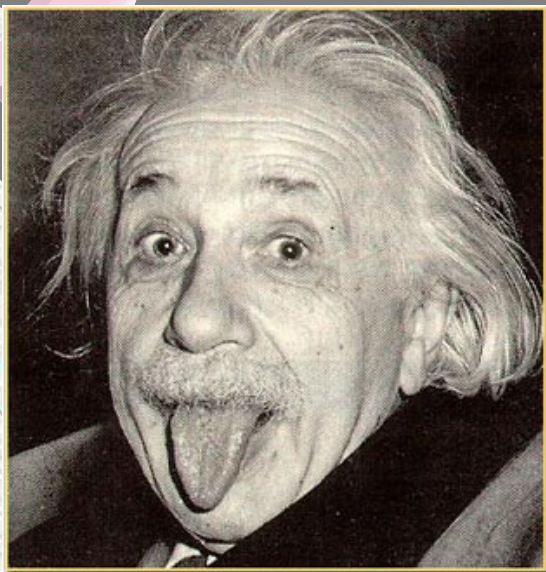




力学



第八章

杨维纮

中国科学技术大学



第八章 刚体力学

质点是作为抽象模型而引入的，如问题不涉及转动，或物体的大小对于研究问题并不重要，可以将实际的物体抽象为质点。

“质点”，这就根本谈不上在空间中的取向，也根本谈不上转动。问题如涉及转动，就不能不考虑到物体的大小与形状，不能再将物体抽象为质点，不能再采用质点这一模型。当然，我们可以将物体细分成很多部分，每一部分都看成是一个质点，利用各部分之间的位置关系来描述物体的形状和转动，即我们可以利用“质点组”这一模型。但是，一般的质点组力学问题并不能严格解决，我们只能了解其运动的总趋向及某些特征。



第八章 刚体力学

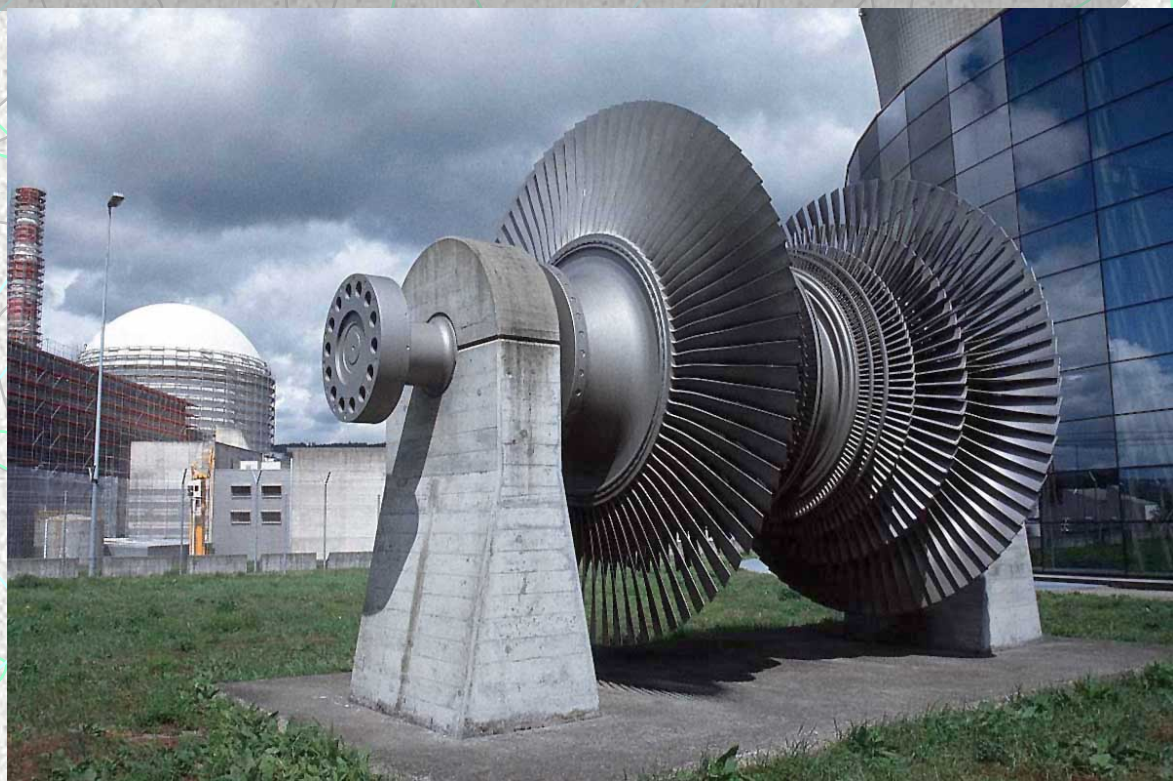
几种特殊的质点组:

1. 刚体

2. 弹性体

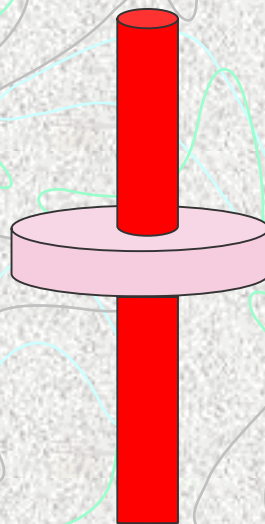
3. 流体

Design of turbine



Distribution of the mass!

Rotation





第八章 刚体力学

究其原因，我们引入自由度这一概念。我们把确定一个力学体系在空间的几何位形所需的独立变数的个数称为自由度。一个自由的质点显然有三个自由度， n 个自由的质点所组成的质点组显然有 $3n$ 个自由度。每个质点有一个矢量的运动方程， n 个质点共有 n 个矢量的运动方程，亦即 $3n$ 个分量的运动方程，方程的个数与自由度数符合。在原则上讲，可以从运动方程组解出质点组的运动情况。但是大数目的微分方程所组成的微分方程组是很难解出的。质点组力学问题之所以一般不能严格解出，就是因为微分方程个数太多，换句话说，质点组力学的困难正在于自由度数太大。



第八章 刚体力学

如果需要研究物体的转动，就不能忽略它的形状和大小而把它简化为质点来处理。但如果物体的形状和转动不能忽略，而形变可以忽略。我们就得到实际物体的另外一个抽象模型——刚体(**rigid body**)，即形状和大小完全不变的物体。刚体的这一特点使刚体力学大大不同于一般的质点组力学，刚体力学问题虽不是每个都能解决，但有不少是能够解决的。于是我们定义：**刚体是这样一种质点组，组内任意两质点间的距离保持不变。**

优点？

缺点？

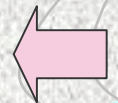


§ 8.1 刚体运动学

8.1.1 刚体的性质

8.1.2 刚体的几种特殊运动

8.1.3 刚体的一般运动





8.1.1 刚体的性质

1. 自由刚体的自由度数是6，非自由刚体的自由度数 < 6

这6个变数当然也可理解为确定刚体上某一点（例如质心）的位置，这需要3个变数；其次，应指出整个刚体相对于这一质点的取向，即指明通过该点的某一直线的方向（三个方向余弦，但三个方向余弦平方和等于一），这需要两个独立变数，并且需要指明刚体相对于这一直线的方位（绕该直线所转过的角度），这要一个独立变数。仍然得到同一结论：自由刚体只有六个自由度。

简单地说，自由刚体有三个移动自由度（为指出刚体中某一点的位置需要三个独立变数），三个转动自由度（为指出刚体相对于该质点的取向又需要三个独立变数）。但是，非自由刚体的自由度没有这么多，例如绕固定轴线转动的刚体就只有一个自由度。





8.1.1 刚体的性质

1. 自由刚体的自由度数是6，非自由刚体的自由度数 < 6

刚体既然只有六个自由度。它的运动定律也就可以归结为六个独立方程。我们前面学过的质心运动定理确定刚体质心的运动，而动量矩定理确定刚体在空间中的取向与方位随时间变化的情况；这样，这两个定理（两个矢量方程式，即六个分量方程式）就完全确定了刚体的运动。作为对照，我们知道，在质点组动力学中，质心运动定理与角动量定理只给出质点组运动的总趋向与特征，并不足以完全确定质点组的运动情况。



8.1.1 刚体的性质

2. 刚体的质心

刚体是由连续分布的质点所组成的质点组，刚体的质心为：

$$\begin{cases} m_C = \int dm = \int \rho dV \\ \mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \rho \mathbf{r} dV}{\int \rho dV} \end{cases}$$

这里的积分应遍及刚体的全部体积。在实际计算时，我们常用质心位矢的分量形式，为：

$$x_C = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad y_C = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad z_C = \frac{\int z dm}{\int dm}$$





8.1.1 刚体的性质

2. 刚体的质心

对于特殊情况，如果刚体具有对称中心，质心就在对称中心。如果刚体无对称中心，但可划分为几个部分，而每一部分都有对称中心，各部分的质心就在其对称中心，这些质心形成分立质点的质点组，刚体的质心就归结为这一质点组的质心。



8.1.1 刚体的性质

3. 刚体的内力做功为零

将动能定理应用于刚体时，应注意刚体的一个特点：**内力所作的总功为零**。现在证明如下：试考察刚体的第 j 个质点与第 k 个质点相互作用的 $\mathbf{F}_{jk}$ 与 $\mathbf{F}_{kj}$ 这一对内力。如刚体稍微改变其位置，第 j 个质点与第 k 个质点的位移各为 $d\mathbf{r}_j$ 与 $d\mathbf{r}_k$ ，则这一对内力所作功的和为：

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{ik} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ki} \cdot d\mathbf{r}_k &= \mathbf{F}_{ik} \cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{F}_{ik} \cdot d\mathbf{r}_k \\ &= \mathbf{F}_{ik} \cdot (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_k) = \mathbf{F}_{ik} \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)\end{aligned}$$

由于刚体内任意两质点间的距离保持不变，故有：

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) = \text{常量}$$

微分一次，得： $2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) = 0$

即： $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \perp d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$ 而 $\mathbf{F}_{ik} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$

于是知刚体的内力做功为零。



8.1.1 刚体的性质

3. 刚体的内力做功为零

$$E_k(t) - E_k(t_0) = A_{\text{外}}$$

若外力的功可分为保守力作的功和非保守力作的功，而保守力作的功可以用势能的减少来表达，即：

$$A_{\text{外}} = A_{\text{保外}} + A_{\text{非保外}}$$

$$A_{\text{保外}} = V(t_0) - V(t)$$

于是刚体的功能原理为：

$$[E_k(t) + V(t)] - [E_k(t_0) + V(t_0)] = A_{\text{非保外}}$$

若 $A_{\text{非保外}} = 0$ ，则可得刚体的机械能守恒定律：

$$[E_k(t) + V(t)] = [E_k(t_0) + V(t_0)] = E$$

对于刚体，不仅在质心运动定理与动量矩定理中无须计及内力，就连在动能定理中也无须计及内力，这是不同于一般质点组的。





8.1.1 刚体的性质

4. 作用在刚体上的力是滑移矢量

作用在刚体上的任何力系，最终可以等效为一个作用于刚体上某一点的力和一个力偶矩方向与之平行的力偶。这样的一组力和力偶称为偶力组或力螺旋。当力偶矩为零时，力系等效为一个合力。





