^{j\phi_2})=A_1A_2e^{j(\phi_1+\phi_2)}$$

$$\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2}=\frac{\tilde{A}_1e^{j\phi_1}}{\tilde{A}_2e^{j\phi_2}}=\frac{A_1}{A_2}e^{j(\phi_1-\phi_2)}$$

2、复数表述

$$\tilde{A}=Ae^{j(\omega t+\varphi)}=A\cos(\omega t+\varphi)+jA\sin(\omega t+\varphi)$$

- 简谐量$a(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$与这个复数的**实部相对应**。
- 用一个复数代表一个简谐量的规定:
  - 该复数的实部就是这个简谐量本身;
  - 复数的模与简谐量的峰值对应;
  - 复数的辐角与简谐量的相位对应;
  - 若要对多个简谐量进行某种运算，可以对代表这些简谐量的复数进行相同的运算，所得复数的实部就是这些简谐量进行该运算的结果。
- 复数运算比余弦函数运算要简便得多，交流电路的复数解法是求解交流电路常用的重要方法。

简谐物理量任一瞬时值均可写成与之对应的、唯一的复数形式：

复电压： $\tilde{V} = V_m e^{j(\omega t+\phi_v)} = \sqrt{2} V e^{j(\omega t+\phi_v)} = \sqrt{2}\dot{V} e^{j\omega t}$

复电流： $\tilde{I} = I_m e^{j(\omega t+\phi_i)} = \sqrt{2} I e^{j(\omega t+\phi_i)} = \sqrt{2}\dot{I} e^{j\omega t}$

复电动势： $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_m e^{j(\omega t+\phi_\varepsilon)} = \sqrt{2}\varepsilon e^{j(\omega t+\phi_\varepsilon)} = \sqrt{2}\dot{\varepsilon} e^{j\omega t}$

复有效值： $\dot{V} \equiv V e^{j\phi_v}$， $\dot{I} = I e^{j\phi_i}$， $\dot{\varepsilon} = \varepsilon e^{j\phi_\varepsilon}$

取复数的实部，得到真正有物理意义的瞬时量：

$$V(t) = \mathrm{Re}(\tilde{V}) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

$$I(t) = \mathrm{Re}(\tilde{I}) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$\varepsilon(t) = \mathrm{Re}(\tilde{E}) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \phi_\varepsilon)$$

3、复数描述意义

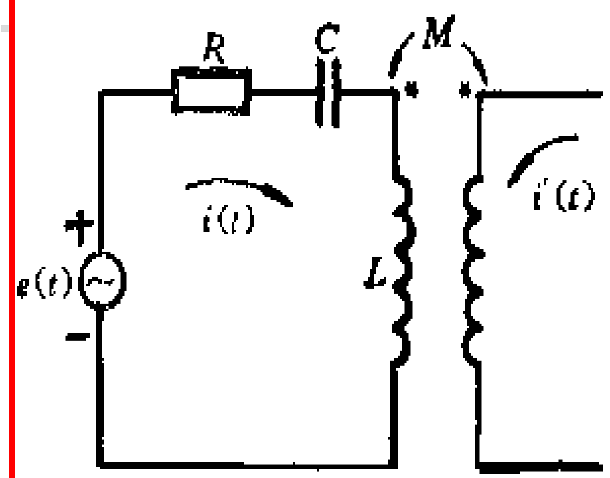
- 针对交流电路的特点，用复数定义不同元件的阻抗以及电源电动势、电压和电流，就可将交流电路的问题转化为直流电路的方式加以解决 — 这就是交流电路的复数解法。

- 所以复数解法简便扼要，可解决复杂电路问题。

§9.2　交流电路的复数解法

一、交流电路的基本方程

满足似稳条件的简单R、L、C单回路的基本方程：



$$\varepsilon = iR + \frac{1}{C}\int idt + L\frac{di}{dt} + M\frac{di'}{dt}$$

- 线性电路：R、L、C、M为常量，由它们的内在因素决定，与外在因素(如i、i'、ε)无关
- 线性电路的重要性质：若干个信号可以相互叠加

二、电路方程的复数形式

采用指数的复数表示：

$$\mathrm{Re}(\tilde{\varepsilon}) = \mathrm{Re}[R\tilde{I} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}dt + L\frac{d\tilde{I}}{dt} + M\frac{d\tilde{I}'}{dt}]$$

$$\tilde{\varepsilon} = R\tilde{I} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}dt + L\frac{d\tilde{I}}{dt} + M\frac{d\tilde{I}'}{dt}$$

$$= R\tilde{I} + \frac{1}{j\omega C}\tilde{I} + j\omega L\tilde{I} + j\omega M\tilde{I}' \quad \text{（复数形式）}$$

立即可得复有效形式（单回路）：

$$\dot{\varepsilon} = R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} + j\omega L\dot{I} + j\omega M\dot{I}'$$

以下分析中，一律采用复有效形式，并简称为复数形式

三、交流电路元件的复阻抗

- 一段电路或一个元件上的复电压与复电流之比，定义为该段电路或该元件的复阻抗：

$\dot{V} \equiv \dot{I}\dot{Z}$， 其中复阻抗 $\dot{Z} \equiv \dot{V}/\dot{I} = Ze^{j\phi}$

