- 资料链接：http://www.kaoyancas.net/cas/ziliao/915.html
- 官网：http://www.kaoyancas.net
- 学长 QQ: 2852509804
- 2019 年中科院考研交流群：681994146
- 学长免费答疑，群内共享中科院考研信息。

2019 年中科院 616 数学分析 资料清单如下（后期同步更新）：

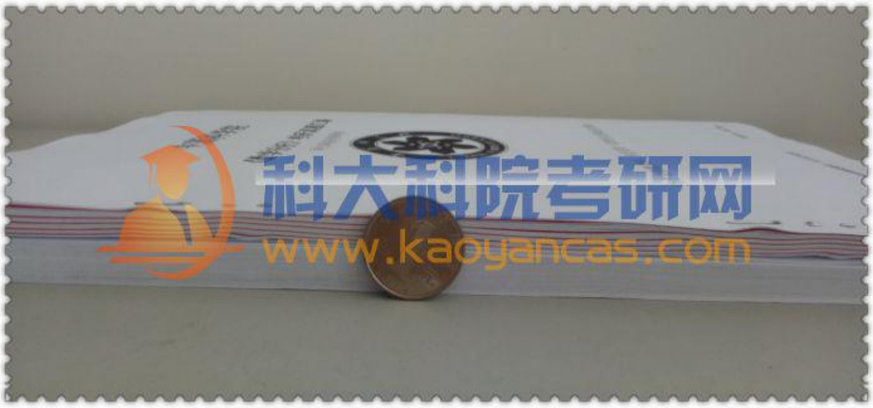
2019 年中科院《数学分析》考研资料包括：

1、中科院《数学分析》历年考研真题及答案解析【独家更新 2018 年考研真题】

真题包含：2000-2018 年数学分析考研真题，2000-2017 年试题均有答案解析，且均有详细的解析过程。

2、中科院数学分析高分学长复习笔记（推荐）

本笔记由中科院学长提供，手写版，字迹清晰工整且知识点总结归纳完整，考研复习过程中参考过的同学反馈不错。建议在冲刺阶段复习参考使用。



中国科学大学

2018 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：数学分析

科大科院考研网独家提供

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1、（15）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{[illegible]}$

2、（15）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4+e^{\frac{1}{x}}}{[illegible]}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$

3、（15）定义在 R2 上的二元函数 $f(x,y)=\sqrt{[illegible]}$ 判断 $f(x,y)$ 在点（0，0）处的可能性并证明

4、（15）求 a、b、c 的值使

中国科学院大学

2017 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：数学分析

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (15 分) 计算极限
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{2+x}-2\sqrt{1+x}+\sqrt{x}).$$

2. (15 分) 已知 $a_{n+1}(a_n+1)=1, a_0=0$, 证明数列的极限存在, 并且求出极限值.

3. (15 分) $f(x)$ 三次连续可微, 令 $u(x,y,z)=f(xyz)$, 求 $\phi(t)=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$ 的具体表达式, 其中 $t=xyz$.

4. (15 分) 求
$$\int \frac{dx}{1+x^4}.$$

5. (15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 并且 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$, 证明 $f'(x)\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

6. (15 分) 已知 $f(x)$ 有界且可微, 假设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 存在, 求证 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

7. (15 分) 求二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

中国科学院大学

2017 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题参考解答
科目名称：数学分析

科大科院考研网独家提供

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (10 分) 计算极限

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{2+x}-2\sqrt{1+x}+\sqrt{x}).$$

解：注意到

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2+x}-2\sqrt{1+x}+\sqrt{x}=\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{1+x}\right)-\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2+x}}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}\\
=&\frac{-2}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x}\right)}.
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{2+x}-2\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)\\
=&\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{-2}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x}\right)}\\
=&\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{\frac{2}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}+1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1\right)\left(\sqrt{\frac{2}{x}+1}+1\right)}=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

中国科学院
2016年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：数学分析

1.(15 分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$。

【解答】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{n}\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{x}\right)=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{n+1}{2}}$。

2.(15 分) 求定积分 $\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})dx$。

【解答】

$$\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})dx \overset{\substack{t=\sqrt{x}\\ x=t^2}}{=} \int_0^1 \log(1+t)dt^2 = t^2\log(1+t)\Big|_0^1-\int_0^1 t^2 d\log(1+t)=\log 2-\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt$$

$$=\log 2-\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\log 2-\left(-\frac{1}{2}+\log 2\right)=\frac{1}{2}$$

中国科学院 2015 年数学分析真题解析

1.(10 分) 已知数列 x_n 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\infty$。

【解答】

$\{n\}$ 为严格单调递增趋近于无穷的数列，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，由斯笃兹公式，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}{n-(n-1)}=\lim x_n=\infty$$

2.(10 分) 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$。

【解答】

$(x,y)\to(0,0)$ 时，$\left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right|\le(\dfrac{x^2+y^2}{2})^2\left|\ln(x^2+y^2)\right|\to 0$，故