8.1.2 刚体的几种特殊运动

1. **平动:** 作平动时, 刚体上每一点的运动情况完全相同, 刚体的运动可用一质点来代表, 因而这种运动的描述与质点相同。其自由度为3, 或称有3个平动自由度。
2. **定轴转动:** 刚体运动时, 刚体上的各质点均绕同一直线作圆周运动。这条不动的直线称为转轴, 这种运动称为刚体的定轴转动。在定轴转动时, 刚体上凡是与轴平行的直线上的质点运动情况相同, 即有相同的位移、速度和加速度。因此, 讨论时只需考虑与转轴垂直的一个截面的运动, 刚体的位形由此截面的位形决定。而截面的位形只需不在轴上的一个质点的方位 (常用角位置) 表示。显然, 定轴转动只有一个自由度。



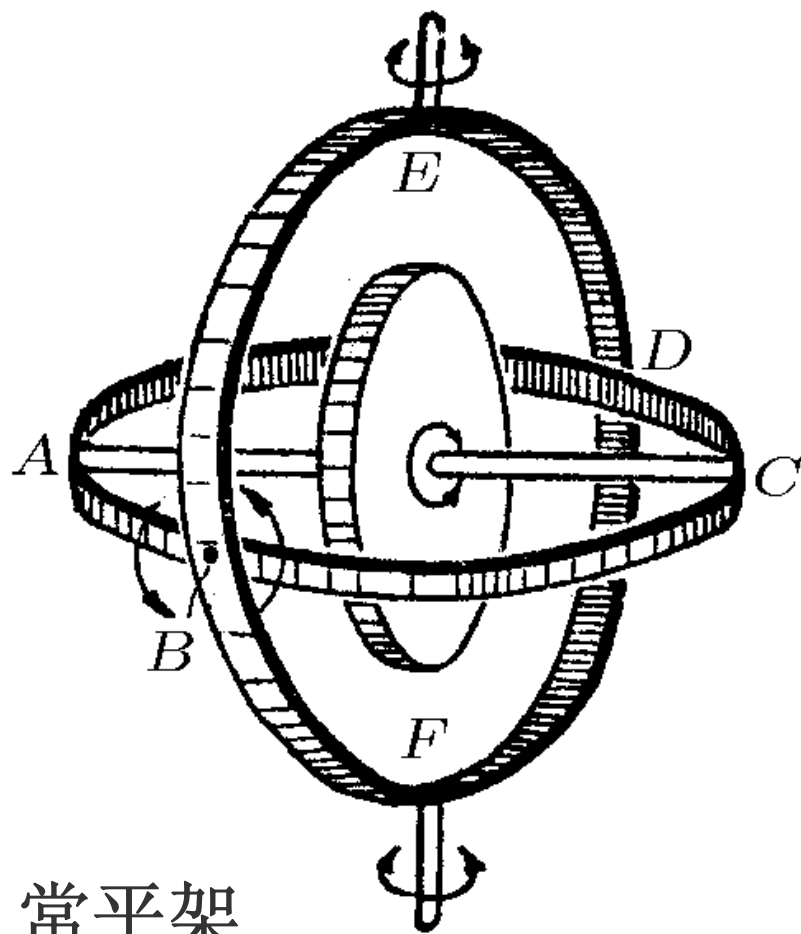


8.1.2 刚体的几种特殊运动

3. **平面平行运动：**刚体在运动过程中，其上每一点都在与某固定平面相平行的平面内运动，这种运动称为刚体的平面平行运动，这时。刚体内任一与固定平面相垂直的直线上所有点的运动情况完全相同，因而刚体的运动可用与固定平面相平行的任一截面的运动来代表，而该截面在通过自身平面内的运动可以看成其上任一点A（称为基点）在平面上的移动与该截面绕过该点且垂直于平面的轴线的转动的组合。确定基点的位置需要两个平动参量，在与基点相对静止的参照系上，刚体的运动成为绕过基点的固定轴的转动，即定轴转动，这需要一个转动参量。于是，刚体的平面平行运动的自由度为3。



8.1.2 刚体的几种特殊运动



常平架

4. **定点转动：**刚体运动时，始终绕一固定点转动，这种运动称为刚体的定点转动。这个定点可以在刚体上，也可以在刚体的延拓部分。可以证明，作定点转动的刚体，在任一瞬时，总可看成绕通过该定点的某一瞬时轴的转动（下一瞬时则为绕另一瞬时轴的转动）。不难看出，定点转动的自由度为3（3个转动自由度）。





8.1.2 刚体的几种特殊运动

由以上分析可见，刚体平动的描述与质点的运动相当，只需考虑质心的运动即可，不必另加讨论。所以我们以后各节将分别讨论刚体的其它三种运动。





8.1.3 刚体的一般运动

1. 运动的描述

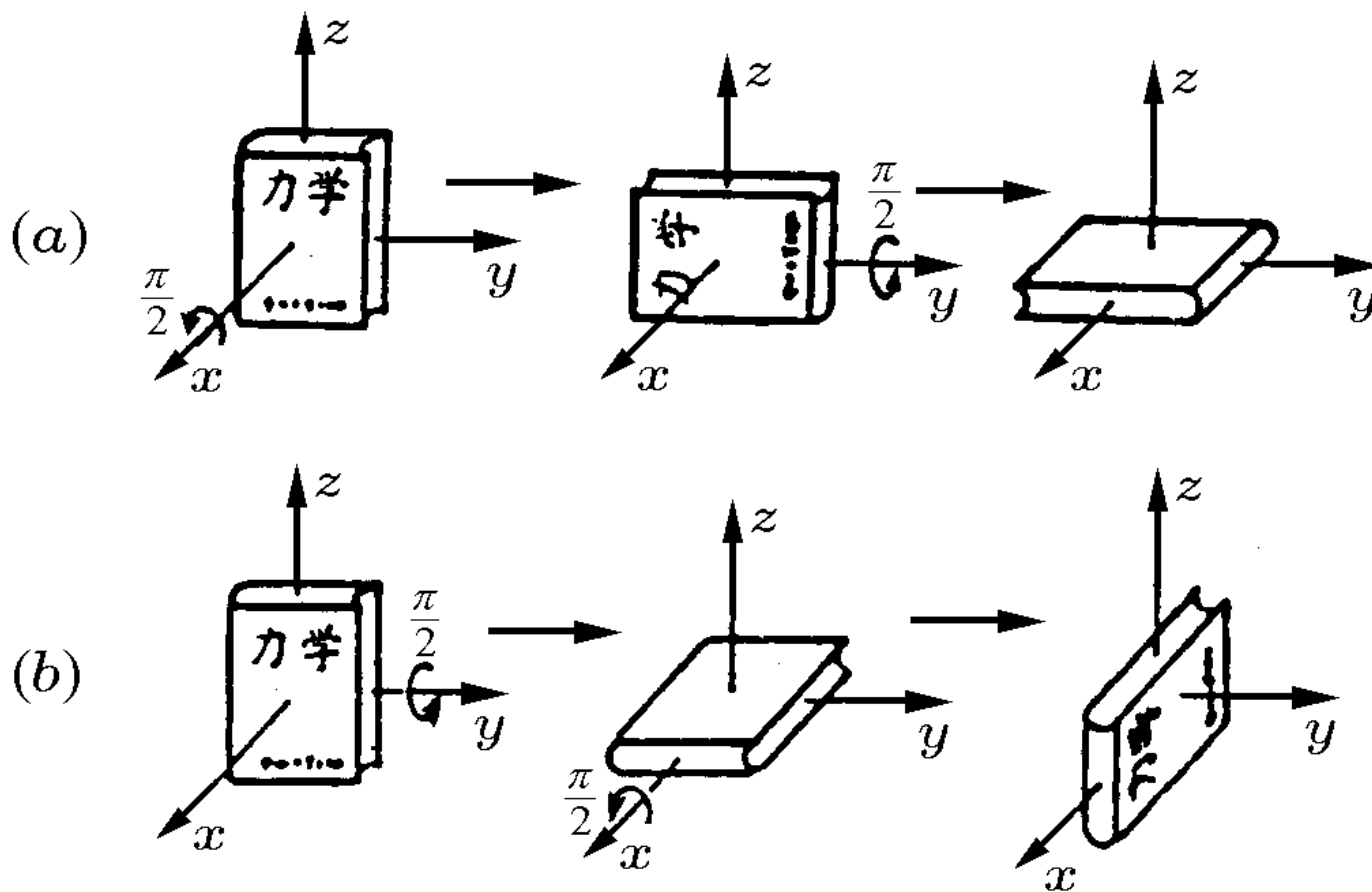
刚体的一般运动可以看成随刚体上某一基点 A （例如质心）的平动和绕该点的定点转动的组合。在与基点相对静止的参考系上，绕该点的转动即为定点转动。因此，作一般运动的刚体的自由度为6。





8.1.3 刚体的一般运动

2. 角速度是矢量





8.1.3 刚体的一般运动

2. 角速度是矢量

可见，角位移一般不是矢量。

在上面的例子中，角位移是有限大小的，而（瞬时）角速度只与无限小的角位移相联系。现在我们来证明，角速度的合成服从平行四边形法则，从而是真正的矢量。

（自习）





8.1.3 刚体的一般运动

3. 刚体角速度的绝对性

一般来说，刚体的任何运动都可以分解为基点的平动及绕基点的定点转动。选择不同的基点，平动速度就不同；而转动角速度则与基点的选择无关，不管选择刚体上哪一点，角速度矢量的方向及大小都不变。刚体的这一重要性质，称为刚体角速度的绝对性。

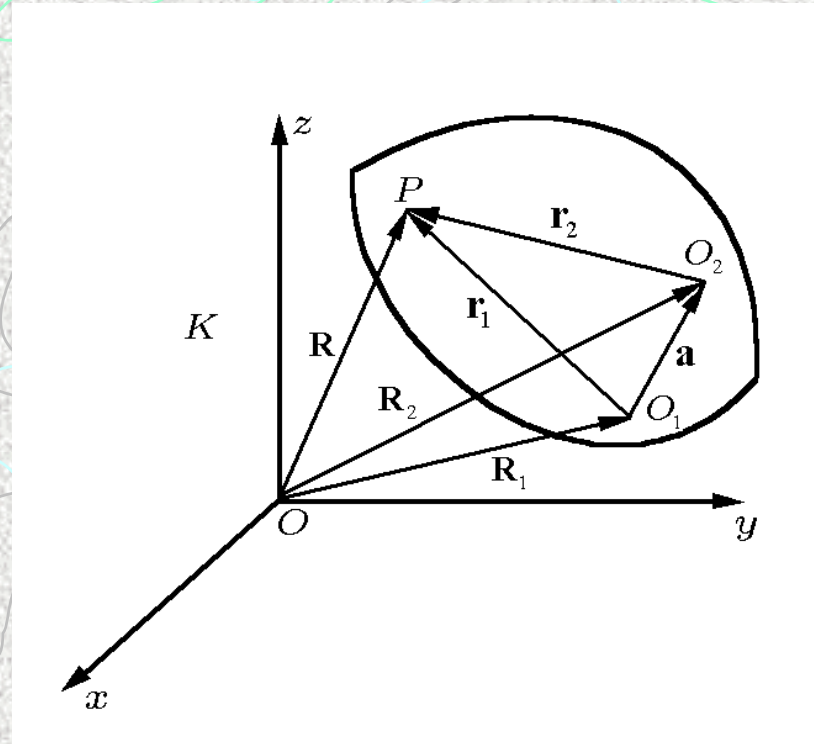




8.1.3 刚体的一般运动

3. 刚体角速度的绝对性

证明：（自习）

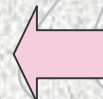




§ 8.2 施于刚体的力系的简化 (自习)