阻抗 $Z = V/I$； 辐角 $\phi = \phi_v - \phi_i$

$$\begin{cases} \dot{Z}_R = R \\ \dot{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \\ \dot{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2} \\ \dot{Z}_M = j\omega M = \omega M e^{j\pi/2} \end{cases}$$

电流、电压同位相

电流超前电压 $\pi/2$ 位相

电压超前电流 $\pi/2$ 位相

阻抗： $Z_R = R$； $Z_L = \omega L$； $Z_C = 1/\omega C$； $Z_m = \omega M$

表 9-2-1　交流电路元件的复阻抗

元件	电阻	电容	自感	互感
复阻抗 $\dot{Z}$	R	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$	$j\omega M$
阻抗 Z	R	$\frac{1}{\omega C}$	ωL	ωM
辐角 φ	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

- 引入复阻抗后：

$$\dot{\varepsilon}=\dot{I}(\dot{Z}_R+\dot{Z}_L+\dot{Z}_C)+\dot{I}'\dot{Z}_M$$

- 说明：
  - 引入复阻抗后，复电压、复电流和复阻抗之间出现了类似于欧姆定律的形式，这给运算带来很大方便
  - 复阻抗的模就是电路或元件的阻抗，复阻抗的辐角就是电压与电流的相位差。
  - 复阻抗同时反映了电压与电流的量值关系和相位关系两方面的信息，因而成为求解交流电路的中心问题。
  - 纯电阻提供了复阻抗的实部，而纯电感和纯电容提供了复阻抗的虚部。复阻抗的虚部称为电抗，由电感提供的电抗称为感抗，由电容提供的电抗称为容抗。

- 串联电路
  - 通过电路各元件的电流瞬时值是相同的
  - 总电压瞬时值应等于各元件上电压瞬时值之和
  - 串联电路的总复阻抗等于各元件的复阻抗之和

$$\dot{V} = \dot{I}\dot{Z} = \Sigma\dot{V}_i = \Sigma\dot{I}\dot{Z}_i \Rightarrow \quad \dot{Z} = \Sigma\dot{Z}_i$$

- 并联电路
  - 加在各支路上的电压瞬时值是相同的
  - 总电流的瞬时值应等于各支路上电流瞬时值之和
  - 总复阻抗的倒数等于各支路的复阻抗的倒数之和

$$\dot{I} = \Sigma\dot{I}_i \Rightarrow \quad 1/\dot{Z} = \Sigma 1/\dot{Z}_i$$

四.交流电路的基尔霍夫方程组及复数形式

- 基尔霍夫定律定律适用于直流电路和较低频率的交流电路中. 而对高频率的交流电路有较大误差.
- 基尔霍夫方程组及复数形式:

$$\begin{cases}\sum i(t)=0\\ \sum u(t)=\sum e(t)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum\left(\pm\dot{I}_i\right)=0\\ \sum\left(\pm\dot{I}\dot{Z}\right)=\sum\left(\pm\dot{\varepsilon}\right)\end{cases}$$

- 约定:
  - 由节点流出的电流，其复量前写加号，流向节点的电流，其复量前写减号;
  - 若绕行方向与某支路上电流的标定方向一致，该支路的复阻抗前写加号，否则写减号;
  - 若绕行方向与某电源电动势的标定方向一致，该电动势的复量前写加号，否则写减号。

§9.3 交流电的功率

交流电的功率的概念比直流功率的概念丰富得多。

这是因为：

（**1**）交流电是随时间作周期性变化的，因此就有**瞬时功率**和**平均功率**的概念；

（**2**）由于电感和电容是**储能元件**，它们之间存在相位差以及它们与电阻之间的相位差，因而有了**视在功率**与**有功功率**的的分别；而电路的**功率因素**则是衡量电路的有功功率在视在功率中所占的比重的一个重要参数。

（**3**）采用一定的方法，可以提高电路的功率因素，从而提高有功功率的比重。

一、瞬时功率

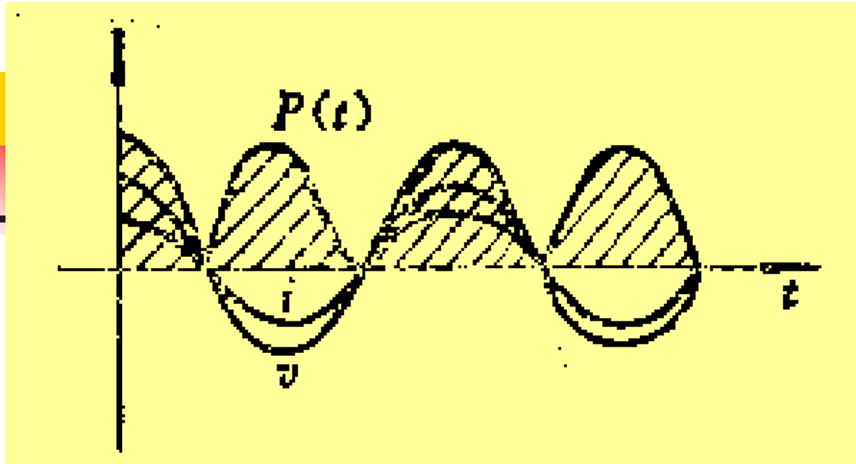
- 稳恒电路中,I和U是稳恒的,其功率在时间上也是稳恒的.
- 交流电路中，$i(t)$和$v(t)$一般存在相位差，所以功率$p(t)=i(t)v(t)$也随时间变化
- 瞬时功率：$p(t) = i(t)v(t)$

