第 3 章　水静力学（Hydrostatics)

第3章　水静力学（Hydrostatics）

水静力学是液体在静止或相对静止状态下的力学规律及其应用的科学。

由流动性知，静止状态下，作用在液体上的表面力只有压强。

3.1 静止液体中压强的特性

特性一：

静压强的方向与作用面的内法线方向一致，或静压强的方向垂直并指向作用面。

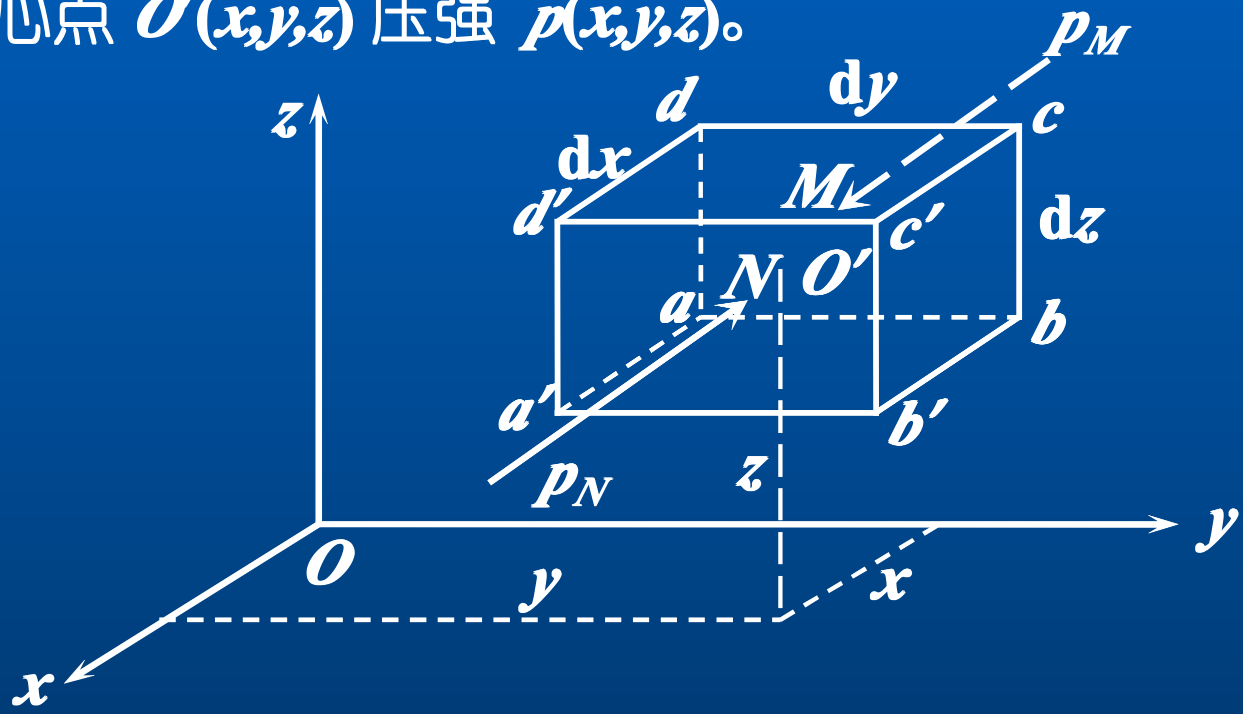
特性二：

静止液体中任意点压强的大小与作用面的方向无关。

3.2 静止液体平衡微分方程

3.2.1 微分方程

静止液体内取边长分别为 dx, dy, dz 的微元六面体，中心点 $O'(x,y,z)$ 压强 $p(x,y,z)$。



由于六面体为静止，故作用在六面体上各个方向力满足力平衡方程。以 x 方向为例：

表面力：除 ***abcd*** 与 ***a′b′c′d′*** 两面外，其余面上作用的力在***x***轴上投影均为0。此两面中心点压强可用泰勒（G.Taylor）级数展开，取前两项：

$$p_{\mathrm{N}} = p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$p_{\mathrm{M}} = p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$$

两个面上的总压力则为：

$$P_{\mathrm{M}} = \left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$P_{\mathrm{N}} = \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

质量力：***x***方向单位质量力与六面体总质量的乘积，即

$$F_{\mathrm{bx}} = X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

列 *x* 方向力平衡方程得：

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

化简后得：

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

同理：

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

上式即液体平衡微分方程，由瑞士学者欧拉（L. Euler）于1755导出，又称欧拉平衡微分方程。

欧 拉 Leonhard Euler

1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔城，1783 年9月18日去逝于俄罗斯的彼得堡，享年76岁。

13岁时入读巴塞尔大学，15岁大学毕业，16岁获硕士学位。1727年任彼得堡科学院数学教授。1741年应普鲁士彼德烈大帝的邀请，到柏林担任科学院物理数学所所长。直到1766年，在沙皇喀德林二世的诚恳敦聘下重回彼得堡。　　他从19岁开始发表论文，直到76岁，共写下了886本书籍和论文，涉及到数学分析、代数、数论、几何、物理和力学、天文学、弹道学、航海学、建筑学等。他的许多著作都是在1766年失明后完成的。

用**d*x*，d*y*，d*z*** 分别依次乘以欧拉平衡微分方程的各式，

然后相加，得

$$\left(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z\right)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=0$$

其中的压强全微分为：

$$\mathrm{d}p=\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z$$

最后得液体平衡微分方程的综合式或液体平衡微分方程的全微分式

$$\mathrm{d}p=\rho\left(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z\right)$$

3.2.2 等压面

等压面—压强相等的空间点构成的面。

在等压面上，$p=c$，$dp=0$，平衡微分方程的全微分式

则可表示为：

$$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z=0$$

上式称等压面方程。

等压面方程中，X、Y、Z为单位质量力在三个坐标轴的分力，而 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 则是等压面上任意线段在三个坐标轴的投影，由矢量代数得：

$$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z=\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