8.2.1 作用在刚体上的力是滑移矢量

8.2.2 几种特殊力系



§ 8.3 刚体的定轴转动

8.3.1 角动量与角速度的关系

考察绕固定轴（取为 z 轴）转动的刚体在某瞬时对轴上某定点 O 的角动量（取 O 为原点）。将刚体看成质点组，设第 i 个质点（质元）的质量为 Δm_i ，位矢为 $\mathbf{r}_i$ ，速度为 $\mathbf{v}_i$ ，则该质点对原点的角动量为：

$$\Delta \mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i$$

于是：

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \Delta \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i = \sum_i [\mathbf{r}_i \times \Delta m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \\ &= \sum_i \Delta m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i] \end{aligned}$$

故角动量 $\mathbf{L}$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 成线性关系，但一般说来它们不在同一方向上。



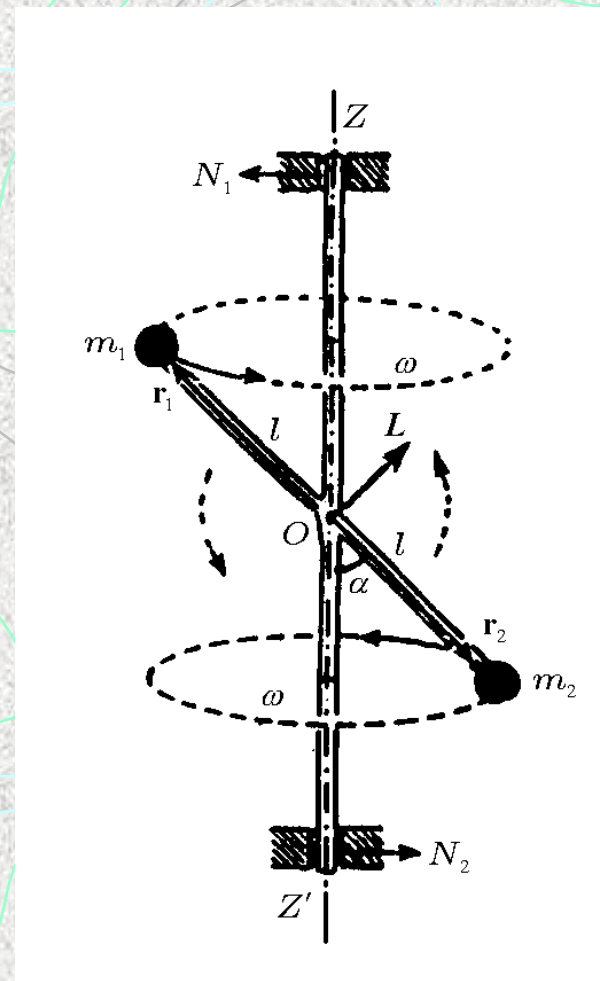
8.3.1 角动量与角速度的关系

例8-1: 如图所示, 刚体由固联在一无质量刚性杆两端的质点 1 和 2 组成 (质量 $m_1 = m_2 = m$), 杆长 $2l$, 在其中 O 点处与刚性轴 zOz' 成 α 角斜向固联。此刚体以角速度 ω 绕轴旋转, 求角动量的大小和方向。

解: 取 O 为参考点, 令两质点的位矢分别为 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$, 则:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m[\mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_2 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2)] \\ &= 2m\mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) \end{aligned}$$

在上例中角动量 $\mathbf{L}$ 不但与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向不同, 而且它的方向随刚体旋转, 并不固定。





8.3.2 转动定律

刚体作定轴转动时，转轴 z 的方向是固定的，故有：

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k} \quad \mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \Delta m_i [\mathbf{r}_i^2 \omega \mathbf{k} - \omega z_i (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k})] \\ &= \sum_i \Delta m_i [(x_i^2 + y_i^2) \omega \mathbf{k} - \omega z_i (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j})] \end{aligned}$$

$$\text{令:} \quad \boldsymbol{\rho}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} \quad \rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$\mathbf{L} = \sum_i \Delta m_i [\rho_i^2 \omega \mathbf{k} - \omega z_i \boldsymbol{\rho}_i] = \left(\sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \right) \omega \mathbf{k} - \omega \left(\sum_i \Delta m_i z_i \boldsymbol{\rho}_i \right)$$

故 z 轴若是刚体的对称轴，上式的第二项为零，则刚体的角动量就与其角速度的方向相同。即：

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$





8.3.2 转动定律

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$

当然，若 z 轴不是刚体的对称轴，该式也可能成立，此时，我们称轴为刚体的**自由轴**。

可将 z 方向的角动量定理写成标量形式：

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$L_z = I_z \omega$$

$$I_z = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2$$

I_z 称为刚体绕 z 轴的**转动惯量**，它是一个常量。于是

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \beta$$





8.3.2 转动定律

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \beta$$

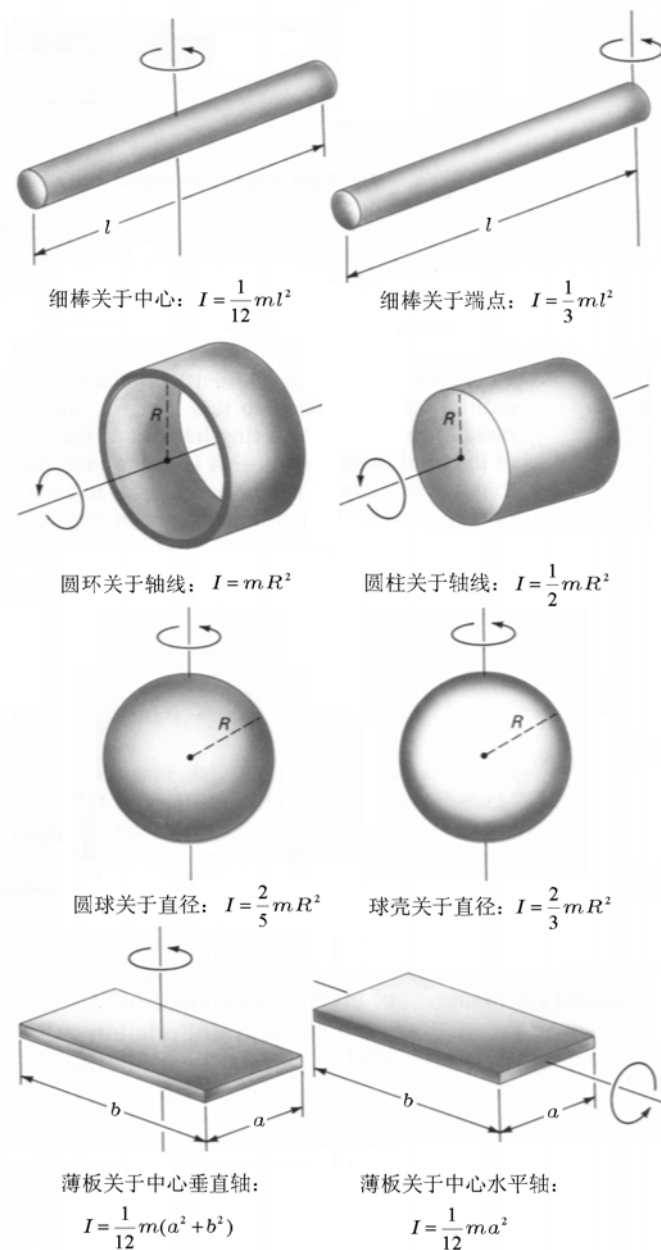
此式是刚体作定轴转动时沿转轴（即 z 轴）方向的动力学方程，常称为**转动定律**。它就是角动量定理沿固定轴方向的分量式。它表明，对作定轴转动的刚体，外力矩沿固定轴的分量的代数和等于对该轴的转动惯量与角加速度的乘积。转动定律与牛顿定律的形式 $F = ma$ 很相似，力矩与力相当，角加速度与加速度相当，转动惯量与质量相当。