  设：$i(t) = I_m \cos\omega t$, $v(t) = V_m \cos(\omega t+\phi)$,

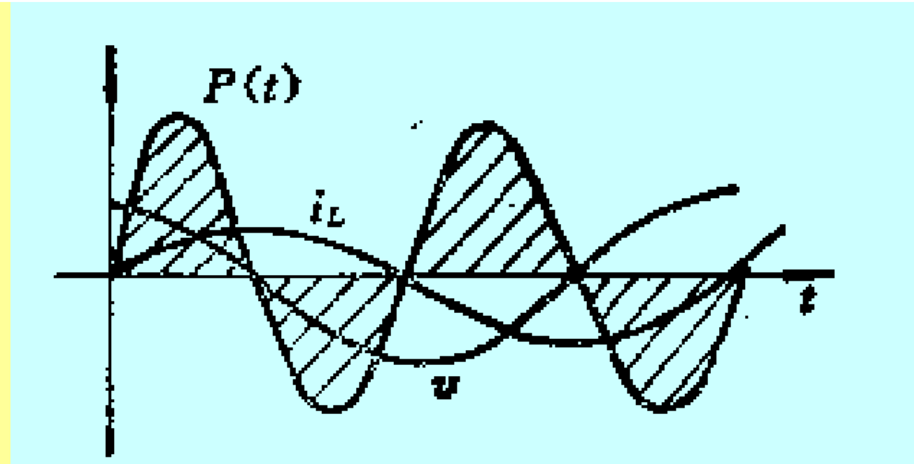
  则 $p(t) = V_m I_m \cos\omega t \cos(\omega t+\phi)$

  $= 1/2 V_m I_m [\cos\phi + \cos(2\omega t+\phi)]$

  - 第一项是与时间无关的常数值
  - 第二项是时间的2倍频项
  - 当p(t)>0时，元件由电源获得能量
  - 当p(t)<0时，元件的能量回入电源

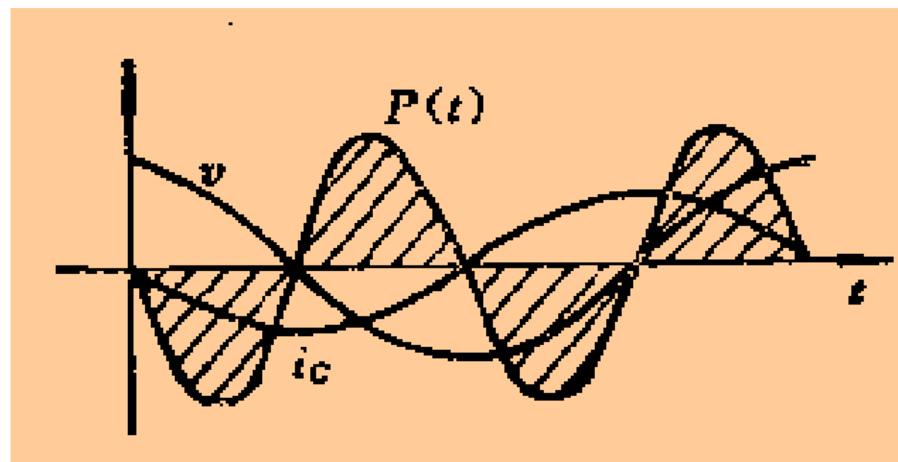


R（电流与电压同相位）



L（电压超前电流π/2）

R、L、C元件上的瞬时电压、电流和功率的关系



C （电流超前电压π/2）

- $p(t) = 1/2V_mI_m[\cos\phi + \cos(2\omega t+\phi)]$, $\phi = \phi_v - \phi_I$

- 在L、C元件上，瞬时功率随时间的变化是正弦函数，其频率是电压、电流的二倍.

- p(t) 的正负号每1 / 4周期改变一次.

- p(t) ＞0表示有能量输入该元件，电感吸收的能量转化为磁能储存在线圈的磁场中，电容吸收的能量转化为电能储存在电容器内的电场中.

- p(t) ＜0表示能量从元件中输出，即电感和电容分别把储存的磁能和电能重新释放出来.

二、平均功率与功率因素

- **平均功率**
  - 定义为瞬时功率在一个周期内的平均值
  - 平均功率是电路实际消耗的功率，记***P***

$$P=\bar{p}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=\frac{1}{2}V_m I_m\cos\phi=VI\cos\phi$$

  - 其中**V**，**I**分别是电压和电流的有效值。
- **功率因素**
  - **cosϕ**与时间无关是影响平均功率的重要因素，称功率因素
  - 对于纯电阻，ϕ ＝ **0**，与稳恒电路的情况一致， **cosϕ**为**1**。
  - 对于纯电感电路，ϕ＝**+π/2**， **cosϕ**恒为零。
  - 对于纯电容电路，ϕ＝**-π/2**， **cosϕ**恒为零。

三、视在功率和功率因素

- 视在功率
  - 定义为额定电压与额定电流的乘积 $S = VI$
  - 单位通常为“伏安”或“千伏安”