根据等压面方程，单位质量力与等压面上任意线段的点乘积等于0，这说明这两个向量相互垂直，即质量力与等压面相互垂直，如重力与水平面。

3.3　重力作用下静止液体中压强的分布规律

3.3.1 水静力学基本方程

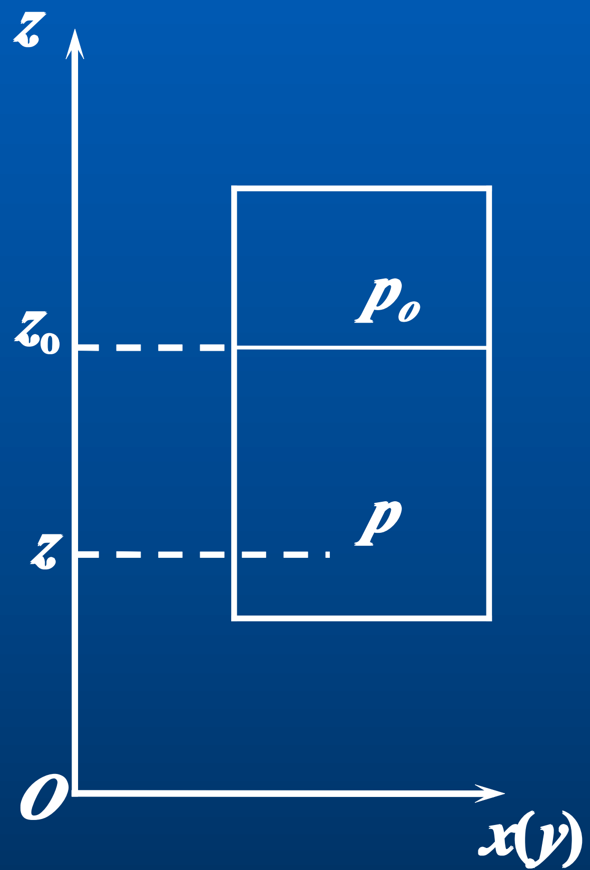
设重力作用下的静止液体，置于直角坐标系***Oxyz*** 中，液面的位置高度为 z_0，压强为 p_0。

若质量力只有重力，$X=Y=0$，$Z=-g$，则液体中任意点压强的全微分可为：

$$\mathrm{d}p=\rho\left(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z\right)=-\rho g\mathrm{d}z$$

积分上式，得

$$p=-\rho gz+c$$



根据边界条件确定积分常数：

$z=z_0$，$p=p_0$，$C=p_0+\rho g z_0$

代入得：

$$p=p_0+\rho g(z_0-z)=p_0+\rho gh$$

上式称为水静力学基本方程式，表示了质量力只有重力时液体静压强的分布规律。

式中：

p —静止液体中某点的压强（Pa）；

p_0—液面压强（Pa）；

z —某点在水平坐标面上的高度（m）；

h —该点到液面的距离，又称淹没深度（m）。

3.3.2 帕斯卡原理—压强等值传递

对于液体中任意 ***A***、***B*** 两点，有

$$p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{A}} + \rho g h_{\mathrm{AB}}$$

式中 h_{AB} 为 ***A***、***B*** 两点的水深差。

若在 ***A*** 点增加一个压强值 Δp_{A}， ***A*** 点的压强变为

$$p_{\mathrm{A}}' = p_{\mathrm{A}} + \Delta p_{\mathrm{A}}$$

于是，***B*** 点的压强则应为

$$p_{\mathrm{B}}' = p_{\mathrm{A}}' + \rho g h = p_{\mathrm{A}} + \Delta p_{\mathrm{A}} + \rho g h = p_{\mathrm{B}} + \Delta p_{\mathrm{A}}$$

