第 4 章　水动力学基础（ Basic Hydrodynamics)

水动力学是以动力学的理论和方法研究液体的机械运动规律。

4.1 液体运动的描述方法

与固体不同，由于液体质点间存在着相对运动，如何用数学物理方法来描述液体的运动是从理论上研究液体运动的首要问题。通常有拉格朗日法和欧拉法两种方式。

4.1.1 *拉格朗日法（J.Lagrange）*

拉格朗日法—把液体的运动看成是无数质点运动的总和，以个别质点作为研究对象加以描述，再将各质点的运动汇总起来，就得到整个流动的运动规律。

拉格朗日法是固体力学常用的方法，对一指定质点（起始点坐标**a,b,c**为常量），此法中运动轨迹、速度、加速度之间的关系可表示为 **x(a,b,c,t)**：

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t} \qquad u_y = \frac{\partial y}{\partial t} \qquad u_z = \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \qquad a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

由于液体的运动轨迹比较复杂，此法描述比较困难，因此故除个别流动（波浪运动）外，一般不采用。

4.1.2 欧拉（Euler）法

欧拉法—以充满液体的空间，即流场为对象，观察不同时刻流场中各空间点上液体质点的运动参数（流速等），将其汇总起来，就形成了对整个流场的描述。

欧拉法的运动参数例如：

$$u_x = u_x(x, y, z, t) \qquad u_y = u_y(x, y, z, t)$$

$$u_z = u_z(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t) \qquad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

式中x，y，z为流场中的空间坐标，t为时间。

由于 x，y，z 为液体质点在 t 时刻的运动坐标，故对于同一质点来说，又是时间的函数。因此加速度需采用复合函数求导数的方法求出，即

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \vec{u}\bullet\nabla u_x$$

$$a_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+\vec{u}\bullet\nabla u_x$$

$$a_y=\frac{\partial u_y}{\partial t}+\vec{u}\bullet\nabla u_y$$

$$a_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}+\vec{u}\bullet\nabla u_z$$

$$\vec{a}=\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\bullet\nabla\vec{u}$$

上式为欧拉法描述液体运动中质点加速度的表达式，其中

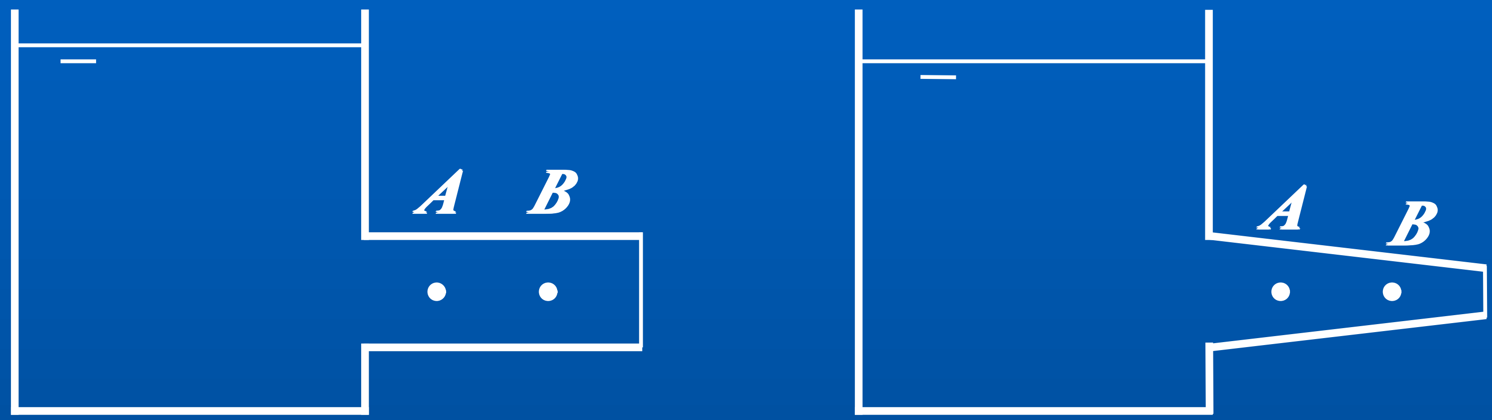
$\frac{\partial u_x}{\partial t}, \frac{\partial u_y}{\partial t}, \frac{\partial u_z}{\partial t}$