- 有功功率
  - 是电路在一个周期内实际消耗的功率P
  - **有功功率与平均功率的概念一致**$P = S\cos\phi$

- 即视在功率乘以功率因素$\cos\phi$等于有功功率。复杂电路的电器，为提高有用功率，要求增大$\cos\phi$。

四、由电压和电流复有效值计算平均功率

根据复数法求得电压和电流的复有效值，可直接计算平均功率。设：

$$\dot{V} = Ve^{j\varphi_v}, \dot{I} = Ie^{j\varphi_i}, \varphi_v - \varphi_i = \varphi,$$

有

$$\dot{V}\dot{I}^* = VIe^{j\varphi}, \quad \dot{V}^*\dot{I} = VIe^{-j\varphi}.$$

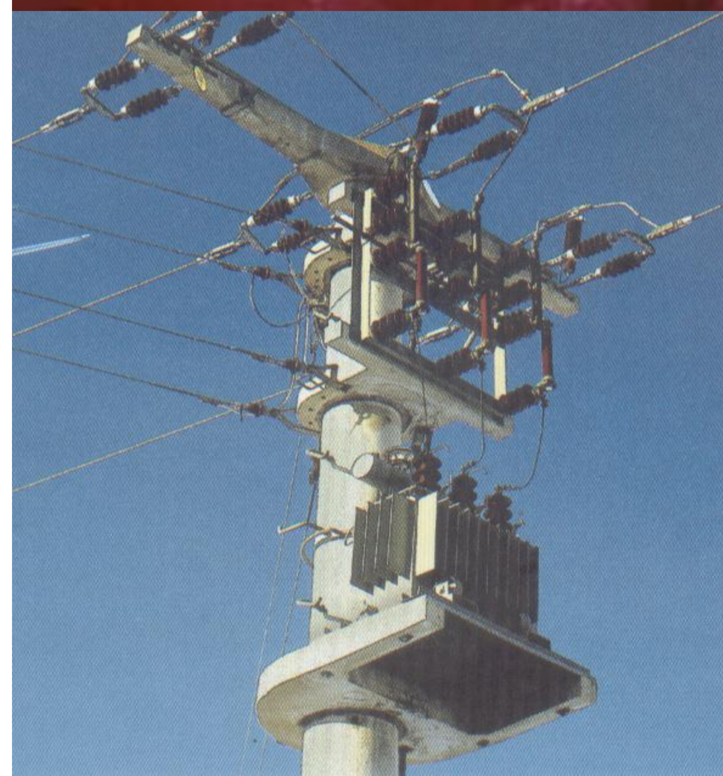
于是成立：

$$P = \mathrm{Re}(\dot{V}\dot{I}^*) = \mathrm{Re}(\dot{V}^*\dot{I}) = \frac{1}{2}(\dot{V}\dot{I}^* + \dot{V}^*\dot{I}).$$

§9.4 交流电路分析举例

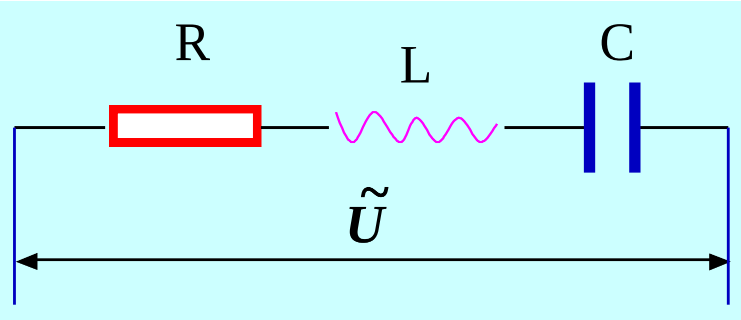
三种典型的交流电路

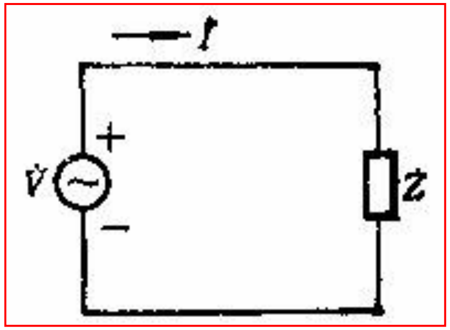
- 串联谐振电路
- 并联谐振电路
- 变压器电路



一、串联谐振电路

- 串联谐振电路由带内阻R的电感L和电容C组成。





- 复阻抗：

$$\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = Ze^{j\varphi_Z}$$

- 其中阻抗和辐角：

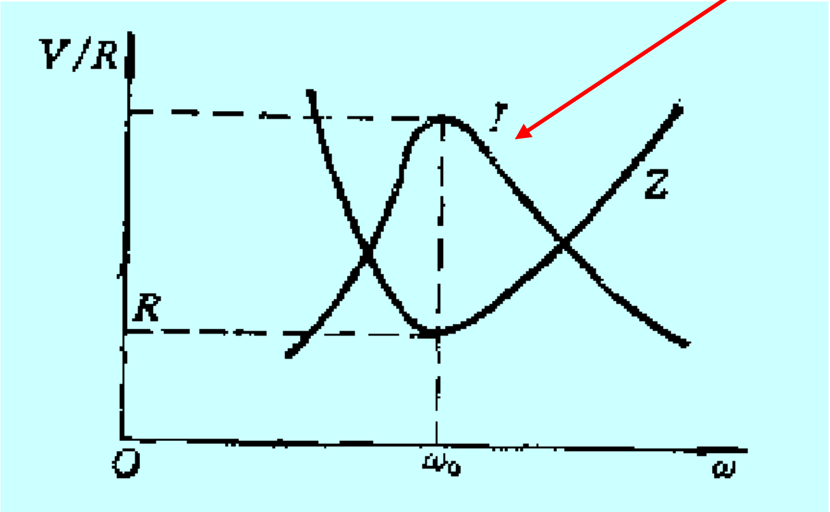
$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2}, \qquad \varphi_Z = tg^{-1}[\frac{\omega L}{R}(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})] \qquad \text{其中}\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