上式说明，静止液体中任意点的压强增值将等值地传递到各点。

3.3.3 压强的度量

由于计算基准不同，同一点的压强可用不同的值来描述。

绝对压强与相对压强

绝对压强（**absolute pressure**）—以无气体分子存在的完全真空为基准起算的压强值，用符号p_{abs}表示。

相对压强（**gage pressure**）—以当地大气压为基准起算的压强值，用符号 p 表示。若设当地大气压强为p_a，则绝对压强与相对压强间有关系：

$$p = p_{abs} - p_a$$

普通工程或设备都处于大气压强作用下，采用相对压强往往使计算简化。如开口容器中液面下某点的压强计算可简化为

$$p = \rho g h$$

工程中使用的一种测量压强的仪器 — 压力表。由于该表以大气压作为 **0** 点，故该表所测的压强值为相对压强。因此，相对压强又称表压强。

真空压强

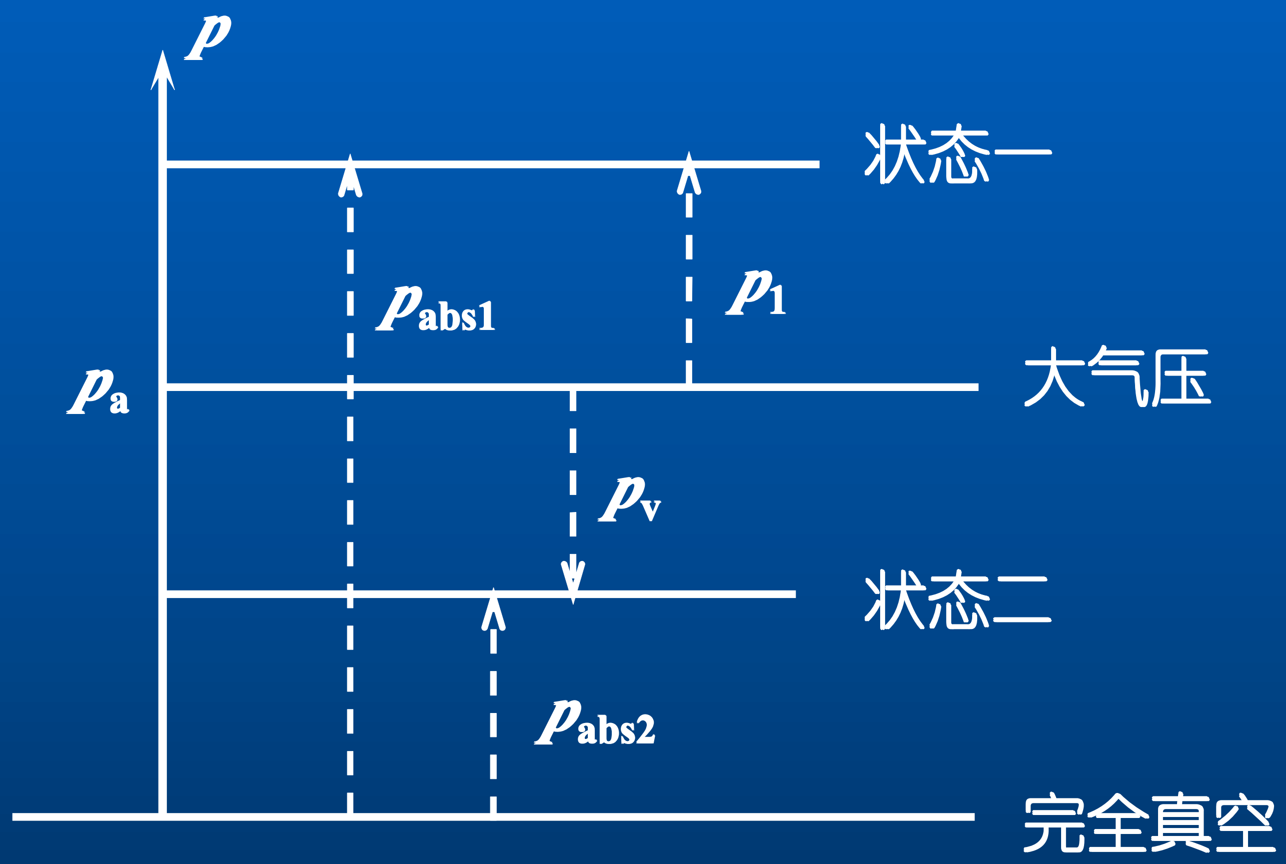
真空（**vaccum**）—绝对压强小于当地大气压的状态。

真空压强 — 绝对压强小于大气压强的差值，以符号 p_v 表示。根据定义有：

$$p_{\mathrm{v}} = p_{\mathrm{a}} - p_{\mathrm{abs}} \quad \text{或} \quad p_{\mathrm{v}} = -(p_{\mathrm{abs}} - p_{\mathrm{a}}) = -p$$

真空压强又可表示为相对压强的负值，故又称负压。

压强关系图



3.3.4 测压管水头（static head/piezometric head）

以单位体积液体的重量 ρg 除以水静力学基本方程不定积分式各项，得

$$z+\frac{p}{\rho g}=c$$

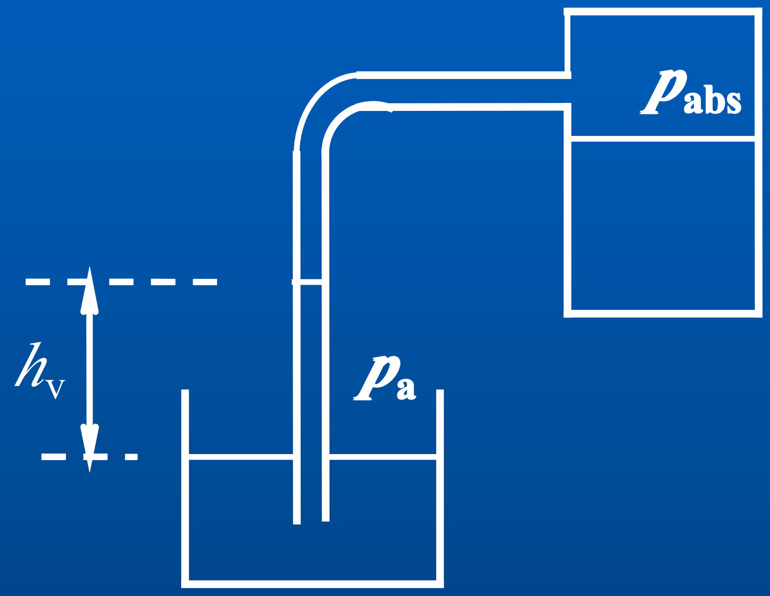
式中 z 某点在基准面以上的高度，称位置高度或位置水头（elevation head）。

$\frac{p}{\rho g}$ 压力水头（pressure head）。

$z+\frac{p}{\rho g}$ 测压管水头（static head/piezometric head）测压管的液面到基准面的总高度，称。

$z+\frac{p}{\rho g}=c$ 静止液体中，各点的测压管水头相同。

当某点的绝对压强小于大气压，即处于真空状态时，真空值的大小也可用液柱高度即真空度表示出来，如图所示。



由于密闭水箱内为真空，水槽为开口通大气，于是水槽中的水在玻璃管两端压强差的作用下上升了h_v 的高度。

$$p_a = p_{abs} + \rho g h_v$$

或

$$h_v = \frac{p_a - p_{abs}}{\rho g} = \frac{p_v}{\rho g}$$

h_v称为真空高度，简称真空度。

3.3.5 压强的计量单位

和应力单位一样。

国际单位制： 帕（Pa），千帕（kPa或10^3Pa），　兆帕（MPa或10^6Pa）；

大气压的倍数

标准大气压（atm）：1 atm 相当于 101325 Pa；

工程大气压（at）：　1 at 相当于 98000 Pa　或　1 at 相当于 0.1 MPa；

液柱高

水柱高：1 标准大气压可维持10.33 mH_2O高，1 工程大气压可维持10 mH_2O高；

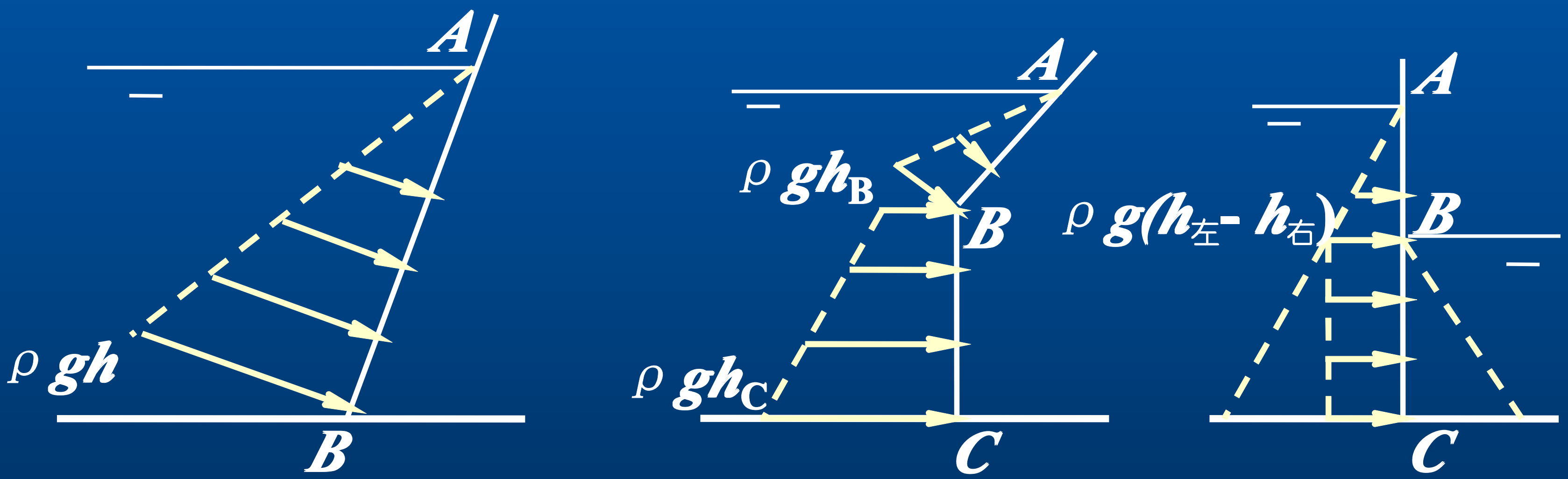
水银柱：1 标准大气压可维持760 mmHg高，1 工程大气压可维持736 mmHg高。