为某空间点速度随时间的变化率，称为*时变加速度或当地加速度*（**local acceleration**）；

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \vec{u} \bullet \nabla u_x$$

则是该空间点速度由空间点位置变化所引起的加速度，称为*位变加速度或迁移加速度*(**convective acceleration**)。

例如，水箱里的水经水管流出



水箱水位下降，两水箱水管中均有时变加速度；

水箱水位恒定不变，两水箱水管中均无时变加速度；

前面水箱水管管径不变，*A*、*B*两点速度相同，无位变加速度；

后面水箱水管管径变化，*A*、*B*两点速度不同，有位变加速度。

4.2 欧拉法的基本概念

（1）恒定流和非恒定流（steady and unsteady flows）

恒定流—流场中各空间点的运动要素（流速等）均不随时间变化的流动，反之为非恒定流。对于恒定流

$$u_x = u_x(x, y, z) \qquad u_y = u_y(x, y, z) \qquad u_z = u_z(x, y, z)$$

$$p = p(x, y, z) \qquad \rho = \rho(x, y, z)$$

恒定流时，时变加速度为零。

前面的例子中，水箱水位不变为恒定流。

（2）零维、一维、二维和三维流动（zero/one / two / three dimensional flows）

流动参数（如流速）是三个空间坐标的函数，流动是三元的。其他依此类推。

（3）流线

为形象地描述流动，特引入流线的概念。

流线（**stream line**）—流场中的空间曲线，在同一瞬时，线上各点的速度矢量与之相切。

两流线不能相交或为折线，而是光滑曲线或直线。

某时段内，液体质点经过的轨迹称迹线（**path line**）。迹线与流线是完全不同的两个概念。

恒定流时，流线与迹线重合。

（4）均匀流和非均匀流（uniform and nonuniform flows）

流线为平行直线的流动为均匀流，否则为非均匀流。

前面例子中，等直径管内的流动为均匀流动，变直径管内的流动为非均匀流。

非均匀流又包括渐变流与急变流。

流线接近平行直线的流动为渐变流，否则为急变流。

（5）元流与总流

流场中取一非流线的封闭曲线，通过曲线上各点的流线所构成的管状表面称为流管。

由于流线不能相交，所以液体不能从流管的侧壁流入或流出。恒定流时，流管形状保持不变。

与流管上所有流线都正交的横断面称为*过水断面*（**cross section**）。流线相互平行时，过水断面为平面，否则为曲面。

过水断面为无限小时，流管及其内部的液体称为元流（**elementary flow**）。元流的几何特征与流线相同。过水断面为有限大小时，流管及其内部的液体称为总流（**total flow**）。总流是由无数元流组成。

（**6**）流量与断面平均流速

单位时间内通过过水断面液体的体积，称为体积流量，简称流量（**flow rate/discharge**），单位为立方米每秒（**m³/s**）。若以**d*A***表示元流过水断面面积，***u***表示该断面流速，则总流流量为