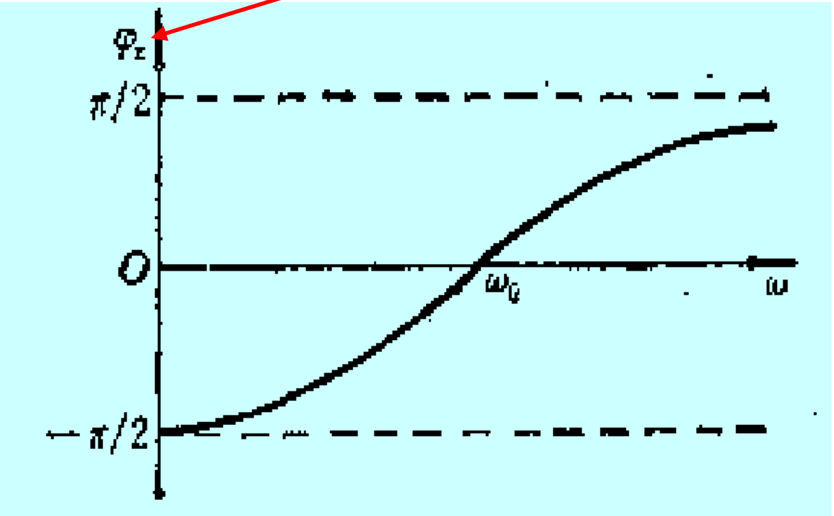
- 复电路方程： $\dot{V}=\dot{I}\dot{Z}$

- 设复电压的初相位为0，则： $\varphi_v=0,\ 即\dot{V}=V$

故得复电流为： $\dot{I}=\dot{V}/\dot{Z}=V/\dot{Z}=(V/Z)e^{-j\varphi_Z}=Ie^{j\varphi_i}$

- 其模和辐角分别为： $I=V/Z，\ \varphi_i=-\varphi_Z$





由前面结果：

$$Z=\sqrt{R^2+\omega^2L^2(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2},\qquad \varphi_Z=tg^{-1}[\frac{\omega L}{R}(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})]\qquad \text{其中}\ \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

当 $\omega L=\frac{1}{\omega C}\Rightarrow\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0$

则 $Z=R,\qquad \varphi_Z=0.$

这时 ***I*** 取极大值，***Z*** 取极小值。因而通过**R.L.C**上的电压都取到了极大值 — 这种情况称为**RLC**的**串联谐振**。

发生谐振时的频率**f₀**称为**谐振频率**： $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

此时有 $\varphi_Z=0$， $Z_{min}=R$， $I_{max}=V/R$；

$$\because Z=\sqrt{R^2+\omega^2L^2(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2},\qquad \varphi_z=tg^{-1}[\frac{\omega L}{R}(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2})]$$

- $\dot{I}=\dot{V}/\dot{Z}$, $\dot{Z}=\dot{V}/\dot{I}$, $Ze^{j\phi_z}=\dot{V}/\dot{I}$

- 当 $\omega>\omega_0$时，$\phi_z>0$, 电路呈电感性， V 超前 I

  $\omega<\omega_0$时，$\phi_z<0$, 电路呈电容性，V 落后 I

  $\omega=\omega_0$时，$\phi_z=0$, 电路呈纯电阻性，V与I同相

品质因素

- 定义：
  - RLC电路的品质因素

$$Q=\frac{1}{R\omega_0 C}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

  - Q值反映了谐振电路的固有性质.

- **1. 它决定了谐振时的阻抗比和电压比：**

因为： $\varphi_z=0$，$Z_{min}=R$，$I_{max}=V/R$

  - 当发生谐振时，$V_R=I_{max}R=V$，电阻的电压等于电源电动势
  - 电感和电容上的电压达到电源电压V的Q倍

$$V_L=I_{max}Z_L=I_{max}\omega_0 L=(V/R)\sqrt{L/C}=V_C$$

$$Q=\frac{Z_C}{R}=\frac{Z_L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{V_C}{V_R}=\frac{V_L}{V_R}$$

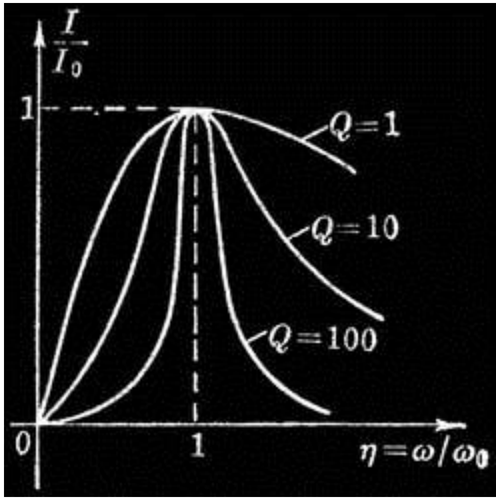
但相位相反，电感和电容的总电压为0

串联谐振电路称作**电压谐振电路** $V_L=V_C=QV_R$.