3.3.6 压强分布图

压强分布图 — 在受压面承压一侧，根据压强的特性，
按一定比例的矢量线段表示的压强大小和方向的图形。

压强分布图是液体静压强分布规律的几何图示。

对于开口容器，压强通常用相对压强表示。



3.4 液柱式测压计

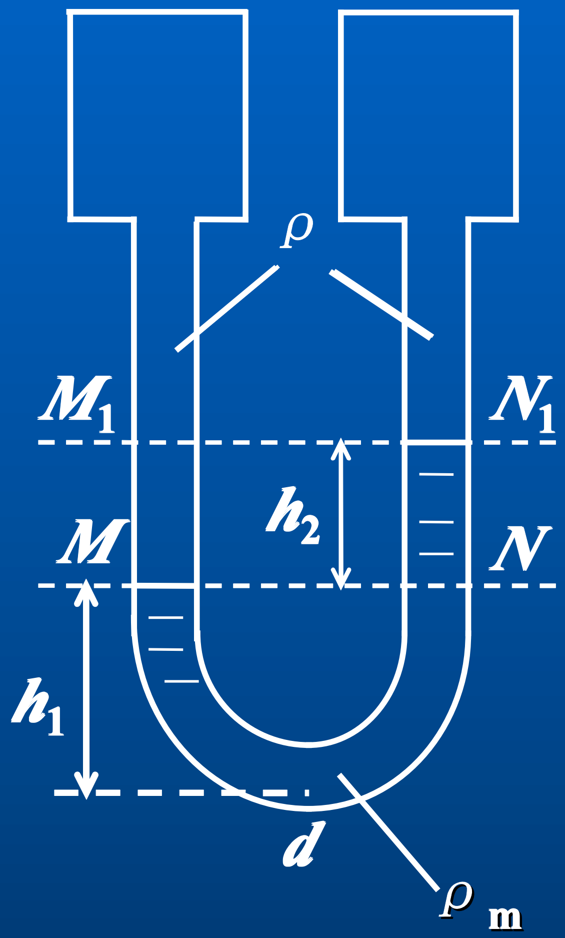
3.4.1 连通器内的等压面

在连通器内做两条水平线 MN 与 M_1N_1，最低点为 d

由水静力学基本方程：

$$\boxed{p_d = p_M + \rho_m g h_1}$$

$$\boxed{p_d = p_N + \rho_m g h_1}$$



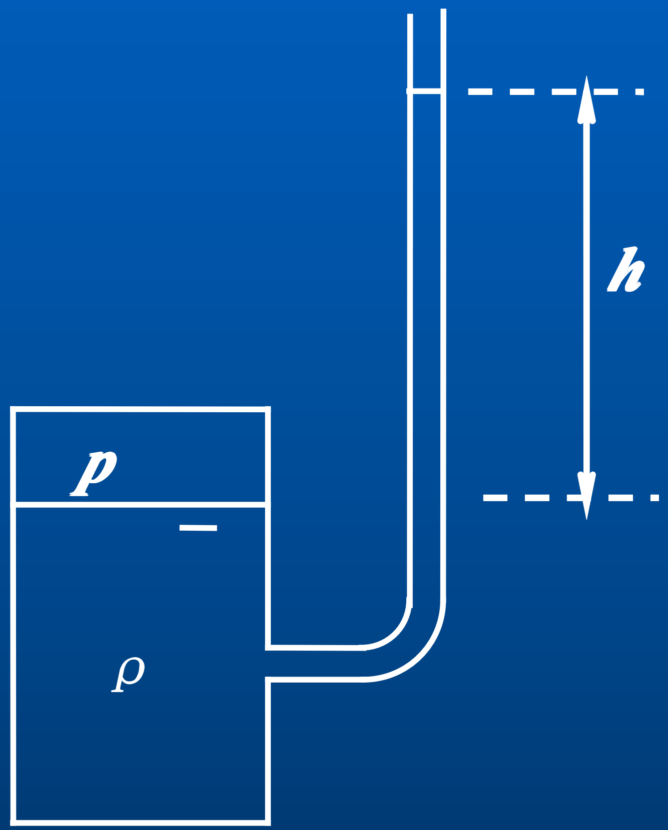
因为 $\boxed{\rho_m = \rho_m}$ 得 $\boxed{p_M = p_N}$