$$Q=\int_A \vec{u}\bullet \mathrm{d}\vec{A}=\int_A \vec{u}\bullet \vec{n}dA$$

除体积流量外，还可有质量流量及重量流量等。

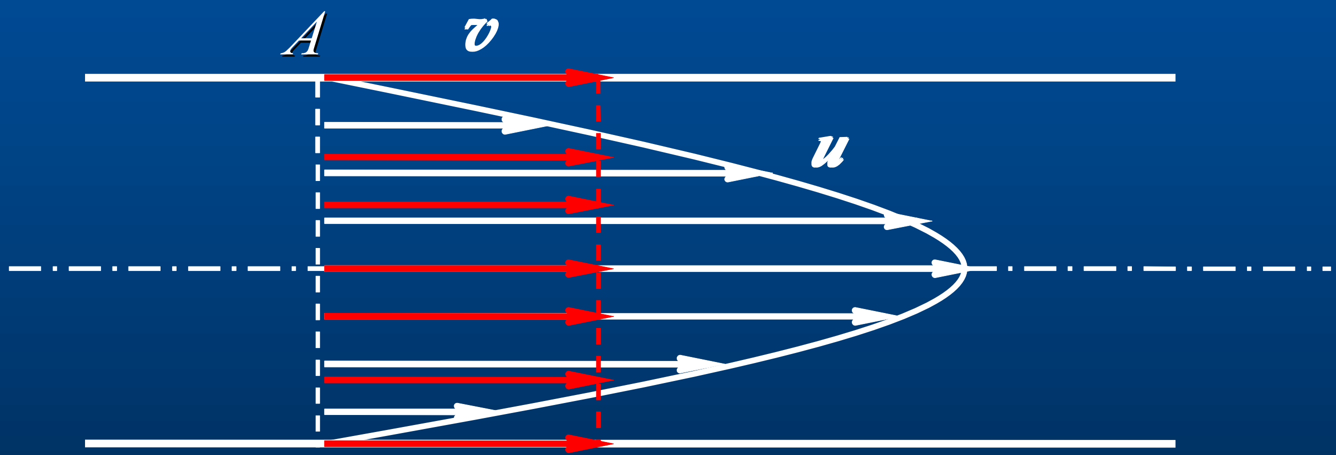
总流过水断面上各点的速度 u 一般是不相等的。

以管流为例，管壁处流速最小（为0），管轴处最大。为便于计算，设想过水断面上流速均匀分布，即各点流速相同，通过的流量与实际相同，于是定义 v 为该断面的断面平均流速（**mean velocity**），表示为

$$Q = \int_A u\mathrm{d}A = vA$$

或

$$v = \frac{Q}{A}$$



4.3 连续性方程（continuity equation）

流场中取一段总流，两端过水断面面积分别为A_1和A_2。

总流中任取一元流，两端过水断面面积分别为 dA_1 和 dA_2，流速分别为 u_1 和 u_2 。

考虑到：

（1）恒定流时，元流形状不变；

（2）连续介质，元流内部无间隙；

（3）流线性质，流管侧壁无液体流入流出。

根据质量守恒定律，单位时间内从dA_1流入液体的质量等于从dA_2 流出液体的质量，即

$$\rho_1 u_1 \ A_1 = \rho_2 u_2 \ A_2$$

对于不可压缩液体，有

$$\rho_1 = \rho_2$$

于是

$$u_1 \mathrm{d}A_1 = u_2 \mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}Q$$