品质因素

- **2. Q值决定了谐振曲线的尖锐程度**
  - 设频率相对f_0增大或减小 Δf 时，使得$Z=\sqrt{2}Z_{min}$，$I=I_{max}/\sqrt{2}$则称2Δf 为谐振电路的通频带宽度，简称**带宽（推导见书）**

$$2\Delta f=\Delta\omega/\pi=f_0/Q$$



  - Q值越大，谐振曲线越尖锐，**选择性越好**。

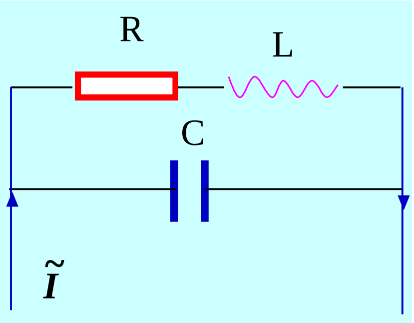
- **3. Q值表征电路的储能与损耗情况**

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{2\pi L}{T_0 R}=4\pi(\frac{1}{2}LI^2)/(I^2RT_0)=\frac{4\pi(\text{平均储能})}{\text{每周耗能}}$$

  - Q值越大，电路的储能与损耗相比就越大，**储能效率越高**。

二、 并联谐振电路

由带内阻R的电感L和电容C并联而成



$$\frac{1}{\dot{Z}}=\frac{1}{\dot{Z}_C}+\frac{1}{\dot{Z}_R+\dot{Z}_L}=j\omega C+\frac{1}{R+j\omega L}=j\omega C+\frac{R-j\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\dot{Z}}=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+j\left[\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right]}$$

阻抗和辐角：

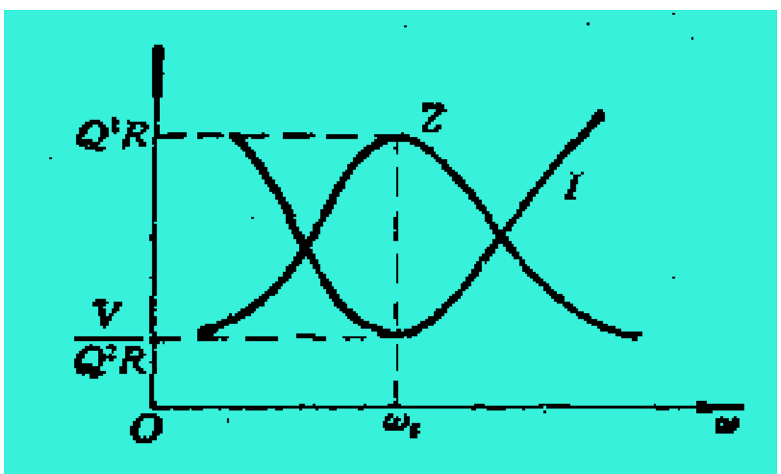
$$Z=R\left[\frac{1+(Q^2\omega^2)/\omega_0^2}{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2+\omega^2/(\omega_0^2Q^2)}\right]^{1/2} \qquad \varphi_Z=tg^{-1}\left[\frac{\omega L}{R}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-\frac{1}{Q^2}\right)\right]$$

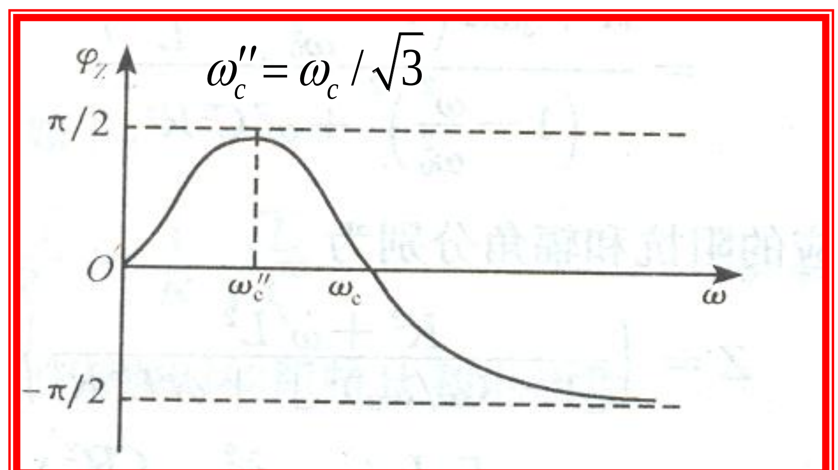
其中，$\mathbf{Q}=\frac{\mathbf{1}}{R\omega_0 C}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$， $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

并联谐振

当 $\varphi_Z = 0$时， $\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$， $f_C = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$

- f_C为并联谐振电路的谐振频率。f_C不等于f_0
- 电路阻抗接近最大值，回路总电流接近最小值
- 等效阻抗和总电流特性与串联谐振电路的情况相反
- 一般情况下，电路的频率较高而电阻较小(自感元件中的铁芯损耗)： $R << \omega L \Rightarrow Q >> 1 \Rightarrow \omega_C = \omega_0,\ f_C = f_0$
- 可得如下两图（见书）：