由以上分析得：*连通的相同液体的水平面等压*。

3.4.2 液柱式测压计

1. 测压管(piezometer）

测压管 指一端接测点，另一端开口通大气的竖直玻璃管。



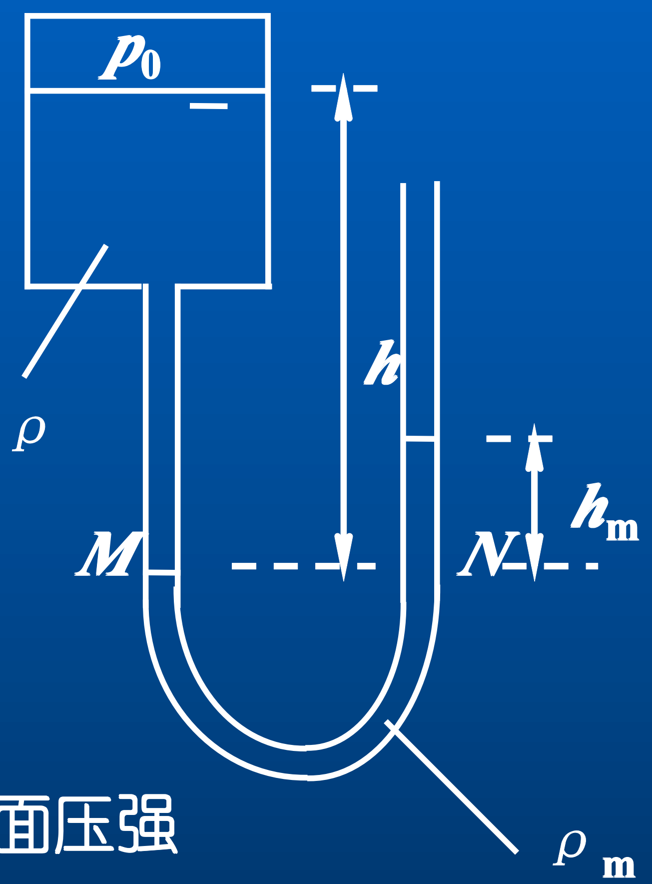
根据水静力学基本方程，通过量测的测压管高度，可直接求出测点的相对压强，即

$$p = \rho g h$$

由于测压管高度有限，不宜量测压强较大的点。为避免误差，玻璃管不宜过细。

2. U形管测压计（U-tube manometer）

使用水银作为测压介质，U形管测压计可测量较大的压强。



过*M*、*N*两点取水平等压面，

根据水静力学基本方程，得

$$\boxed{p_M = p_0 + \rho g h}$$

$$\boxed{p_N = \rho_m g h_m}$$

由于*MN*为等压面，求得水箱液面压强

$$\boxed{p_0 = \rho_m g h_m - \rho g h}$$

3.压差计（differential manometer）

压差计用于测量两点的压强差或测压管水头差。

由水静力学基本方程

$$p_{\mathrm{M}} = p_{\mathrm{A}} + \rho g\left(x + h_{\mathrm{m}}\right)$$

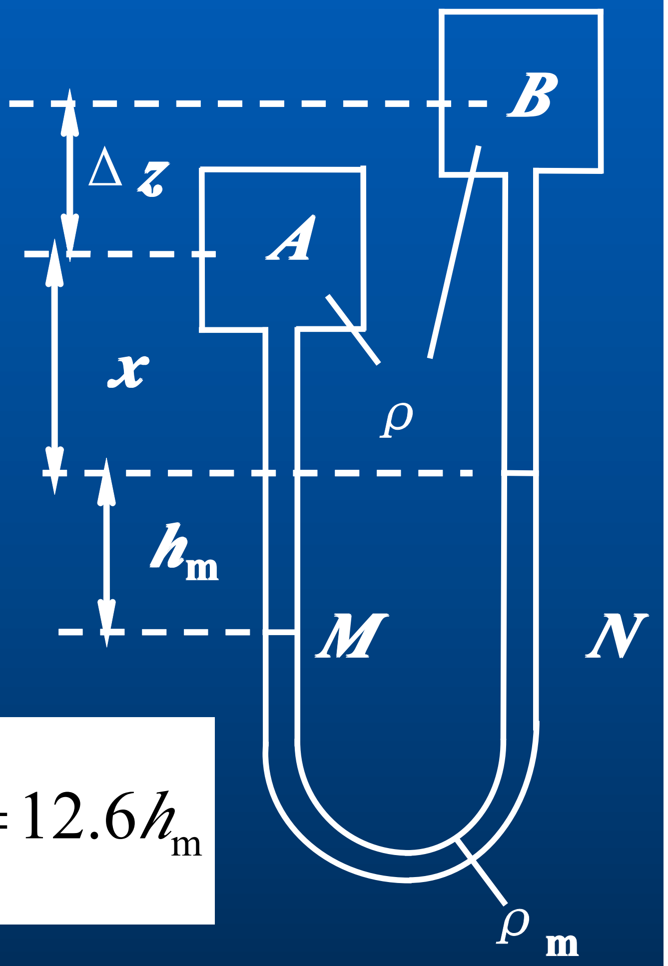
$$p_{\mathrm{N}} = p_{\mathrm{B}} + \rho g\left(\Delta z + x\right) + \rho_{\mathrm{m}} g h_{\mathrm{m}}$$

由于等压面，$p_M = p_N$，***AB***点的压强差

$$p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}} = \left(\rho_{\mathrm{m}} - \rho\right) g h_{\mathrm{m}} + \rho g \Delta z$$

若令 $\Delta z = z_B - z_A$，测压介质分别为水和水银，并以 ρg 遍除之，得测压管水头差

$$\left(z_{\mathrm{A}} + \frac{p_{\mathrm{A}}}{\rho g}\right) - \left(z_{\mathrm{B}} + \frac{p_{\mathrm{B}}}{\rho g}\right) = \left(\frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\rho} - 1\right) h_{\mathrm{m}} = 12.6 h_{\mathrm{m}}$$



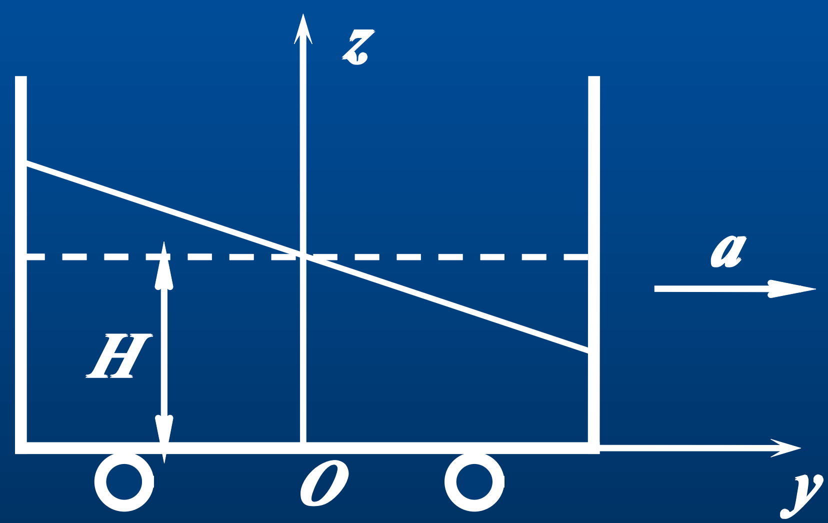
3.5　液体的相对平衡

相对平衡指液体相对于地球运动而相对于容器静止的状态。

根据达朗伯（d′Alembert）原理，在质量力中计入惯性力，液体的运动问题就转化成相对静止问题。

3.5.1　等加速直线运动容器中的液体平衡

盛水容器（小车），静止时其内水深H，该容器以加速度a做直线运动，液面形成倾斜平面。将坐标取在容器上，容器内水相对于坐标静止。



1. 压强分布规律

根据欧拉平衡方程综合式

$$\mathrm{d}p = \rho\left(X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z\right)$$