对总流过水断面积分，得

$$\int u_1 \mathrm{d}A_1 = \int u_2 \mathrm{d}A_2 = Q$$

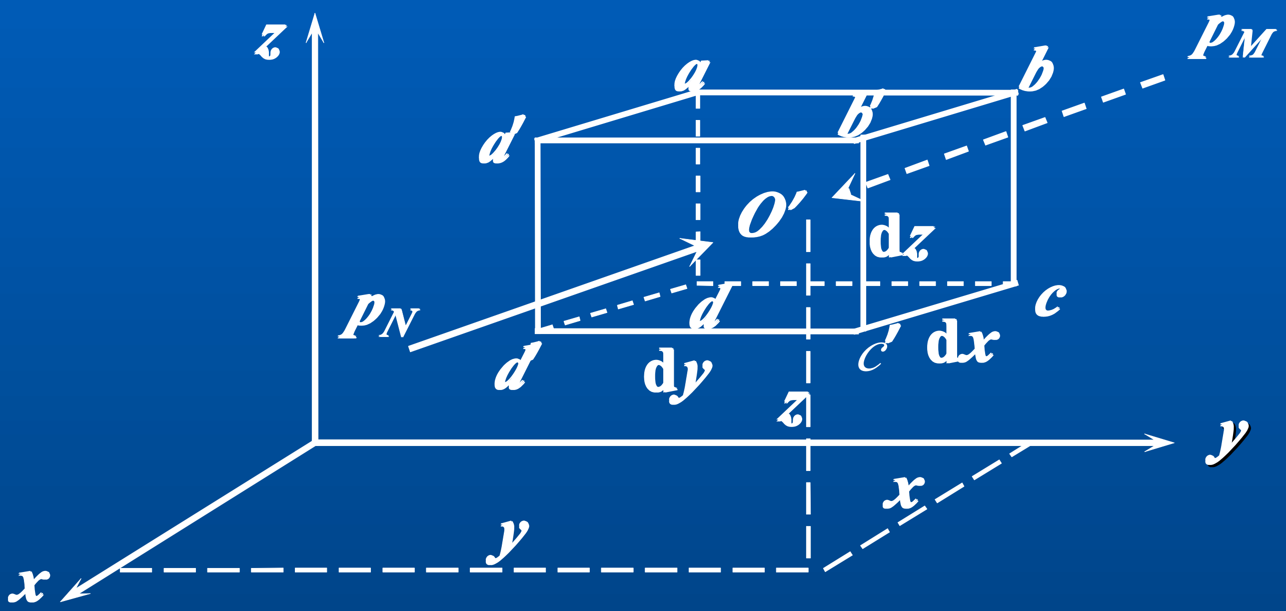
或 $Q_1 = Q_2$ 或 $v_1 A_1 = v_2 A_2$

上式是在总流沿程无分流或合流条件下得出的，若总流沿程流量有变化，则所有流量变化可表示为

$$\sum Q_{\text{流入}} = \sum Q_{\text{流出}}$$

连续性方程是质量守恒定律的水力学表达式。

4.4 理想液体运动微分方程



理想液体内取边长分别为dx,dy,dz的微元六面体，中心点$O'(x,y,z)$压强$p(x,y,z)$、流速$u(x,y,z)$。

根据牛顿第二定律，以x方向为例，分析微元六面体的受力和运动情况。

表面力：理想液体内，不存在切应力，只有压强。故除 ***abcd*** 与 ***a'b'c'd'*** 两面外，其余面上作用的压力在 ***x*** 轴上投影均为**0**。此两面中心点压强可用**Taylor**级数展开：

$$p_{\mathrm{M}} = p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x \qquad p_{\mathrm{N}} = p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$$

两个面上的总压力则为：

$$F_{\mathrm{PM}} = \left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad F_{\mathrm{PN}} = \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

质量力：***x***方向单位质量力与六面体总质量的乘积，即

$$F_{\mathrm{bx}} = X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

根据牛顿第二定律，*x*方向：

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{x}}}{\mathrm{d}t}$$

化简后得:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{x}}}{\mathrm{d}t}$$

同理得:

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{y}}}{\mathrm{d}t}$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}t}$$

上式即液体运动微分方程，由欧拉（**Euler)**于**1755**导出，又称欧拉运动微分方程。

欧拉方程的矢量表达式：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

若考虑粘性摩擦力，实际流体的动量方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nabla \bullet \tau_{ij}$$

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

动力粘性系数为常量，且为不可压缩流体：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\bullet\nabla\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{g}+\mu\nabla^{2}\vec{u}$$

4.5　理想液体运动微分方程的伯努利积分

将欧拉运动微分方程各式分别乘以流线上微元线段的投影 d*x*、d*y* 和 dz，然后相加

$$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{x}}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{y}}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z$$

4.5 理想液体运动微分方程的伯努利积分

引入限定条件：

（1）作用在液体上的质量力只有重力，即

$$X=Y=0,\ Z=-g$$

于是

$$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z=-g\mathrm{d}z$$

（2）不可压缩液体做恒定流动时

$$\rho = \text{const},\ p = p\,(x, y, z)$$

于是

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p=\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

（3）恒定流动时，流线与迹线重合

$$\mathrm{d}x = u_x\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y = u_y\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}z = u_z\mathrm{d}t$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z=u_x\mathrm{d}u_x+u_y\mathrm{d}u_y+u_z\mathrm{d}u_z$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right)=\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

将限定条件代回原方程

$$-g\mathrm{d}z-\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right)=\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

积分

$$-gz-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2g}=\mathrm{const}$$

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}=\mathrm{const}$$

或

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}$$

该式由瑞士物理学家伯努利于1738年推出，称伯努利方程。

伯努利 Daniel Bernoulli

1700年生于荷兰的格罗宁根，5岁同家人回迁瑞士的巴塞尔。782年，逝世于瑞士的巴塞尔，享年82岁。曾在巴塞尔等多所大学学习。1716年获艺术硕士学位；1721年又获医学博士学位。25岁为圣彼得堡科学院的数学院士。8年后回到瑞士的巴塞尔，先后任解剖学、植物学教授和物理学教授。