8.3.3 转动惯量

1. 几种典型形状刚体的转动惯量

具有规则几何形状的刚体绕对称轴的转动惯量不难计算，几种典型形状刚体的转动惯量如图所示，图中 m 为刚体的总质量。



8.3.3 转动惯量

2. 回转半径

任何转动惯量都可以写成总质量与一个长度平方的乘积，

即：

$$I = mk^2$$

式中 k 称为**回转半径**。例如，圆球回转半径

$$k = \sqrt{\frac{2}{5}}R$$

圆柱的回转半径

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}}R$$

质量相同的刚体，转动惯量越大，回转半径越大。



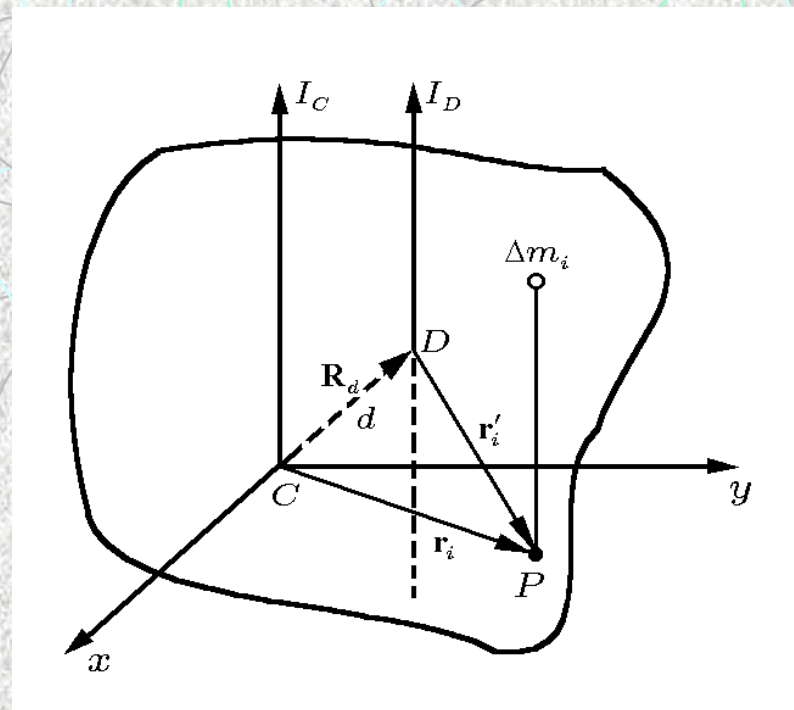
8.3.3 转动惯量

3. 转动惯量的平行轴定理和正交轴定理

(1) 平行轴定理

如图，设刚体绕通过质心转轴的转动惯量为 I_C ，将轴朝任何方向平行移动一个距离 d ，则绕此轴的转动惯量 I_D 为：

$$I_D = I_C + md^2$$



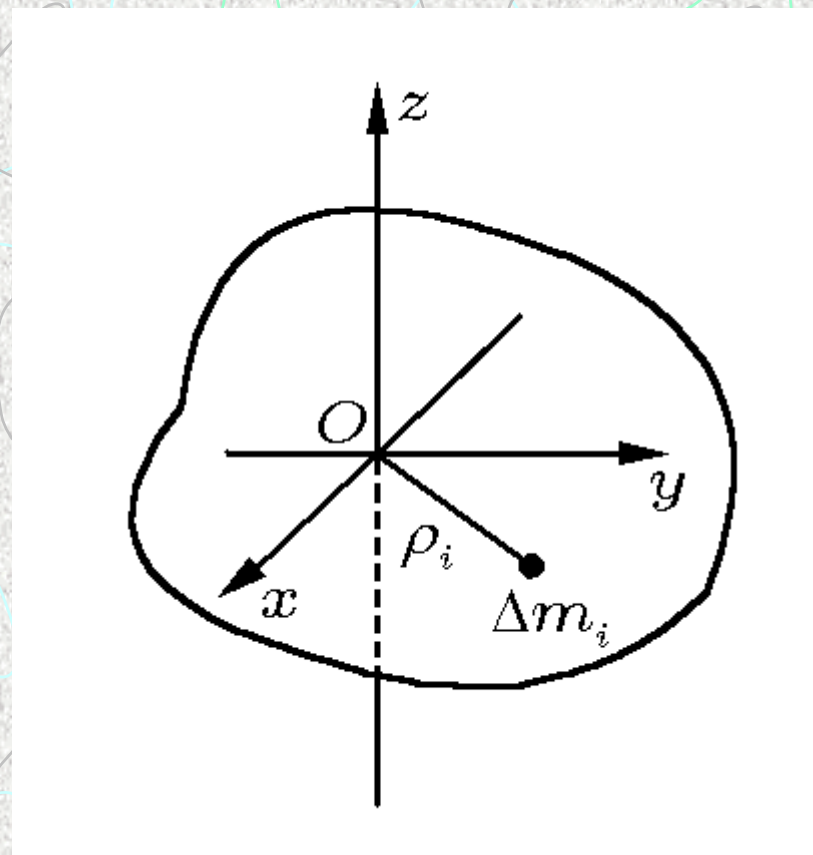
8.3.3 转动惯量

3. 转动惯量的平行轴定理和正交轴定理

(2) 正交轴定理

如图，如果已知一块薄板绕位于板上两相互垂直的轴（设为 x 轴和 y 轴）的转动惯量为 I_x 和 I_y ，则薄板绕 z 轴的转动惯量为：

$$I_z = I_x + I_y$$





8.3.4 定轴转动刚体的角动量守恒

绕对称轴（或自由轴）轴转动的刚体的角动量，为：

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$$

当刚体不受外力矩作用时，角动量不变，即 $\boldsymbol{\omega}$ 不变，此即角动量守恒。其实，该式也适用于可变的物体，只要在变化过程中不破坏对称性，又保持所有质点的相同，这样，角动量守恒的表式就成为：

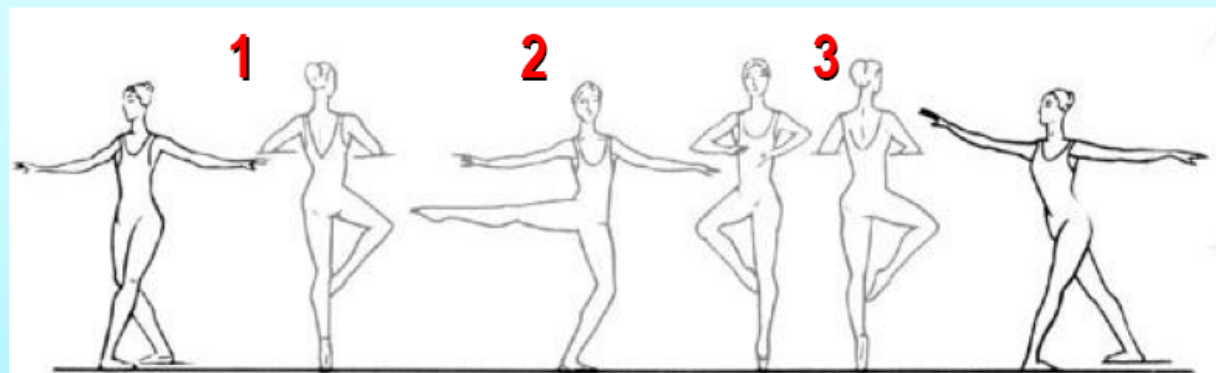
当 $\mathbf{M} = 0$ 时， $I_z \boldsymbol{\omega} = \text{常量}$





Natalia Kuznetsova

Fouette



当 $M = 0$ 时,
 $I_z \omega = \text{常量}$



8.3.4 定轴转动刚体的角动量守恒

一般而言，当转轴不是对称轴（这或者是由于物体无对称性，或者是虽有对称性，但转轴不是对称轴）或自由轴时，由于角动量不在转轴方向，即使刚体绕固定轴作匀角速转动，刚体的角动量亦不守恒，因为角动量时刻在变化（至少方向在时刻变化），刚体也必受外力矩作用。若外力矩在转轴（ z 轴）上的分量为零时，则刚体角动量在该轴上的分量保持不变。

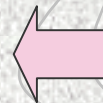




§ 8.4 刚体运动的基本方程 与刚体的平衡

8.4.1 刚体运动的基本方程

8.4.2 刚体的平衡





§ 8.4 刚体运动的基本方程 与刚体的平衡

8.4.1 刚体运动的基本方程

刚体是一种特殊的质点组，因而关于质点组运动的定理也完全适用于刚体。我们已学过的两个定理是质心运动定理和角动量定理：

$$m_C \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{M}_i$$

我们知道，刚体的自由度最多为6，这里已有6个独立的分量方程，处理刚体问题已经够了。





8.4.1 刚体运动的基本方程

几点说明:

1. 外力矩是指对于空间中任一固定点（惯性系）的力矩，对空间任意点都正确，当然，相应的角动量也是关于空间中的相同点。若考虑的是非惯性系，则必须计入惯性力和惯性力的力矩，我们也知道，对于质心系，惯性力的力矩为零。
2. 若总外力和总外力矩都为零，即 $\Sigma \mathbf{F}_i = 0$ ， $\Sigma \mathbf{M}_i = 0$ ，这样的力系称为零力系，此时刚体的动量、角动量都守恒，则刚体的运动为：质心做匀速直线运动，并绕通过质心的自由轴做匀速转动。若转动轴为非自由轴，刚体如何运动我们将在8.6节讨论。





8.4.2 刚体的平衡

刚体静力学研究刚体在平衡（即相对于某个惯性参考系静止或作匀速直线运动）情况下的受力分布。刚体静力学在工程、建筑等部门中有广泛的应用，是材料力学、结构力学等学科的基础。

处于平衡（通常指静止）状态的刚体的动量和角动量均不随时间改变（通常等于零）。因此，根据动量定理和角动量定理，刚体平衡的必要条件为：

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \sum_i \mathbf{M}_i = 0$$

该式表明外力的矢量和为零，且外力对空间某一定点（例如 A 点）的力矩的矢量和为零。其实，当这两个条件满足时，外力对任何定点的力矩的矢量和也为零。其证明比较简单，留给读者自己证明。





§ 8.5 刚体的平面平行运动

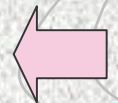
8.5.1 运动方程

8.5.2 纯滚动的运动学判据

8.5.3 瞬时转动中心

8.5.4 功能原理

8.5.5 解题注意事项





8.5.1 运动方程

1. 求质心的运动，利用质心运动定理

$$m_C \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \mathbf{F}$$

即可求得质心的运动，这里 $\mathbf{F}$ 表示所有外力的矢量和， m_C 是刚体的总质量。由于质心的运动（设为 x - y 平面）是二维的，故方程只有两个分量方程。





8.5.1 运动方程

2. 在质心坐标系中讨论刚体绕通过质心并垂直于空间固定平面（ $x-y$ 平面）的 z 轴的转动。根据质心系中角动量定理的分量形式，取过质心的转轴为 z 轴，有

$$M_C = I_C \beta$$

这里， M_C 是外力对质心的力矩在 z 轴方向分量的代数和， β 是绕轴转动的角加速度。在过质心的转轴是对称轴（或惯量主轴）的情况下，这也就是合力对质心的力矩。

上式可看成质心系中的定轴转动定律，尽管质心系为非惯性系，但惯性力对质心并无力矩。





8.5.2 纯滚动的运动学判据

接触面之间有相对滑动的滚动称为有滑动滚动，接触面之间无相对滑动的滚动称为无滑动滚动，或称纯滚动。

对于纯滚动，除满足上两方程外，还应满足约束条件

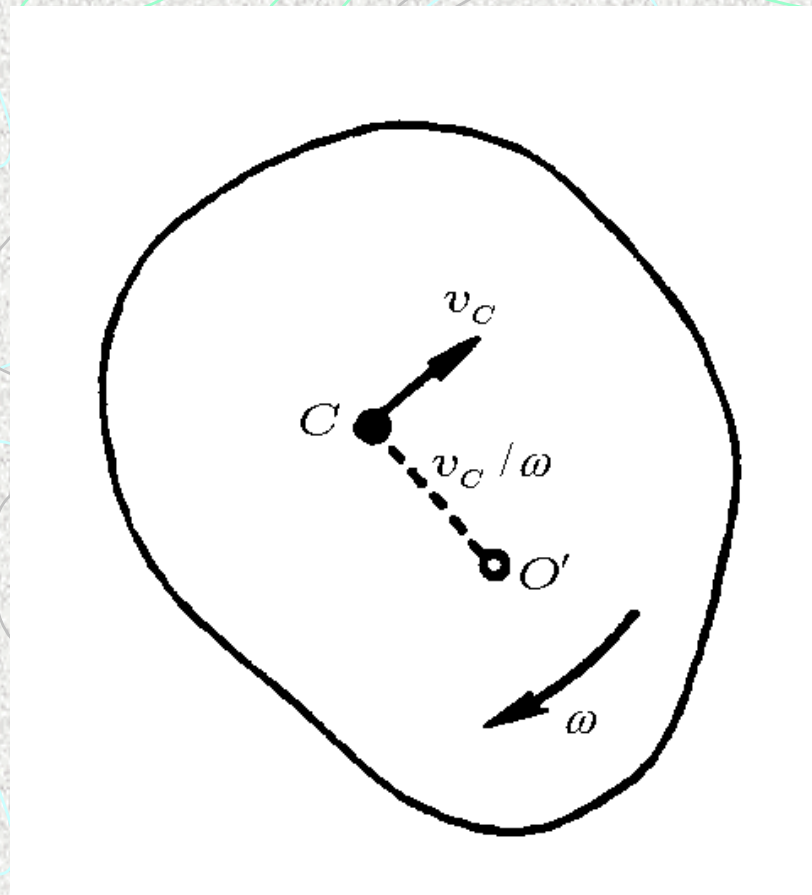
$$v_C = R\omega, \quad a_C = R\beta$$

上式为纯滚动的运动学判据，其中 v_C, a_C 是圆心（通常即质心）的速度和切向加速度的大小， ω 和 β 为滚动物体的角速度和角加速度（即物体在质心参照系中的角速度和角加速度）， R 是滚动物体的圆半径。上式不论对于平面上的滚动或曲面上的滚动都成立。



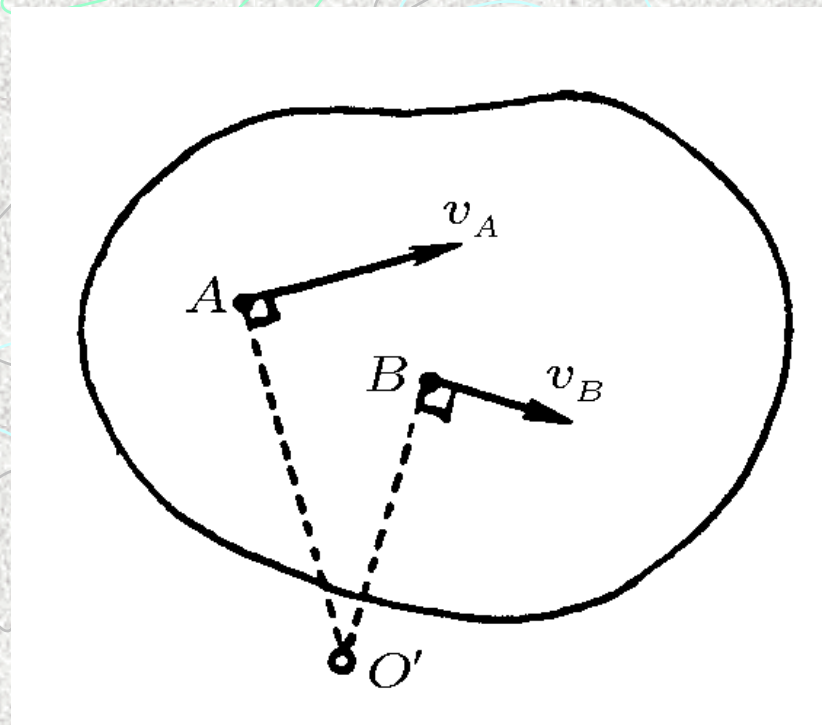
8.5.3 瞬时转动中心

在任何瞬时，作平行平面运动的刚体（或它的延伸体）上总有一点 O' ，其速度 $v_{O'} = 0$ ，此时，整个刚体可视为绕此点转动（实际上是绕过此点垂直于运动平面的转轴转动）。例如在平面上作纯滚动的圆柱体或球与平面的接触点就是它的瞬心。如图所示。



