* 说明：全部答题包括填空、选择题必须答在考点下发的答题纸上，否则，一律无效。

试题名称： 概率统计

第一题 10 分，第 2—8 题每题 20 分。总计 150 分。

1. 报到处有 n 位来宾的 n 张署名座号。若令每人随机的取号。问平均有多少人能抽到有自己名字的座号？又问来宾姓名与其所抽座号上的署名相符合的人数的方差是多少？

2. 设随机变量 X, Y 独立同标准正态分布 N(0,1), 试求下述随机变量 U, V, W 的分布。并回答与证明 U 与 W 是否独立，及求条件期望 E(Y|U)。

   其中 $U=X^2+Y^2$，$V=\dfrac{X}{Y}$，$W=\sin^{-1}\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}$.

3. 若跳高运动员在一连串的试跳中，可跳出的高度为 $X_0, X_1, X_2, \cdots\cdots$. 设 X_i 独立同分布，且有 $F(x)=\int_0^x f(u)du$. f(x)为其概率密度。X_0 为第一个记录。当第 n 次试跳时首次超过 X_0，也即 $X_i \le X_0, i=1,\cdots,n-1$. $X_n > X_0$. 我们说该运动员在第 n 次试跳跳出了新记录。记创造新记录的时刻为 N，试求概率 P(N=n)及 E(N).

4. (X_i, Y_i)，$i=1,\cdots\cdots,n$ 服从二维正态分布 $N(\mu,\Sigma)$,

   其中，$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}$，$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$,

   记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$S_{12}=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$

   $W=n(\bar{X}-\mu_1,\bar{Y}-\mu_2)\Sigma^{-1}(\bar{X}-\mu_1,\bar{Y}-\mu_2)^{\tau}$。（$\tau$代表转置）试问：（1）W 服从什么分布？（2）$\bar{X}$与$S_{12}$是否独立？