质量力除重力外，计入惯性力。惯性力的方向与加速度相反，即 $X = 0$　$Y = -a$　$Z = -g$

于是上式可简化成

$$\mathrm{d}p = \rho\left(-a\mathrm{d}y - g\mathrm{d}z\right)$$

积分后得

$$p = \rho g\left(-\frac{a}{g}y - z\right) + c$$

由于液面倾斜前后液体体积不变，故在中间 $y = 0$ 处，$z = H$，$p = p_0$，于是积分常数为：$c = p_0 + \rho gH$

则

$$p = p_0 + \rho g\left(H - z - \frac{a}{g}y\right)$$

$$p = p_0 + \rho gh$$

2. 等压面

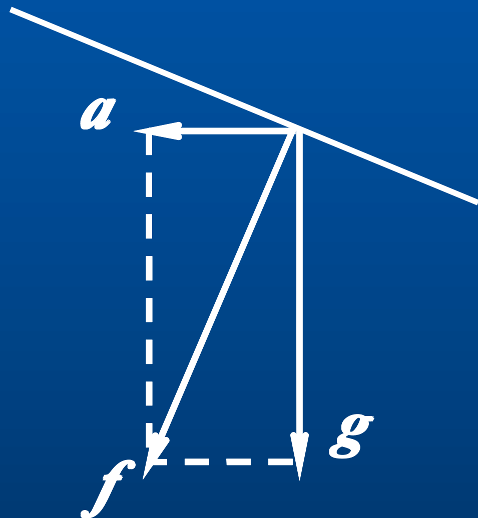
令 $p=c$，得等压面方程为

$$z=-\frac{a}{g}y+c$$

可见等压面是以 $-\frac{a}{g}$ 为斜率的倾斜平面。

而质量力合力作用线的斜率为 $\frac{g}{a}$ 。

两条直线斜率的乘积等于 –1 ，说明这两条直线相互垂直，即质量力与等压面相互垂直。



令 $p=p_0$，得自由液面方程

$$z_s=H-\frac{a}{g}y_s$$

3.5.2 等角速度旋转容器中液体的相对平衡

一盛有液体深度为 H 的圆柱形容器，绕容器立轴以等角速度 ω 旋转。由于液体的黏滞作用，经一段时间后，容器内的所有液体质点以相同的角速度绕该轴旋转。此时，液体与容器之间、液体中质点之间再无相对运动，在容器中形成了具有抛物面液面的、相对于容器静止的液体。

1. 压强分布规律

根据欧拉平衡方程综合式

$$\mathrm{d}p=\rho\left(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z\right)$$

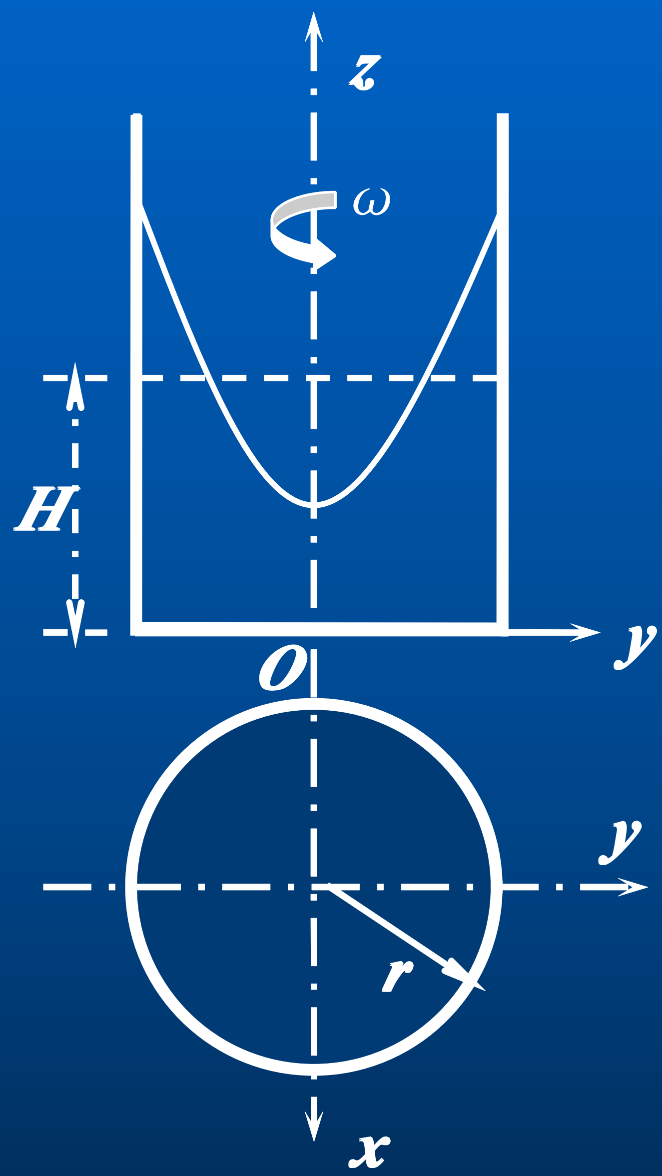
质量力除重力外，计入惯性力，惯性力方向与向心加速度方向相反，为离心方向，即

$$X=\omega^2 x \qquad Y=\omega^2 y \qquad Z=-g$$

$$\mathrm{d}p=\rho\left(\omega^2 x\mathrm{d}x+\omega^2 y\mathrm{d}y-g\mathrm{d}z\right)$$

积分得

$$p=\rho g\left[\frac{\omega^2\left(x^2+y^2\right)}{2g}-z\right]+c$$



因为 $x^2 + y^2 = r^2$

所以上式又可表示为

$$p = \rho g\left[\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right] + c$$

根据边界条件 $r=0$，$z=z_0$，$p=p_0$ 确定积分常数，得

$$c = p_0 + \rho g z_0$$

于是

$$p = p_0 + \rho g\left[(z_0 - z) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right]$$

2. 等压面

令 $p=c$，得等压面方程

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + c$$

令 $p=p_0$，得自由液面方程

$$z_s = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

将自由液面方程

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z_s - z_0$$

代入压强分布公式，得

$$p = p_0 + \rho g[(z_0 - z) + (z_s - z_0)] = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho g h$$

上式表明，铅垂方向压强分布规律与静止液体相同。

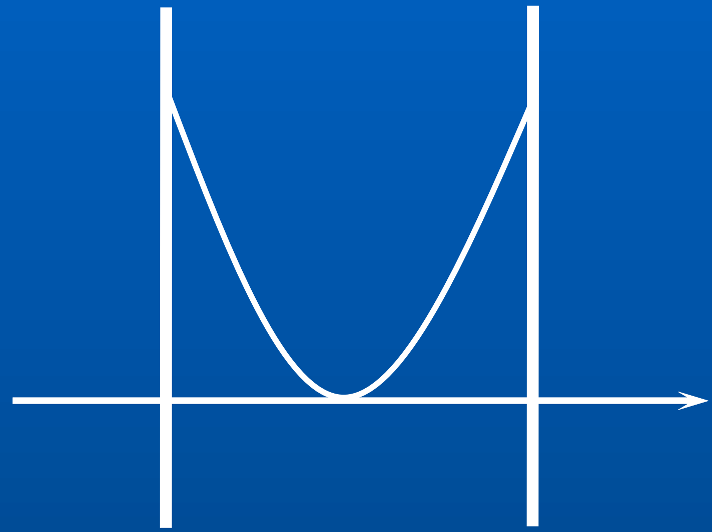
3. 测压管水头

$$z + \frac{p}{\rho g} = c + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