8.5.3 瞬时转动中心

实际上，在任一瞬时，截面上任一点的速度方向均与该点相对瞬心的位置矢量垂直，利用这一性质，已知截面上任两点的速度方向也可求得瞬心的位置，只要过这两点引两条与速度方向垂直的直线，两直线的交点即为瞬心的位置，如图所示。



对于作平面平行运动的刚体，在相对瞬时转轴应用转动定律时，由于瞬心的加速度并不为零，也必须考虑惯性力的力矩。但在一般情况下，惯性力对瞬时转轴的力矩并不为零，这一点与取质心为基点的情况不同。





8.5.4 功能原理

对于刚体的平行平面运动，刚体的动能为：

$$E_{kC} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

右端第一项称为刚体的**平动能**，第二项称为刚体的**转动能**。





8.5.4 功能原理

由质心运动定理:

$$m_C \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \mathbf{F}$$

得:

$$\frac{1}{2} m_C v_C^2(t) - \frac{1}{2} m_C v_C^2(t_0) = \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

由绕质心转动的角动量定理:

$$M_C = I_C \beta$$

得:

$$\frac{1}{2} I_C \omega^2(t) - \frac{1}{2} I_C \omega^2(t_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_C d\varphi$$

其中:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

即外力所作的功:

$$A_{\text{外}} = \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_C d\varphi$$

故刚体的功能原理为:

$$E_k(t) - E_k(t_0) = A_{\text{外}} = \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_C d\varphi$$





8.5.4 功能原理

故刚体的功能原理为：

$$E_k(t) - E_k(t_0) = A_{\text{外}} = \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_C d\varphi$$

即刚体动能的改变等于外力对于质心所作的功加上关于质心的外力矩作的功。

注意：若不取质心作基点，就不能如此分解，可见质心作基点的重要性。





8.5.5 解题注意事项

1. 纯滚动过程中静摩擦力做功为零

我们知道，对于质点的运动，静摩擦力做功为零。下面我们证明，对于刚体的纯滚动，静摩擦力做功也为零。如图，静摩擦力做功可以写成两项，为

$$A = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int M d\varphi = f \Delta x + M \Delta \varphi$$

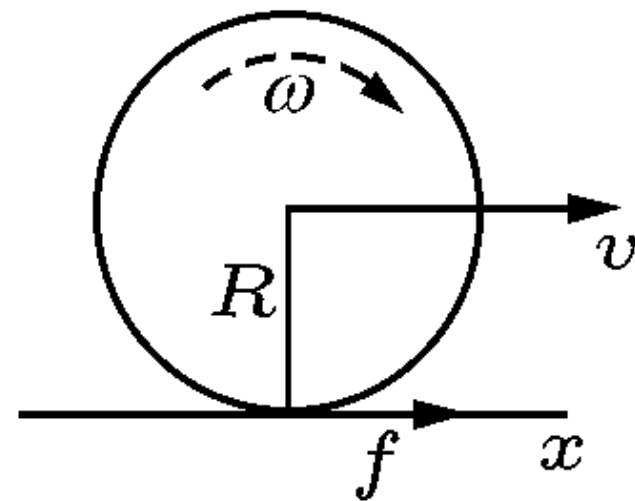
利用纯滚动的运动学判据式可得

$$\Delta x = -r_0 \Delta \varphi$$

又

$$M = fr_0$$

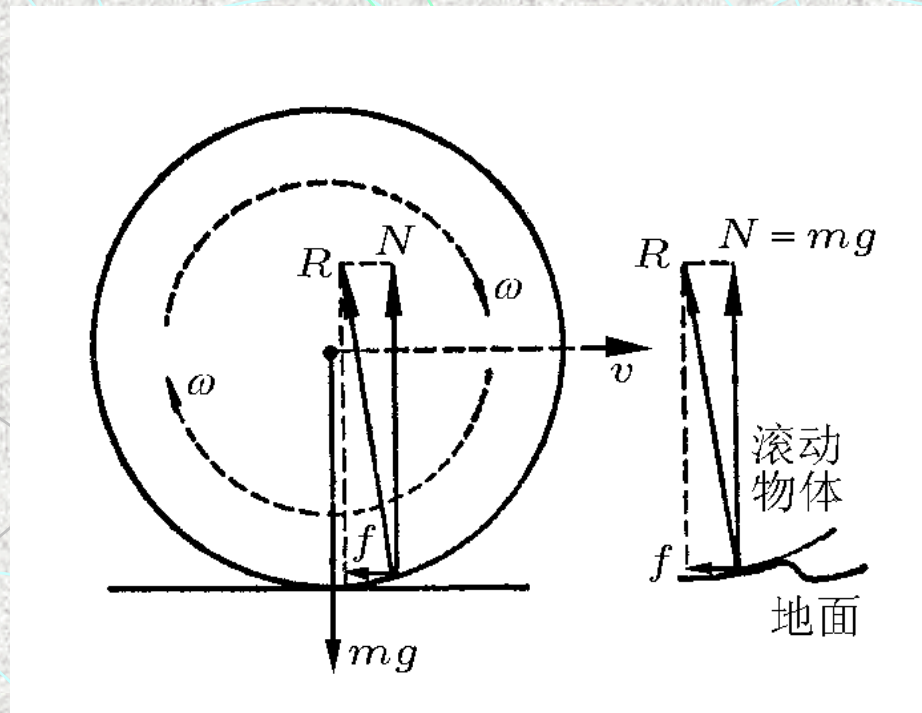
$$A = -fr_0 \Delta \varphi + fr_0 \Delta \varphi = 0$$



8.5.5 解题注意事项

2. 滚动摩擦力矩

滚动摩擦的本原，在力学中不能进行深入的讨论。简单他说，物体滚动时，物体与地面都将变形，因而地面施于物体的力 $\mathbf{R}$ 并非竖直向上。 $\mathbf{R}$ 的竖直分力即地面支持力 $\mathbf{N}$ ，水平分量即摩擦力 $\mathbf{f}$ 。



滚动摩擦一般远远小于滑动摩擦，使用轮轴、使用滚珠轴承都是为了以滚动摩擦代替滑动摩擦。



8.5.5 解题注意事项

3. 滚动摩擦和滑动摩擦

由于滚动摩擦力矩的存在，它不改变质心的运动速度，却降低物体滚动角速度，于是原来的纯滚动将会出现相对滑动的趋势。这时会出现静摩擦力，当静摩擦力达到最大静摩擦力时，滑动将发生，这时又会以滑动摩擦取代静摩擦。

在处理理想刚体（即无形变，可以不考虑滚动摩擦）的纯滚动问题时，滚动物与其他物体的接触点处相对速度为零，在此点若有摩擦力存在，是为静摩擦力。判断该静摩擦力的方向需要十分小心。这里有一个一般可用的原则：设想此物体与接触点脱离，使摩擦不复存在，此时触点切向加速度的反方向，即为静摩擦力的方向。

即：摩擦力与物体在接触点的运动趋势方向相反。



例：小圆盘无质量，大圆盘质量 m （均匀），受力 F ，如图。问该刚体如何运动。

解：设A点与地面脱离

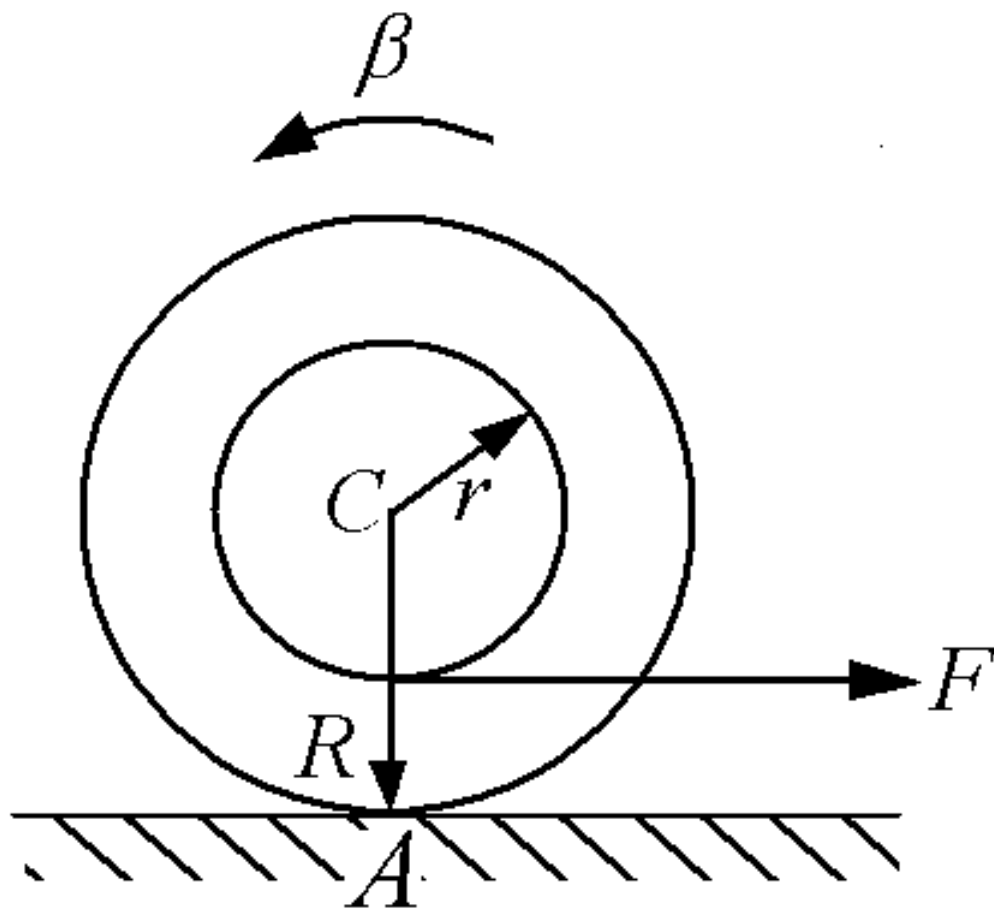
$$a_c = F / m$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\beta = \frac{Fr}{I} = \frac{Fr}{mR^2/2} = \frac{F}{m} \frac{r}{2R^2}$$