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0$。

3.(10 分) 已知

中国科学院 2014 年数学分析真题解析

1.求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

【解答】

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\le\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\to\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\ge\frac{n}{\pi(n+1)}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\to\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{\pi}$。

2. $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, x\neq0\\ e, \quad x=0\end{cases}$，求 $f'(0),f''(0),f'''(0)$。

【解答】

在 x 的去心邻域内，

中国科学院 2013 年数学分析真题解析

1.(本题满分 25 分) 计算：

(1)(满分 10 分) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\sqrt{n^2+n}\pi$。

(2)(满分 15 分) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，其中设 $a_1=1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}(n\ge1)$。

【解答】

(1) $\sin^2\sqrt{n^2+n}\pi=\dfrac{1-\cos(2\sqrt{n^2+n}-2n)\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}-n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\sqrt{n^2+n}\pi=\dfrac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2\sqrt{n^2+n}-2n)\pi}{2}=\dfrac{1-(-1)}{2}=1$。

(2) 易见 $a_n\ge1$，$\forall n$。于是，$a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}\le1+\dfrac{1}{1}=2$，故 $\{a_n\}$ 有界。令 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，

$x>0$，则 $f(x)$ 单调递减，因此，$\{a_{2n}\}$ 和 $\{a_{2n-1}\}$ 都是单调数列，故二者都有极限。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=A$，

中国科学院 2012 年数学分析真题解析

1.(15×2 **分**) 计算极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\cos\frac{1}{x^2}}\right)^{x^4}$

【解答】

(1)

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n^3\left\{2\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-\left[\frac{2}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}=1$$

(2) $\left(\sqrt{\cos\frac{1}{x^2}}\right)^{x^4}=\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x^4}{2}}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x^2}-1\right)\frac{x^4}{2}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^4}=-\frac{1}{4}$，因此，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\cos\frac{1}{x^2}}\right)^{x^4}=e^{-\frac{1}{4}}。$$

2.(15×2＝30 **分**) 计算积分

不妨 $a<b \Rightarrow \exists N,\ n>N\quad x_n<x_n$（矛盾）

※④（夹逼准则）

设 x_n, y_n, z_n 如：

i, $\exists N.\ n>N$ 时 $x_n \le y_n \le z_n$ ①

ii, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

（既可用于证明也可用于计算）

证：$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_1\ n>N_1$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ ②

又 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow$ 对于上述的 $\varepsilon>0\ \exists N_2\ n>N_2$ 时 ③

$|z_n-a|<\varepsilon$

$\therefore$ 取 $N_3=\max\{N, N_1, N_2\}$ $n>N_3$ 时 ①②③同时成立.

$a-\varepsilon \le x_n \le y_n \le z_n \le a+\varepsilon$

即 $a-\varepsilon \le y_n < a+\varepsilon$

即 $|y_n-a|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Ex1 $a_1, \cdots a_k>0$.

证明：$\lim \sqrt[n]{a_1^n+\cdots a_k^n} = \max\{a_1, \cdots a_k\}$

"1^∞" = e.

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square} = e$. ($\square\to\infty$)

ex1: 设 $x_1>0$ $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ $n\in\mathbb{N}$.

证明: $\{x_n\}$ 收敛, 并求出此极限值.

证: $x_n>0$ $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}<\frac{3(3+x_n)}{3+x_n}=3$

如 $x_2>x_1$

$x_{n+1}=1+\frac{2x_n}{3+x_n}=1+\frac{2}{1+\frac{3}{x_n}}$ 当 $x_2>x_1$ 时, $\Rightarrow x_1^2<3$

则 $x_3>x_2$ …… $x_n>x_{n-1}$ 而 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}>1, & x_n^2<3\\ <1, & x_n^2>3\end{cases}$

如 $x_2<x_1$ $\Rightarrow x_3<x_2 \cdots x_n<x_{n-1}$

即 $\{x_n\}$ 有单调 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$.

$a=\frac{3(1+a)}{3+a}$ $\quad\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{3(1+x_n)}{x_n(3+x_n)}>\frac{3(1+x_n)}{3(3+x_n)}=\frac{1+x_n}{3+x_n}$

$a=\sqrt{3}$ $\quad x_n<3$

ex2 对每一个正整数n, 用 x_n 表示方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$

定义：设 $a_1 \cdots a_n$ 为正数

分别称 $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$，$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$，$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$，

为 $a_1\cdots a_n$ 算术平均数，几何平均，调和平均

定理 设 $a_1\cdots\cdots a_n$ 为正数 则

$\frac{a_1+\cdots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots\frac{1}{a_n}}$ 其中等号成立当且仅当

$a_1=\cdots=a_n$

证明：$n=1$ 显然成立

$n=2$ 不等式成立

设 假设命题对 $n=k$ 时成立

即 $\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$

则 $a=k+1$ 时，要证 $\frac{a_1+\cdots a_k+a_{k+1}}{k+1} \geqslant \sqrt[k+1]{a_1\cdots a_k a_{k+1}}$

$\frac{a_1+a_2+\cdots a_k}{k+1} - \sqrt[k+1]{a_1\cdots a_k a_{k+1}}$