1738年出版了《流体动力学》一书，给出了流体动力学的基本方程，后人称之为"伯努利方程"。他还提出把气压看成气体分子对容器壁表面撞击而生的效应。1728年起，他和欧拉还共同研究柔韧而有弹性的链和梁的力学问题，还研究了弦和空气柱的振动。伯努利的贡献还涉及到医学、力学、数学等各个方面。

4.5.2 伯努利方程的意义

$$z=\frac{mgz}{mg}$$

单位重量液体所具有的位置势能，或位能；

某点到基准面的位置高度，或<u>位置水头</u>；

$$\frac{p}{\rho g}=h=\frac{mgh}{mg}$$

单位重量液体所具有的压强势能，或压能；

<u>*压强水头*</u>；

$$z+\frac{p}{\rho g}$$

<u>*单位重量液体所具有的总势能*</u>；

该点测压管液面的总高度，或<u>*测压管水头*</u>；

$$\frac{u^2}{2g}=\frac{1}{2}\frac{mu^2}{mg}$$

单位重量液体所具有的动能；

该点的流速高度，或<u>*流速水头*</u>(velocity head)；

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}$$

单位重量液体所具有的机械能；该点的<u>*总水头*</u>；

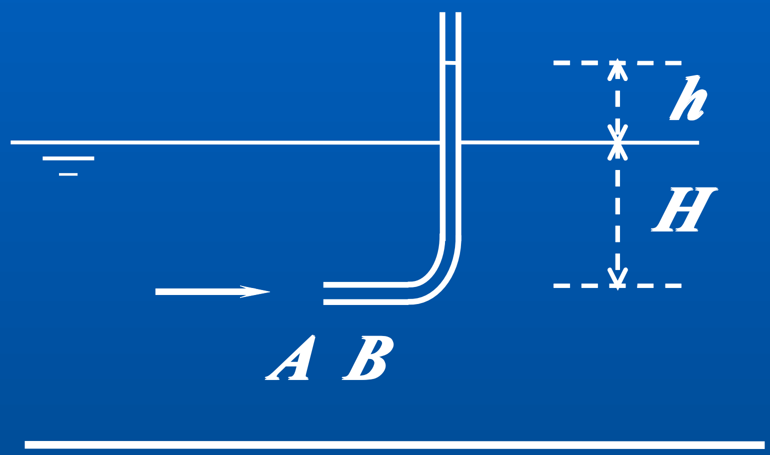
$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}=c$$

沿元流机械能守恒，故又称能量方程。

沿元流各点总水头相等，总水头线水平。

毕托管（Pitot tube）与流速水头

1730年法国工程师毕托用一根前端弯成直角的玻璃管测量塞纳河水的流速。



弯管前端迎向来流，水深H，入口前取A点，入口后取B点，水流进入弯管后上升至 h。

由于A、B两点距离很近，两点的机械能相等，即

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{u_A^2}{2g}=\frac{p_B}{\rho g}$$

或

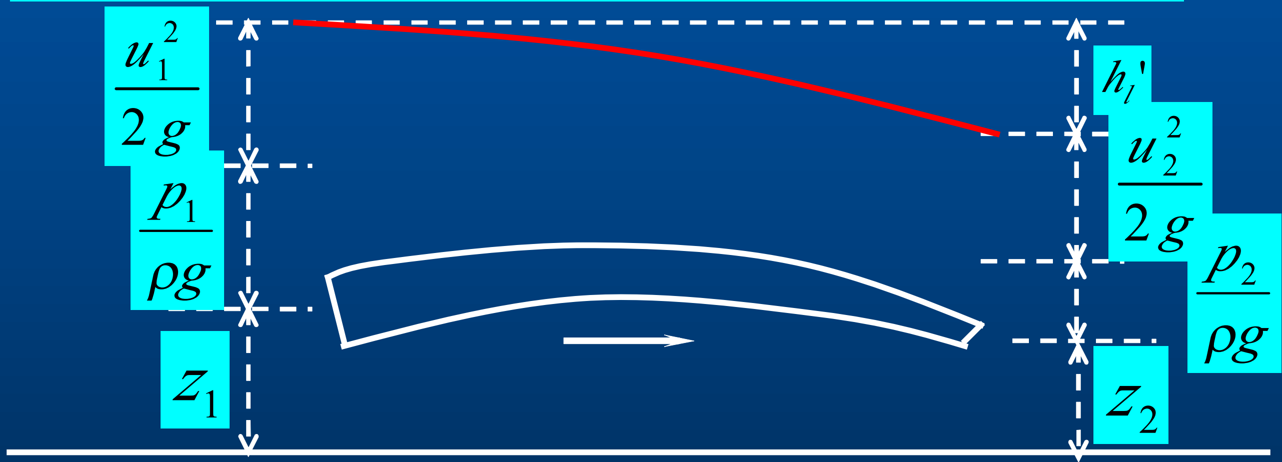
$$\frac{u_A^2}{2g}=\frac{p_B}{\rho g}-\frac{p_A}{\rho g}=h$$