$$a_A = a_C + \beta R = \frac{F}{m} \left(1 + \frac{r}{2R}\right)$$

向右



让A点与地面接触

$$f \leq \mu mg \quad \text{向左}$$

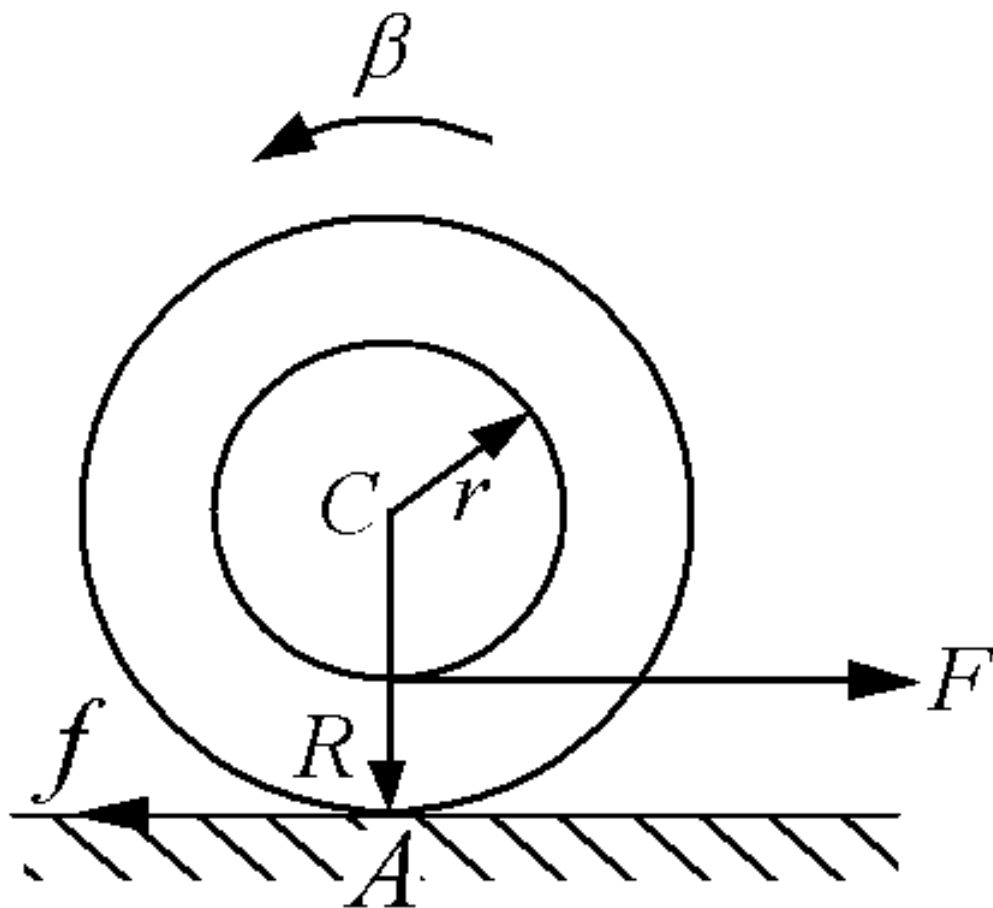
$$a_c = (F - f) / m$$

$$Fr - fR = I\beta$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\beta = \frac{Fr - fR}{mR^2 / 2} = \frac{2(Fr - fR)}{mR^2}$$

$$a_A = a_c + \beta R = \frac{1}{mR} (FR + 2Fr - 3fR)$$



$$a_A = \frac{1}{mR} (FR + 2Fr - 3fR)$$

1. 设大圆盘作纯滚动

$$a_A = \frac{1}{mR} (FR + 2Fr - 3fR) = 0$$

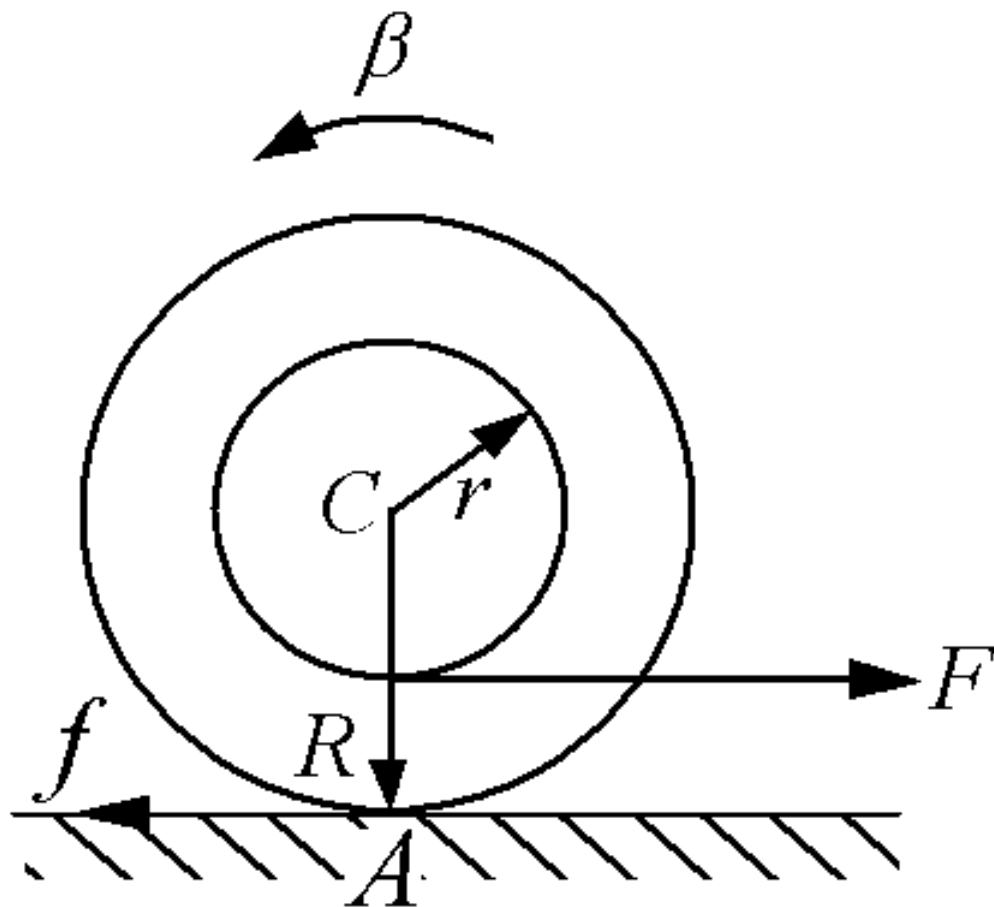
$$f = \frac{F}{3} \left(1 + \frac{2r}{R} \right) \leq \mu mg$$

于是:

$$F \leq \frac{3\mu mgR}{R + 2r}$$

$$a_c = \frac{F - f}{m} = \frac{F}{m} \left[1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2r}{R} \right) \right] = \frac{2F}{3mR} (R - r)$$

$$\beta = \frac{2(Fr - fR)}{mR^2} = \frac{2}{mR^2} \left[Fr - \frac{F}{3} (R + 2r) \right] = \frac{2F}{mR^2} (r - R)$$