并联谐振具有如下特点：

- 回路总阻抗达最大值,当R<<ωL时,共振频率

$$f_0 \approx 2\pi \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_{\max} \approx Q^2 R$$

- 回路总电流达最小值

$$I_{\min} \approx \mathrm{V}/(\mathrm{Q}^2 R)$$

- 两个分支电流，I_1和I_2在数值上达最大，但I_1与I_2在位相上相差180⁰，所以并联谐振又称为电流谐振:

$$I_L \approx I_C \approx QI$$

- 除此之外，Q 对并联谐振电路也具有类似意义。

小结

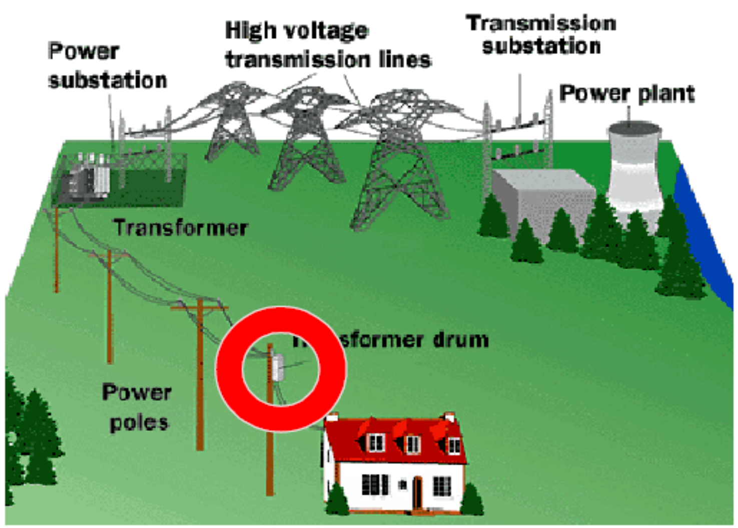
- 含有电感和电容的交流电路，当电路两端电压和电路的电流同相，这时电路中就发生了谐振现象。

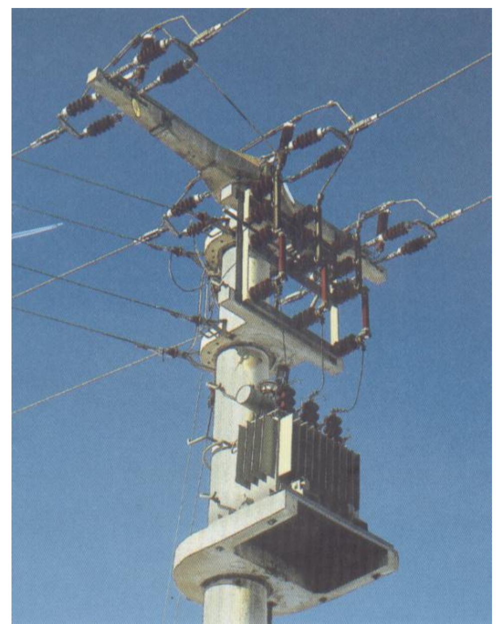
- **串联谐振时**电路的总阻抗模最小，电流最大；电感或电容上的电压可能超过电源电压的许多倍。**电压谐振**。

- **并联谐振时**电路的总阻抗模最大，总电流最小；两并联支路的电流近于相等、相位相反，且比总电流大许多倍。**电流谐振**。

三、 变压器电路

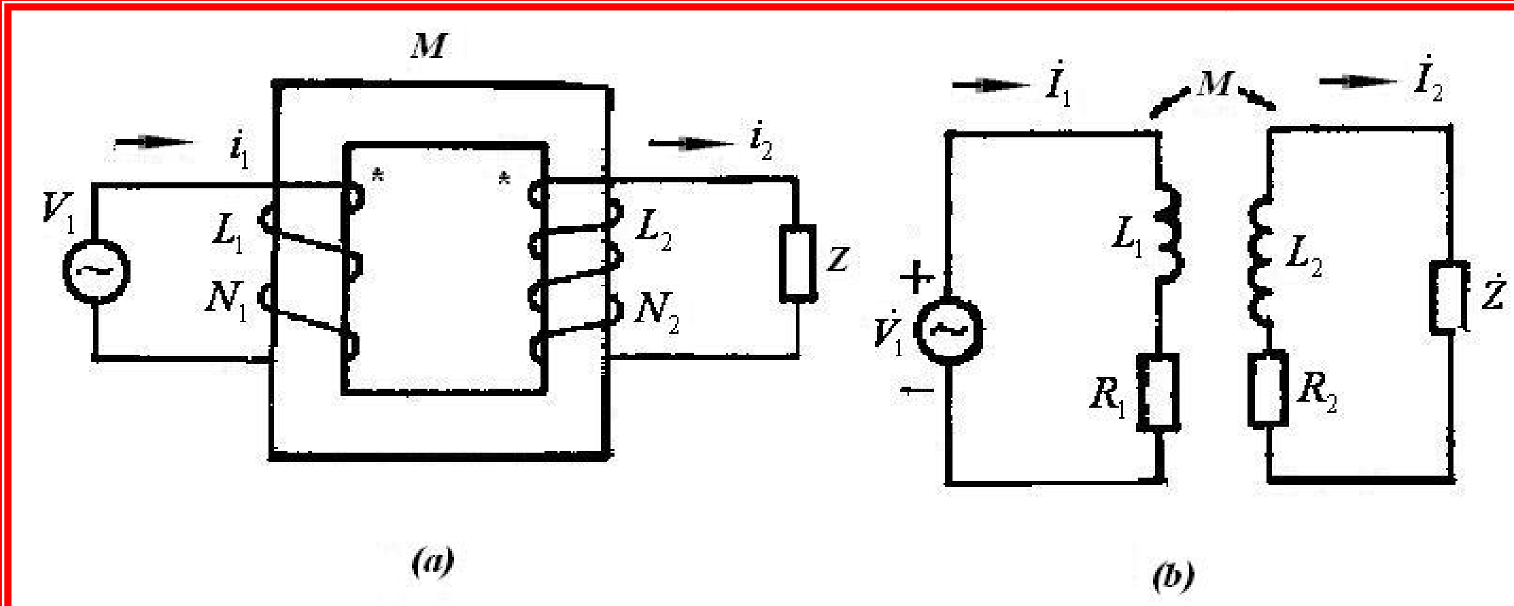
- 在长距离输送电的过程中，由于电线存在着一定的电阻，因此就有焦耳热损耗: $Q = 0.24I^2Rt$ 。式中I为电流，R为电阻，t为时间。
- 在 $P=IU$ 一定时，尽量提高输送电压U，需要变压器，可以大大降低I，从而大大减低焦耳热损耗，但用户一般用的是低压电，因此又需要变压器将高压转换为低压。