由此可见，测速管（毕托管）与测压管之差即流速水头。

实际液体元流伯努利方程

实际液体具有黏滞性，流动阻力消耗机械能。单位重量流体所具有的机械能沿程减少，总水头线沿程下降。设 h_l' 为单位重量液体由过水断面**1-1**运动至**2-2**的机械能损失，或元流的水头损失，实际液体元流伯努利方程可为

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+h_l'$$

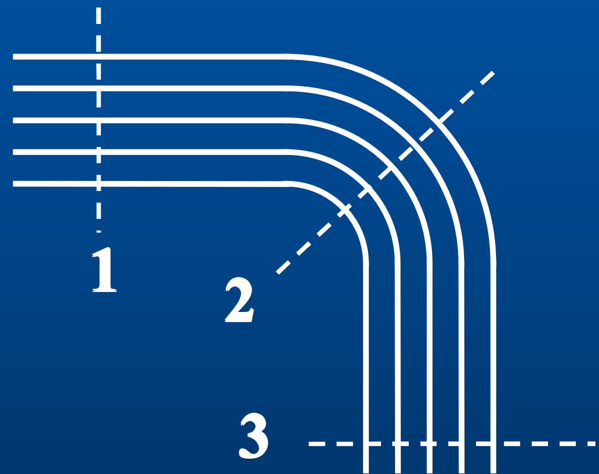


4.5.3 实际液体总流的伯努利方程

总流是元流的集合，不同的元流存在着不同的运动状态，因此将元流伯努利方程用于总流时必须考虑：

（1）在总流计算中，所取两计算断面必须为渐变流过水断面。在渐变流过水断面上，流线为直线或近似直线，质量力只有重力；表面力中虽有切应力，但该力与过水断面垂直，投影为零。可以认为动水按静水压强规律分布，即

$$z+\frac{p}{\rho g}=c$$



而在急变流过水断面上，由于流线有圆弧运动，质量力除重力外，还有惯性力，故无上式的关系。

（2）由于总流过水断面上各点流速不同，若用断面平均流速 v 取代各点的真实流速 u，必须考虑用二者计算动能存在的差异。为此，引入动能修正系数 α 予以修正

$$\int \frac{u^2}{2g}\rho g u \mathrm{d}A = \int \frac{u^2}{2g}\rho g u \mathrm{d}A = \frac{\alpha v^2}{2g}\rho g v A$$

$$\alpha = \frac{\int_A u^3 \mathrm{d}A}{v^3 A}$$

α 值取决于断面流速分布，通常取 $\alpha = 1$。

（3）由于总流过水断面上各点流速不同，因此每个元流所消耗的机械能也不同。实用中，用总流单位重量液体 1-1 断面和 2-2 断面间的平均机械能损失或水头损失 h_l 取代元流的水头损失 h_l'。