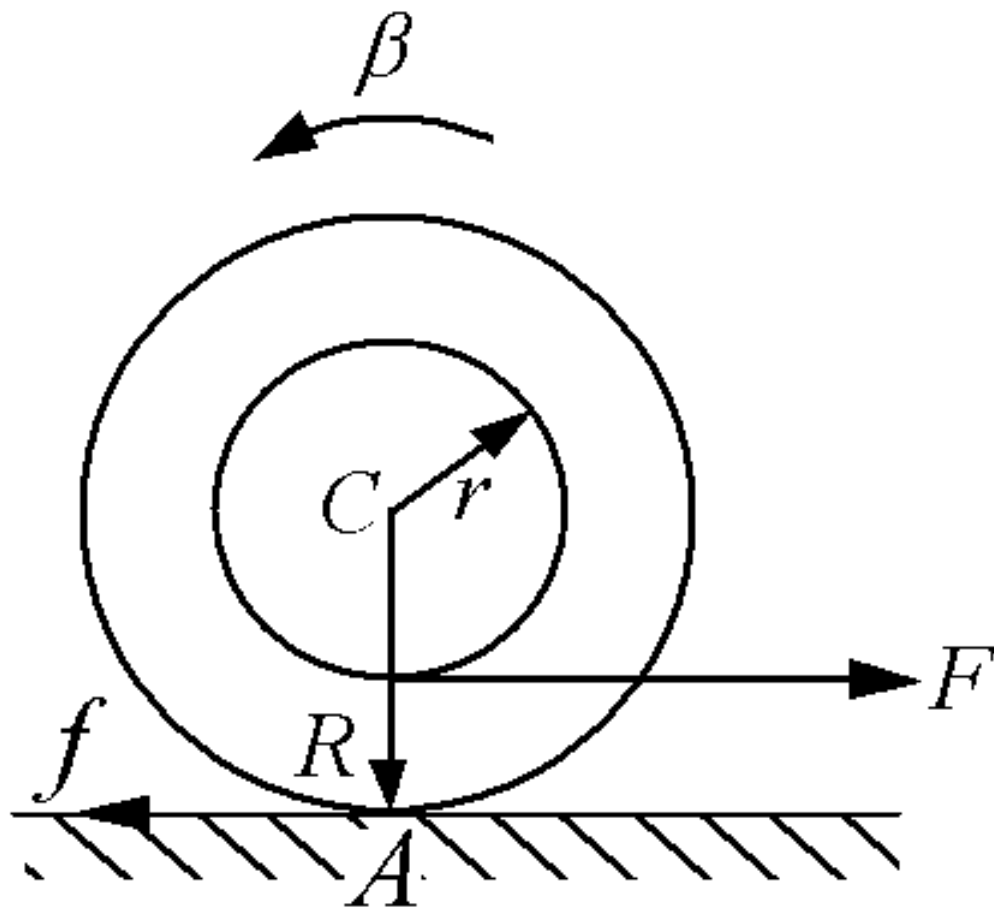
$$a_A = \frac{1}{mR} (FR + 2Fr - 3fR)$$

2. 大圆盘连滚带滑

此时: $F > \frac{3\mu mgR}{R + 2r}$

$$a_c = \frac{F - f}{m} = \frac{F}{m} - \mu g > 0$$

$$\beta = \frac{2(Fr - fR)}{mR^2} = \frac{2}{mR^2} (Fr - \mu mgR)$$

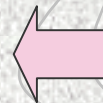




§ 8.6 刚体的定点运动

刚体的比较复杂的运动是定点运动。

刚体的定点运动有些性质初看起来是很“奇怪”的。本节将限于进行定性的讨论，揭示这些“奇怪”性质的物理实质，而不研究刚体定点运动的严格理论。

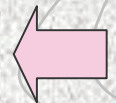




§ 8.6 刚体的定点运动

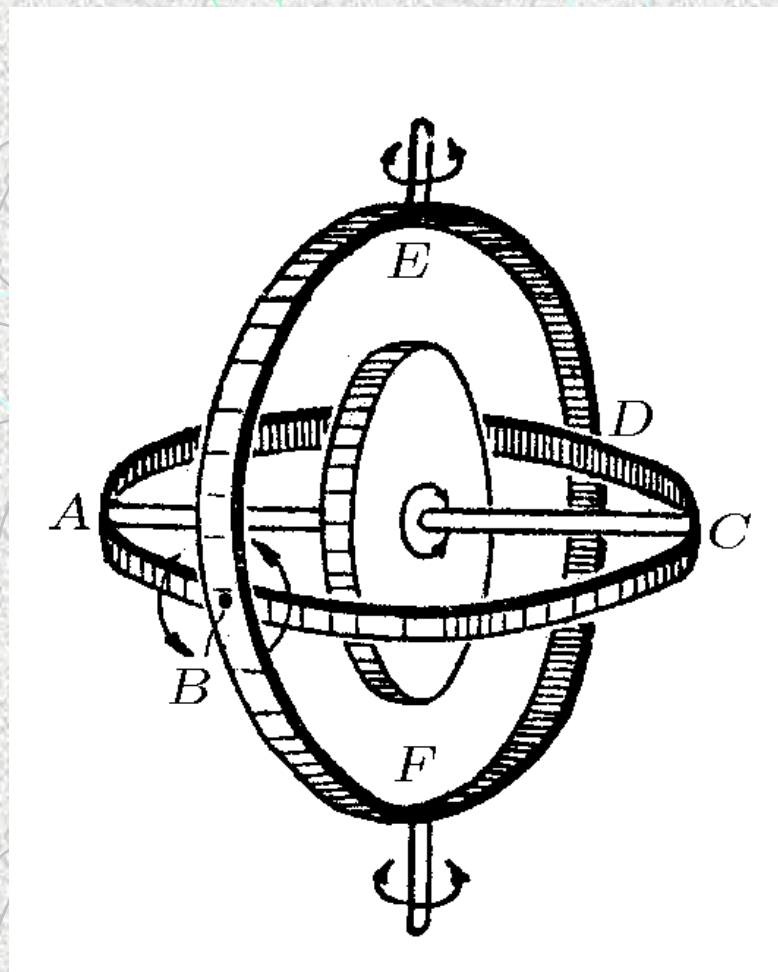
8.6.1 没有外加力矩的定点运动

8.6.2 陀螺的运动



8.6.1 没有外力矩的定点运动

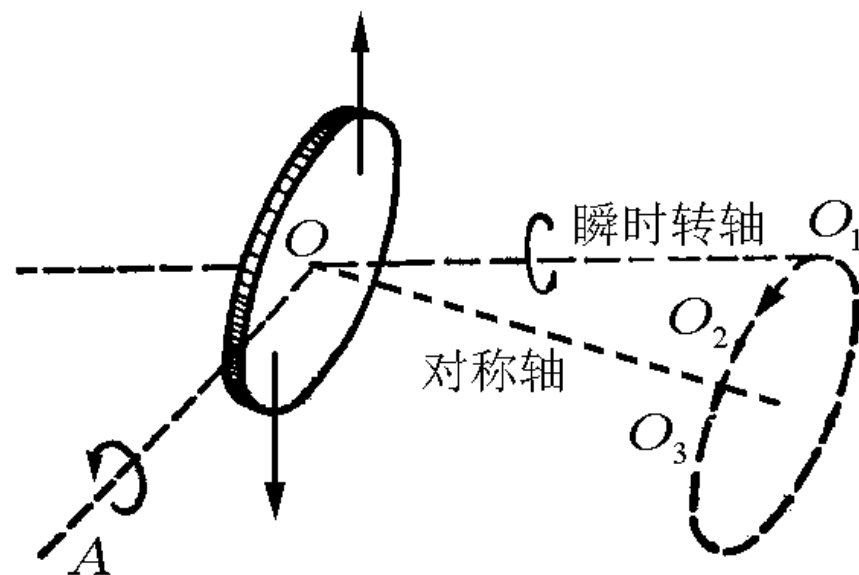
将刚体装在所谓“常平架”上，如图。常平架对刚体转轴作何取向并不施加任何限制，所以在轴承上只有由于刚体的重量而引起的静压力。由于对称性，这种静压力对于质心的力矩为零。因此，刚体在常平架上的运动是一种没有外力矩的定点运动，定点指的是质心。



8.6.1 没有外加力矩的定点运动

为便于说明问题起见，不妨暂且这样设想：不仅 O 是定点，在 O_1 点还有一个轴承，刚体绕轴 OO_1 作定轴转动，如图所示。

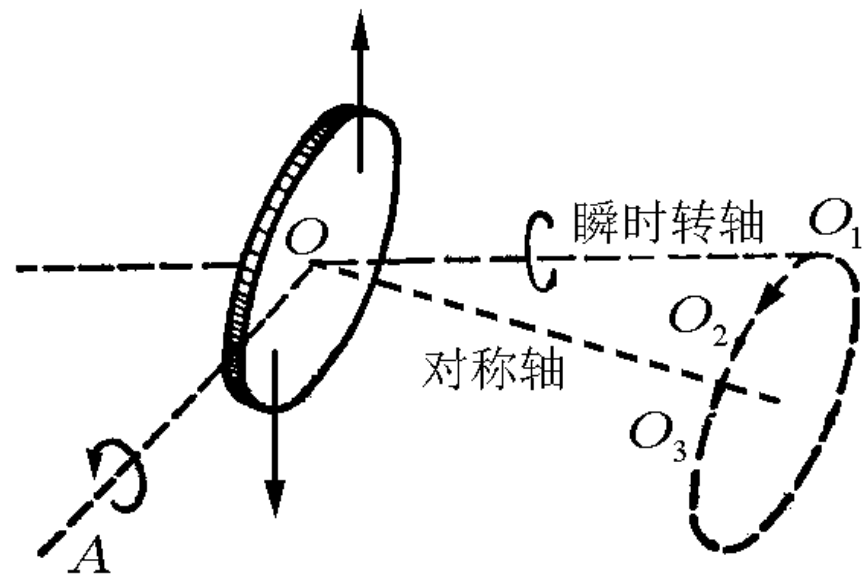
如刚体绕 OO_1 的转动不是动平衡的，换句话说， OO_1 不是刚体的自由轴，则惯性离心力系的力矩有驱使 OO_1 轴运动的趋势，惯性离心力系是力偶，这力偶驱使刚体绕 OA 轴转动。这样，刚体既绕 OO_1 轴转动，又绕 OA 轴转动，因而其合成运动是绕 OO_2 轴转动。



8.6.1 没有外力矩的定点运动

这之后，当然依然没有达到动平衡，惯性离心力的力偶仍然存在，仍然要驱使轴继续运动。但是要注意，刚体已绕其轴转了一个小角度，惯性离心力的指向也随着刚体转了一个小角度，或者说，惯性离心力的力偶矩已随着刚体转了一个小角度。按这样的方式推论下去可知，转动轴描出锥面。

故得结论：在没有外力矩作用的情况下，具有一个定点的刚体除非是绕自由轴转动，否则不会作定轴转动，其转动轴在空间描出锥面。





8.6.1 没有外力矩的定点运动

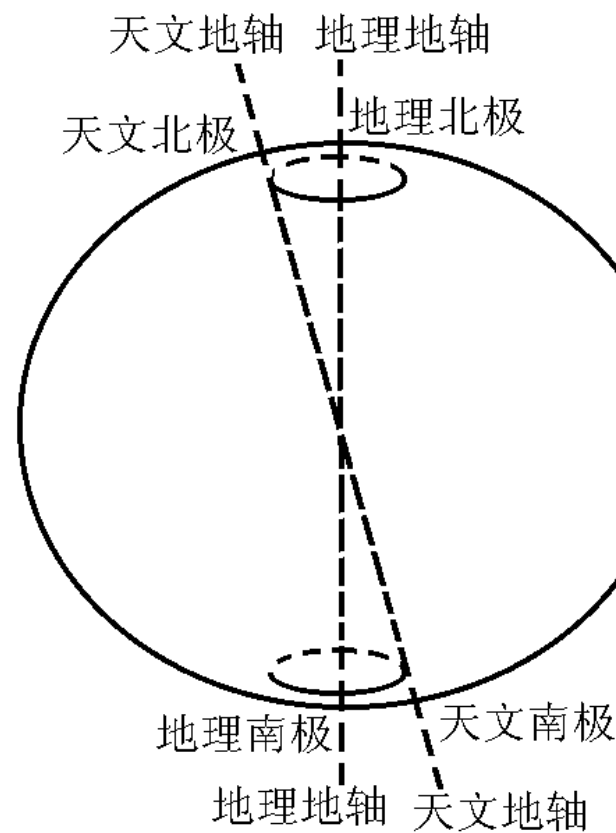
没有外力矩的定点运动在技术上有很重要的应用。在急速爬高、俯冲、侧滚的飞机中，由于惯性力的作用，人们将发生错觉，例如人们所认为的竖直方向很可能并不是真正的竖直方向。因此在飞机上有一些人造地平之类的定向指示仪表，这些仪表的主要部分都是装在常平架上绕其对称轴高速转动的圆盘。因为圆盘达到了动平衡，不论飞机的运动如何复杂，圆盘的轴在空间中保持一定指向，不受飞机运动的影响，驾驶员从圆盘的轴相对于飞机的角度就可以正确地知道飞机在空中的指向。由于圆盘的转速很高，仪表的指示是很稳定可靠的。保持鱼雷作定向运动的机构也是基于同一原理。





8.6.1 没有外力矩的定点运动

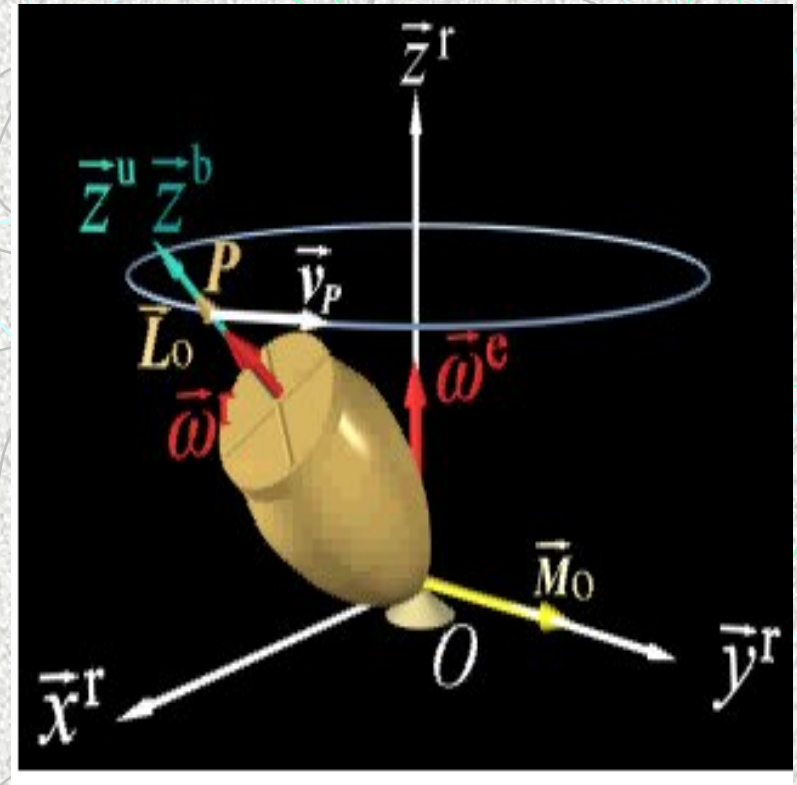
没有外力矩的定点运动也存在于自然界中。地球是一个扁球体，为显著起见，图中作了过分的夸大。地球的自转并不绕对称轴进行，自转轴与对称轴差一个角度。因此，应当区分两种地轴：地球的对称轴称为地理地轴，地球的自转轴称为天文地轴。根据上面的讨论可知，天文地轴描出圆锥面。天文南、北极绕地理南、北极运动。这种现象称为极移。实际观测结果，极移周期为14个月。