上式表明，只有 $\boldsymbol{r}$ 一定时，即在同一个同心圆柱面上，测压管水头才为常数。

3. 旋转抛物面的几何特征

$$z = ar^2$$



旋转抛物体的体积为同底圆柱体体积的一半。

3.6 液体作用在平面壁上的总压力

对于气体，平面总压力可由压强与作用面面积的乘积直接求得。

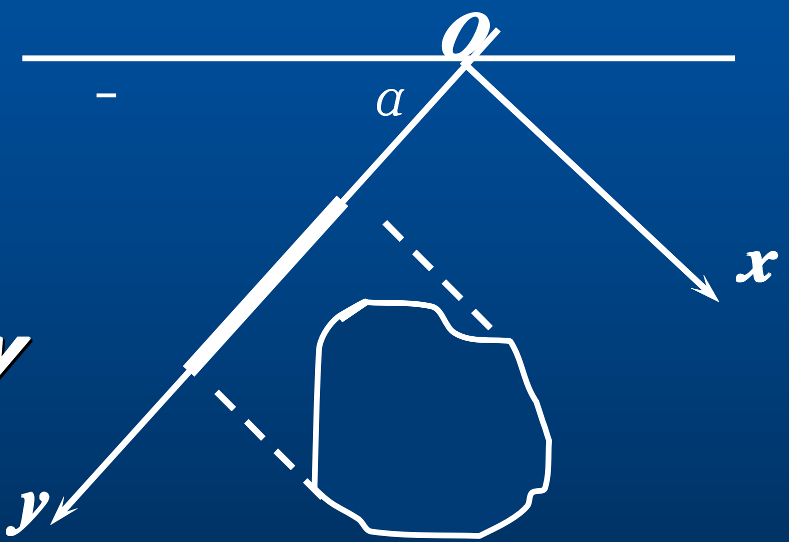
对于液体，由于空间各点压强不等，无法直接求出总压力的大小，必须考虑静压强的分布规律。

求解方法有解析法和图算法。

3.6.1 解析法

总压力的大小

设开口水池中面积为 A 的任意形状平面与水面夹角为 α。取坐标系 *Oxy*，并将平面 *Oxy* 绕 y 轴旋转 90°。



受压面上，任取一微元面积 **d*A***，水深 ***h***，坐标 ***y***。

微元面 **d*A***上作用的静水总压力

可表示为

$$dF_P = \rho g h dA = \rho g y \sin\alpha dA$$

对总面积积分，得

$$F_P = \int_A dF_P = \rho g \sin\alpha \int_A y dA$$

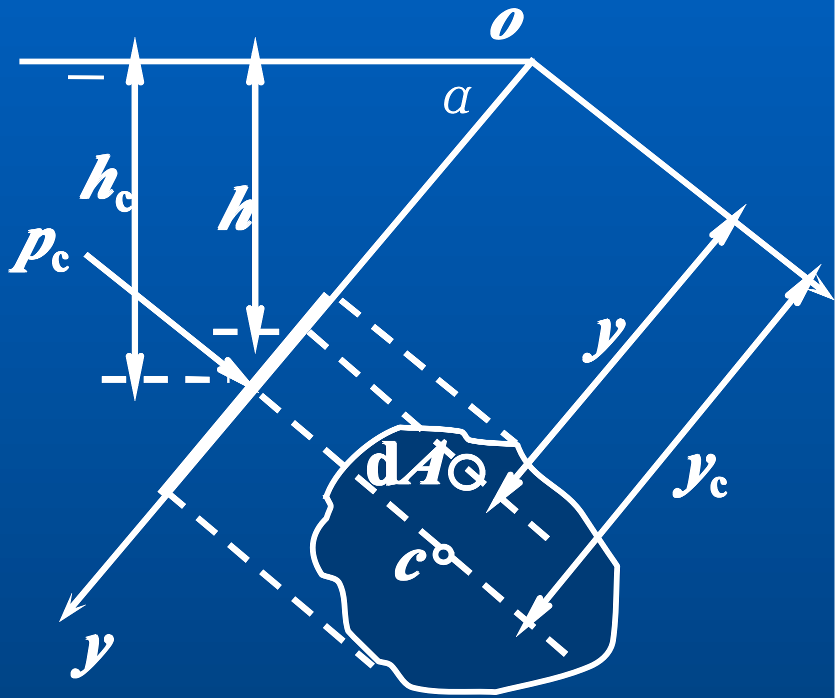
式中

$$\int_A y dA = y_c A$$

所以得：

$$F_P = \rho g \sin\alpha y_c A = \rho g h_c A = p_c A$$

上式表明，任意形状平面总压力等于受压面积与其形心压强的乘积，与受压面的倾角和形状无关。



总压力作用点

设总压力作用点（压力中心）*D*点到*Ox*轴距离为*y*

y_D，根据合力矩定理有：

$$F_P y_D = \int_A y \mathrm{d}F_P = \rho g \sin\alpha \int_A y^2 \mathrm{d}A$$

积分 $\int_A y^2 \mathrm{d}A$ 为受压面 *A* 对 *Ox* 轴的惯性矩，令 $\int_A y^2 \mathrm{d}A = I_x$

则

$$F_P y_D = \rho g \sin\alpha I_x$$

将 $F_P = \rho g \sin\alpha y_c A$ 代入并化简，得

$$y_D = \frac{I_x}{y_c A}$$

由惯性矩平行移轴定理，将 $I_x = I_c + y_c^2 A$ 代入上式，得

总压力作用点计算公式：

$$y_D = y_c + \frac{I_c}{y_c A}$$

式中 y_D— 总压力作用点到 Ox 轴距离（m）；

y_c— 作用面形心点到 Ox 轴距离（m）；

A— 作用面面积（m²）；

I_c— 受压面对通过自身形心轴的惯性矩：

矩形 $$I_c = \frac{1}{12} b h^3$$

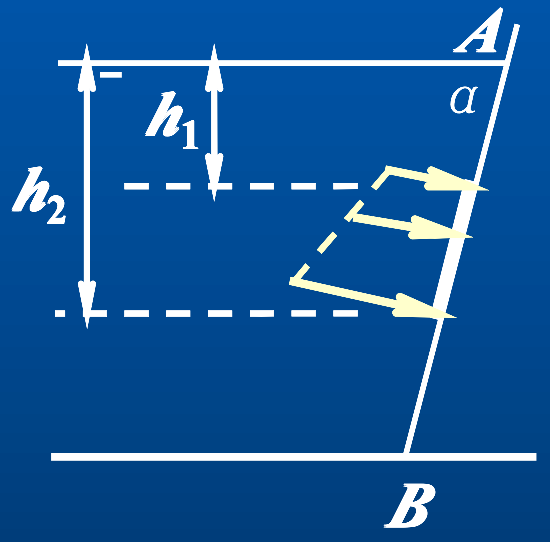
圆 $$I_c = \frac{1}{64} \pi D^4$$

由于 $\frac{I_c}{y_c A} > 0$，故 $y_D > y_c$。

3.6.2 图算法

对于底边平行于液面的矩形平面，还可采用图算法求解作用在平面上的静水总压力大小与作用点。

设一底边平行于液面的矩形**AB**，与水面夹角 α，宽度**b**，上、下底边的淹深分别为h_1、h_2。



根据解析法

$$F_P = p_c A = \rho g\left(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{2}\right)\frac{h_2 - h_1}{\sin\alpha}b$$