变压器原理：

- 变压器是由绕在同一铁芯上的两个线圈构成
- 与电源相连线圈为初级线圈，与负载相连线圈为次级线圈
- 变压器是以互感为基础，能量依靠铁芯中的互感磁能传递
- N_1、N_2分别为初、次极线圈的匝数， L_1、L_2为自感，M为互感， R_1、R_2为线圈内阻， I_1、I_2为电流，从异名端流入。



电路方程：

初级线圈：$\dot{V}_1=\dot{I}_1\dot{Z}_1-\dot{I}_2\dot{Z}_M$

次级线圈：$0=\dot{I}_2\dot{Z}_2-\dot{I}_1\dot{Z}_M$

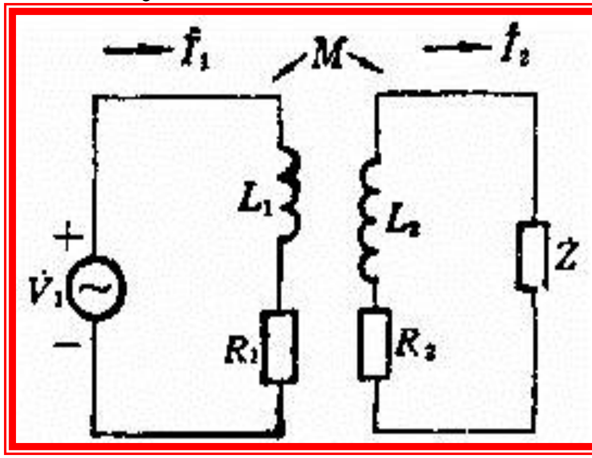
其中 $\dot{Z}_1=R_1+j\omega L_1$，$\dot{Z}_2=R_2+j\omega L_2+\dot{Z}$，$\dot{Z}_M=j\omega M$

由上两方程可解得输入电流和输出电流：

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{V}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2-\dot{Z}_M^2}\qquad \dot{I}_2=\frac{\dot{V}_1\dot{Z}_M}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2-\dot{Z}_M^2}$$

于是输入电流和输出电流之比(变流比)，变压比：

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}=\frac{\dot{Z}_M}{\dot{Z}_2}\qquad \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}=\frac{\dot{I}_2\dot{Z}}{\dot{V}_1}=\frac{\dot{Z}\dot{Z}_M}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2-\dot{Z}_M^2}$$



对理想变压器：

- 无磁漏，即通过两组线圈每匝的磁通都一样，则：

$$M^2 = L_1 L_2; \quad L_1 / L_2 = N_1^2 / N_2^2$$

- 无铜损(绕组中无电阻)即：

$$R_1 = R_2 = 0$$

- 无铁损(忽略铁芯中的磁滞损耗和涡流损耗)；

- 初、次级线圈的感抗远大于电源内阻和负载阻抗：

$$Z_1, Z_2, Z_M >> Z$$

于是，得理想边压器的如下重要关系：

变流比

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}=\frac{\dot{Z}_M}{\dot{Z}_2}=\frac{j\omega M}{j\omega L_2}=\frac{\sqrt{L_1L_2}}{L_2}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}=\frac{N_1}{N_2}$$

变压比

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}=\frac{j\omega M\dot{Z}}{-\omega^2L_1L_2+j\omega L_1\dot{Z}+\omega^2M^2}=\frac{M}{L_1}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}=\frac{N_2}{N_1}$$

变换阻抗　变压器初级等效阻抗(反射阻抗)为：

$$Z_1'\equiv\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2-\dot{Z}_M^2}{\dot{Z}_2}=\frac{L_1}{L_2}\dot{Z}=\frac{N_1^2}{N_2^2}\dot{Z}$$

初级和次级回路功率相等，
电能转换效率100%

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{V_2I_2}{V_1I_1}=\frac{N_2}{N_1}\frac{N_1}{N_2}=1$$