8.6.2 陀螺的运动（有外力矩的定点运动）

绕对称轴高速旋转的刚体称为陀螺，或称回转仪。

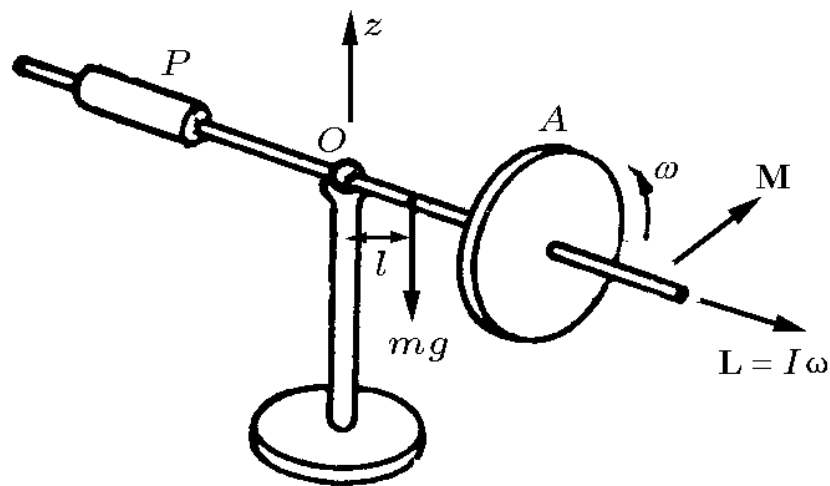
陀螺在运动过程中通常有一点保持固定，所以属刚体的定点运动。利用角动量和角速度的矢量性质，不难解释陀螺的运动，陀螺有许多奇妙的性质，并有着广泛的应用。



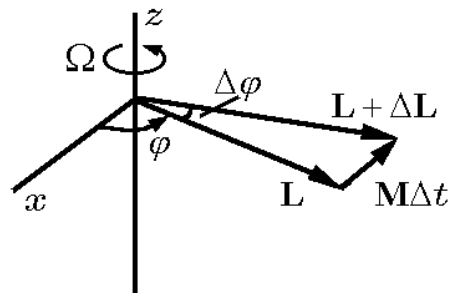
陀螺



回转仪的进动和章动



(a)



(b)

杠杆陀螺

回转仪的进动和章动



8.6.2 陀螺的运动

1. 杠杆陀螺的进动

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{M} \Delta t$$

这种现象称为进动。进动角速度可由角动量定理求得：

$$\Delta \mathbf{L} = L \Delta \varphi = \mathbf{M} \Delta t$$

而

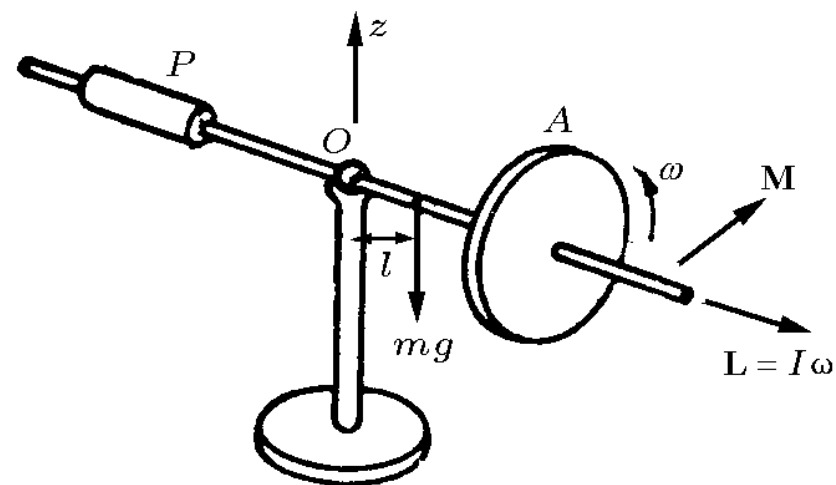
$$\Omega = \Delta \varphi / \Delta t$$

因此

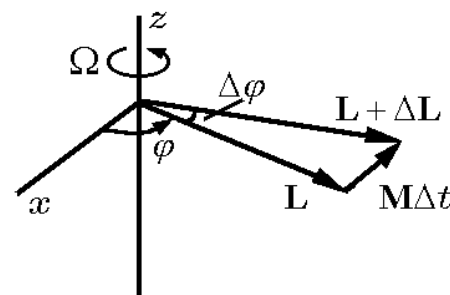
$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{mgl}{I\omega}$$

为表示出进动角速度的方向，
可将上式写成矢量形式

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}$$



(a)

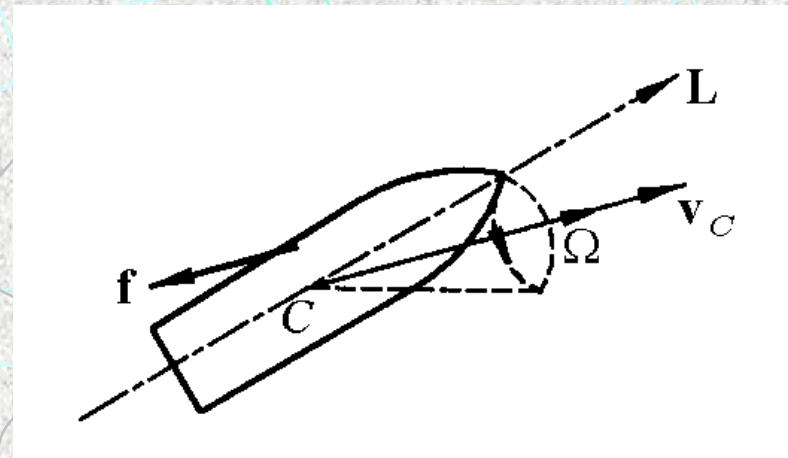


(b)



8.6.2 陀螺的运动

技术上利用进动的一个实例是炮弹在空中的飞行，如图。炮弹在飞行时，要受到空气阻力的作用。阻力 f 的方向总与炮弹质心的速度方向相反，但其合力不一定通过质心。



阻力对质心的力矩就会使炮弹在空中翻转。这样，当炮弹射中目标时，就有可能是弹尾先触目标而不引爆，从而丧失威力。为了避免这种事故，就在炮筒内壁上刻出螺旋线。这种螺旋线叫**来复线**。当炮弹由于发射药的爆炸被强力推出炮筒时，还同时绕自己的对称轴高速旋转。由于这种旋转，它在飞行中受到的空气阻力的力矩将不能使它翻转，而只是使它绕着质心前进的方向进动。这样，它的轴线将会始终只与前进的方向有不大的偏离，而弹头就总是大致指向前方了。





8.6.2 陀螺的运动

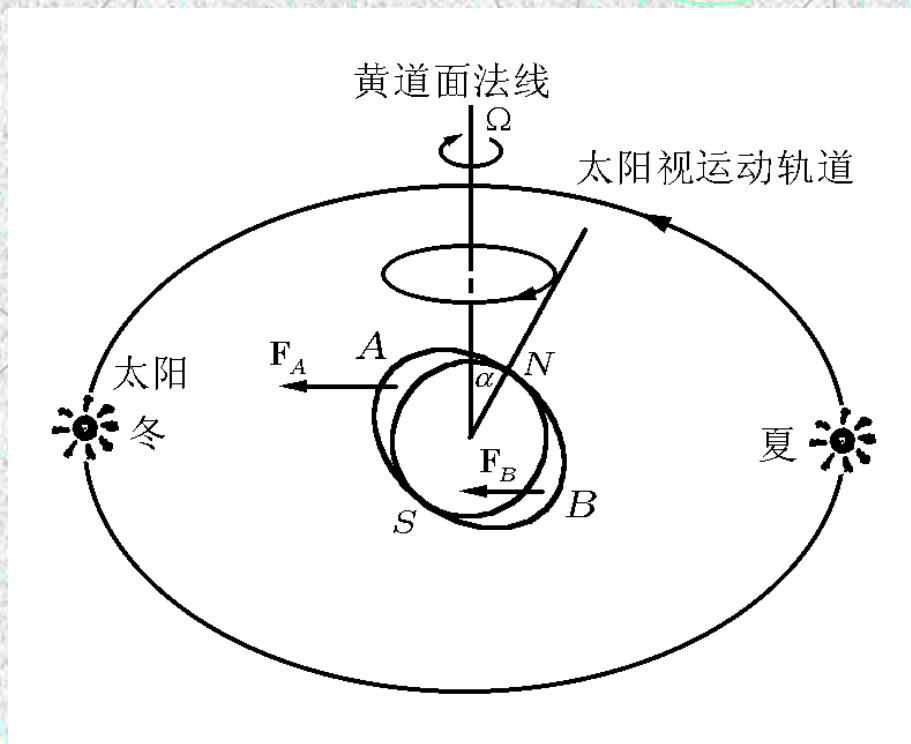
应该指出，在杠杆陀螺中，如果飞轮的自旋速度不是太大，则它的轴线在进动时，还会上上下下周期性地摆动。这种摆动叫**章动**。



8.6.2 陀螺的运动

2. 地球在太阳（月球）引力矩作用下的进动

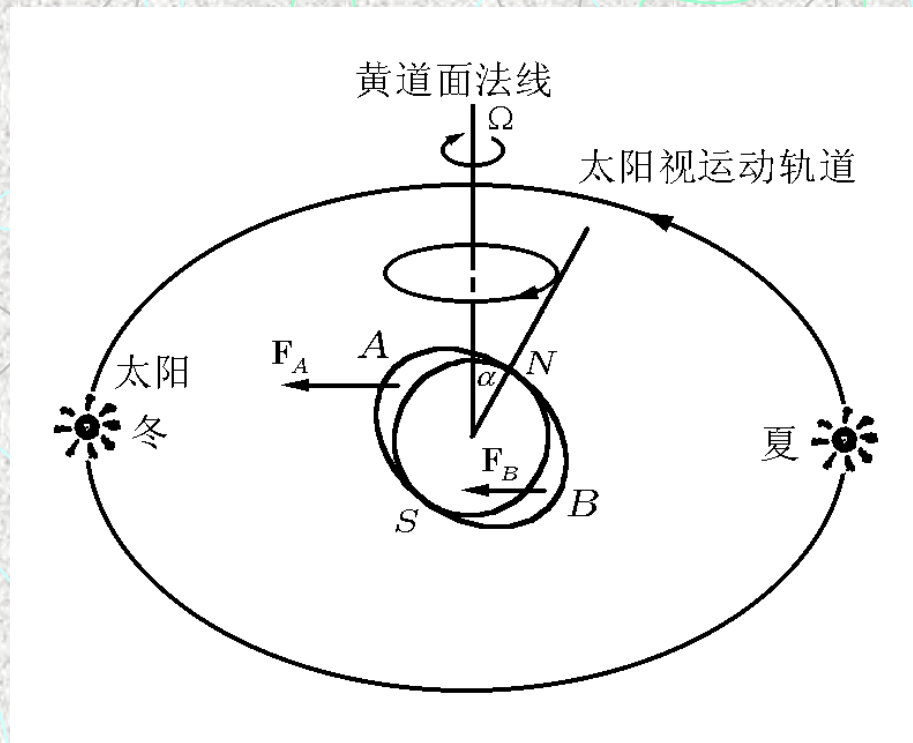
地球可看作一个自转着的刚体，相当一个陀螺，它的角动量沿自转轴指向北。由于地球并非严格的球体，而呈扁平球形，赤道附近向外鼓出，图中对此作了夸张，而且，地球自转轴与黄道（太阳绕地球的视运行轨道）面法线并不一致，而夹成的角，太阳对地球鼓出部分上各质元的引力是不同的。



8.6.2 陀螺的运动

2. 地球在太阳（月球）引力矩作用下的进动

力矩在一年中的平均值由纸面向外。在此力矩作用下，地球将绕黄道面法线进动，进动角速度的方向与太阳绕地球转动的方向相反。计算表明，这种进动的周期约为**26000**年。这一进动使春分点和秋分点（天球赤道与黄道的两交点）每年逆着太阳运转方向移动一定角度，这就是回归年（太阳相继两次通过春分点所经历的时间）比恒星年略短的缘故，形成**岁差**。



谢谢大家！