$$= \frac{1}{2}(\rho g h_1 + \rho g h_2)\frac{h_2 - h_1}{\sin\alpha}b = A_p b$$

式中A_p为压强分布图的面积。

总压力作用线通过压强分布图的形心。

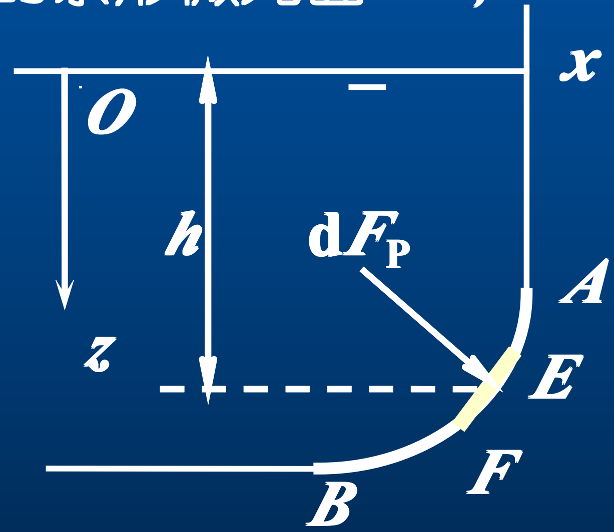
3.7 液体作用在曲面壁上的总压力

工程中存在着大量的曲面壁，如圆管管壁、球形容器等。与平面相比，作用在曲面上的压强不仅大小随位置而变，方向也因位置的不同而不同。

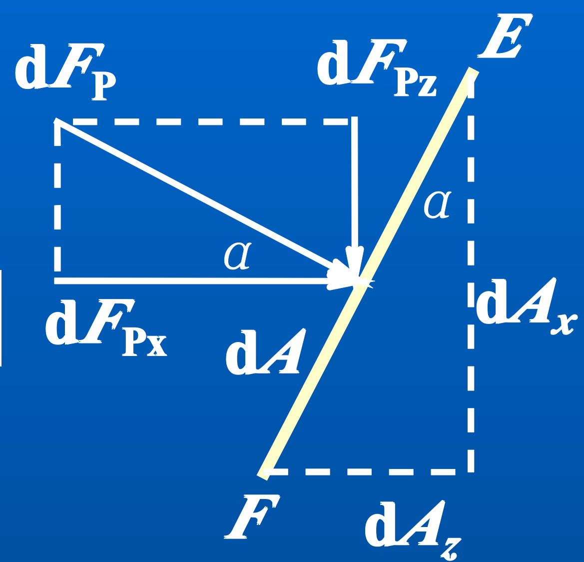
3.7.1 曲面上的总压力

设开口水池中一面积为A的柱面AB，一侧承压。选坐标系，令xOy平面与自由液面重合，z轴铅垂向下。

曲面上沿母线方向任取水深为 h 的条形微元面 EF，面积为$\mathrm{d}A$，其上作用压力$\mathrm{d}F_P$。由于各微元面上的压力 $\mathrm{d}F_P$ 方向不同，不能直接积分求解 AB 面上的总压力，需首先将其分解为 $\mathrm{d}F_{Px}$与$\mathrm{d}F_{Pz}$各自积分后再进行合成。



分解后



$$\mathrm{d}F_{\mathrm{Px}} = \mathrm{d}F_{\mathrm{P}} \cos\alpha = \rho g h \mathrm{d}A \cos\alpha = \rho g h \mathrm{d}A_{\mathrm{x}}$$

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{Pz}} = \mathrm{d}F_{\mathrm{P}} \sin\alpha = \rho g h \mathrm{d}A \sin\alpha = \rho g h \mathrm{d}A_{\mathrm{z}}$$

总压力的水平积分

$$F_{\mathrm{Px}} = \int \mathrm{d}F_{\mathrm{Px}} = \rho g \int_{A_{\mathrm{x}}} h \mathrm{d}A_{\mathrm{x}}$$

式中 $\int_{A_{\mathrm{x}}} h \mathrm{d}A_{\mathrm{x}} = h_{\mathrm{c}} A_{\mathrm{x}}$ ，代入上式，得

$$F_{\mathrm{Px}} = \rho g h_{\mathrm{c}} A_{\mathrm{x}} = p_{\mathrm{c}} A_{\mathrm{x}}$$

式中 F_{Px}— 总压力的水平分力；A_{x}— 曲面的铅垂投影面；

h_{c}— 投影面形心点深度；p_{c}— 投影面形心点压强。

总压力的铅垂分力

$$F_{\mathrm{Pz}}=\int \mathrm{d}F_{\mathrm{Pz}}=\rho g\int_{A_{\mathrm{z}}} h\mathrm{d}A_{\mathrm{z}}=\rho g\int_{V}\mathrm{d}V=\rho gV$$

式中 $h\mathrm{d}A_z=\mathrm{d}V$ 为微元曲面到自由液面的柱体体积；

而 $\int_{A_{\mathrm{z}}} h\mathrm{d}A_{\mathrm{z}}=\int_{V}\mathrm{d}V=V$ 则是整个曲面到自由液面的柱体体积；

称之为压立体。

总压力的合力 $F_{\mathrm{P}}=\sqrt{F_{\mathrm{Px}}^2+F_{\mathrm{Pz}}^2}$

总压力的方向 $\tan\theta=\dfrac{F_{\mathrm{Pz}}}{F_{\mathrm{Px}}}$

3.7.2 压立体

压立体 — 受压曲面与自由液面（或其延伸面）之间的柱体。由于曲面的承压位置不同，又有实、虚压力体之分：

1.实压力体 — 压力体与液体在曲面同一侧，如同压力体内有液体，故名。铅垂分力方向向下。

2.虚压力体 — 压力体与液体在曲面不同侧，如同压力体空虚，故名。铅垂分力方向向上。

3.压力体叠加 — 实虚压力体叠加后，叠加部分抵销掉，剩余部分或实或虚。