中国科学院—中国科技大学
1990 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　量子力学（理论型）

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、在 $t=0$，氢原子波函数为

$$\psi(\vec{r},0)=\frac{1}{\sqrt{10}}\left[2\psi_{100}+\psi_{210}+\sqrt{2}\psi_{211}+\sqrt{3}\psi_{21-1}\right]$$

其中右方函数下标表示量子数 nlm。忽略自旋和辐射跃迁。

(1) 此系统的平均能量是多少？

(2) 这系统在任意时刻处于角动量投影 $L_z=0$ 的几率是多少？

二、利用坐标与动量算符之间的对易投影关系，证明

$$\sum_n^{\infty}(E_n-E_0)\left|\langle n|x|0\rangle\right|^2=\text{常数}$$

这里 E_n 是哈密顿量 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(x)$ 的本征能量，相应的本征态为 $|n\rangle$。求出该常数。

三、设一质量为 μ 的粒子在球对称势 $V(r)=kr\quad(k>0)$ 中运动。利用测不准关系估算其基态的能量。

四、电子偶素（e^+e^- 束缚态）类似于氢原子，只是用一个正电子代替质子作为核，在非相对论极限下，其能量和波函数与氢原子类似。今设在电子偶素的基态里，存在一种接触型自旋交换作用 $\hat{H}'=-\frac{8\pi}{3}\hat{M}_e\cdot\hat{M}_p$ 其中 $\hat{M}_e$ 和 $\hat{M}_p$ 是电子和正电子的自旋磁矩 $(\hat{M}=\frac{q}{mc}\hat{S},\quad q=\pm e)$。利用一级微扰论，计算此基态中自旋单态与三重态之间的能量差，决定哪一个能量更低。对普通的氢原子，基态波函数：

$$\psi_{100}=\sqrt{\frac{1}{\pi a^3}}e^{-r/a},\quad a=\frac{\hbar^2}{me^2},\quad \frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137}$$

五、一质量为 μ 的粒子被势场 $V(r)=V_0e^{-r/a}\quad(V_0>a>0)$ 所散射，用一级玻恩近似计算微分散射截面。

中国科学院－中国科技大学
1990 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　量子力学（实验型）

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、

(1) 光电效应实验指出：当光照射到金属上，

a) 只有当光频率大于一定值 ν_0 时，才有光电子发射出；

b) 光电子的能量只与光的频率有关，而与光的强度无关；

c) 只要光的频率大于 ν_0，光子立即产生。

试述：

a) 经典理论为何不能解释上述现象，或者说这些实验现象与经典理论矛盾何在？

b) 用爱因斯坦假说正确解释上述实验结果。

(2) 电子是微观粒子，为什么在阴极射线实验中，电子运动轨迹可用牛顿定律描述？

(3) ψ_1 和 ψ_2 为体系本征态，任一态为 $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$。如果 $\psi_1 = 0$，试问：

a) 如 ψ_1 和 ψ_2 是经典波，在 ψ 态中 ψ_1 和 ψ_2 态的几率如何表示？

b) 如 ψ_1 和 ψ_2 是几率波，在 ψ 态中 ψ_1 和 ψ_2 态的几率如何表示？

(4) 如何知道电子存在自旋？

二、一维谐振子的哈密顿量 $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$，基态波函数

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}e^{-\alpha^2 x^2/2},\quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}。$$

设振子处于基态。（1997 年（实验型Ⅰ）第五题）

(1) 求 $<x>$ 和 $<p>$；

(2) 写出本征能量 E，并说明它反映微观粒子什么特征？

(3) 一维谐振子的维里定理是 $<T>=<V>$，试利用这个定理证明：$\Delta x \cdot \Delta p = \dfrac{\hbar}{2}$，其中

$$\Delta x = \sqrt{<x^2> - <x>^2},\quad \Delta p = \sqrt{<p^2> - <p>^2}。$$

三、精确到微扰论的一级近似，试计算由于不把原子核当作点电荷，而作为是半径为 R，均匀带电荷 Ze 的球体所引起的类氢原子基态能量的修正。已知球内静电势 $\varphi(r) = \dfrac{Ze}{R}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{r^2}{2R^2}\right)$，球外电势为 $\dfrac{Ze}{r}$，类氢原子基态波函数 $\psi_{1s} = \sqrt{\dfrac{Z^3}{\pi a^3}}e^{-Zr/a}$，$a$ 为玻尔半径。

四、

(1) 用 j,l,s 写出 $\hat{L}\cdot\hat{S}$，$\hat{J}\cdot\hat{S}$ 的表达式。

(2) 对于 $l=2, s=1/2$，计算 $\hat{L}\cdot\hat{S}$ 的可能值。

(3) 确定（2）中 $\hat{L}$ 和 $\hat{S}$ 间夹角的可能值，并画出 $\hat{L}$，$\hat{S}$ 和 $\hat{J}$ 的矢量模型图。

五、求在一维常虚势场 $-iV\quad (V \ll E)$ 中运动粒子的波函数，计算几率流密度，并证明虚势代表粒子的吸收，求吸收系数（用 V 表示）。