得实际液体总流的伯努利方程

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_l$$

或总流能量方程。

总流伯努利方程的适用条件

由于在总流伯努利方程推导过程中使用了若干限定条件，因此在使用总流伯努利方程时，首先要满足这些条件：

恒定流动；

质量力只有重力；

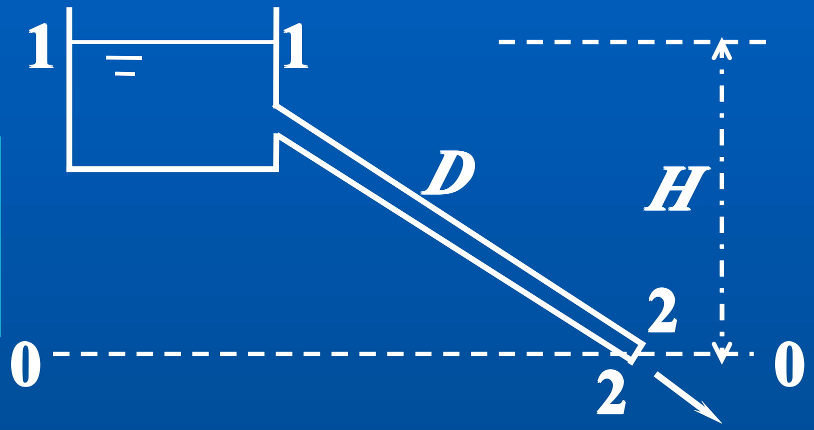
不可压缩流体；

渐变流过水断面；

两断面间无分流或合流；

两断面间无能量输入或输出。

【例 1】用直径 D = 100mm 的水管自开口水箱引水。水箱水面与管道出口断面中心的高差 H = 4m 且保持恒定，水头损失 h_l = 3m。求管道流量 Q。



【解】由总流伯努利方程

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_l$$

1.选取基准面 0-0；

2.选取计算断面 1-1 和 2-2；

$z_1=H$，$z_2=0$；$p_1=0$，$p_2=0$；$v_1=0$，v_2 待求；令 $\alpha=1$。

$$H=\frac{v_2^2}{2g}+h_l$$

$$v_2=\sqrt{2g(H-h_l)}=\sqrt{2\times 9.8m/s^{-2}(4-3)m}=4.43\ \mathrm{m/s}$$

$$Q=v_2A_2=4.43m/s(3.14\times 0.1m^2/4)=0.035\ \ \mathrm{m^3/s}$$

【例 2】离心泵由水池抽水。已知泵的安装高度为 H_s=5m，泵的抽水量 Q = 5.56 L/s，泵的吸水管直径 D =100mm，吸水管的水头损失 h_l = 0.25mH_2O。试求水泵进口处的真空度。

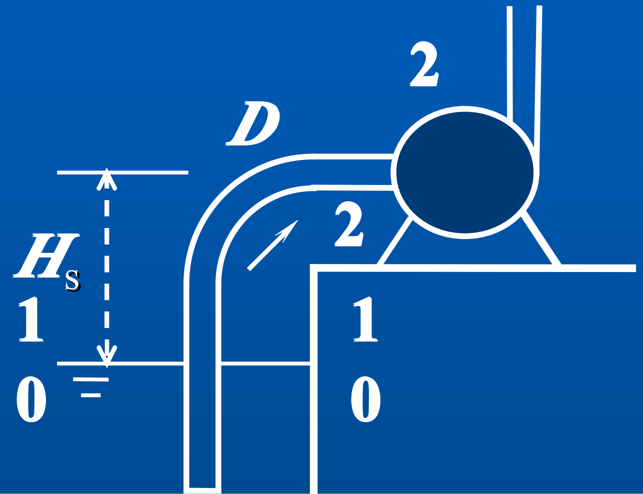
【解】由伯努利方程

1.取基准面0-0；

2.取计算断面1-1，2-2；

$z_1 = 0$，$z_2 = H_s$；$p_1 = p_a$，p_2待求。

$v_1 = 0$，v_2 可求；令 α =1。



$$\frac{p_a}{\rho g} = H_s + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_l$$

$$v = \frac{Q}{A_2} = \frac{5.56\times10^{-3}\,m^3/s}{3.14(0.1m)^2/4} = 0.708\ \mathrm{m/s}$$

$$\frac{p_v}{\rho g} = \frac{p_a - p_2}{\rho g} = H_s + \frac{v_2^2}{2g} + h_l = 5m + \frac{(0.708m/s)^2}{2(9.8)} + 0.25m = 5.28\ \mathrm{m}$$

$$p_v = 5.28m(9800N/m^3) = 51740\ \mathrm{Pa}$$

【例 3】文丘里（Venturi）流量计。已知进口直径 D_1 =100mm，喉管直径 D_2 = 50mm，测压管水头差 h = 0.6m（或水银差压计液面差 h_m= 4.76cm），流量系数 μ =0.98，试求输水流量。

【解】由伯努利方程

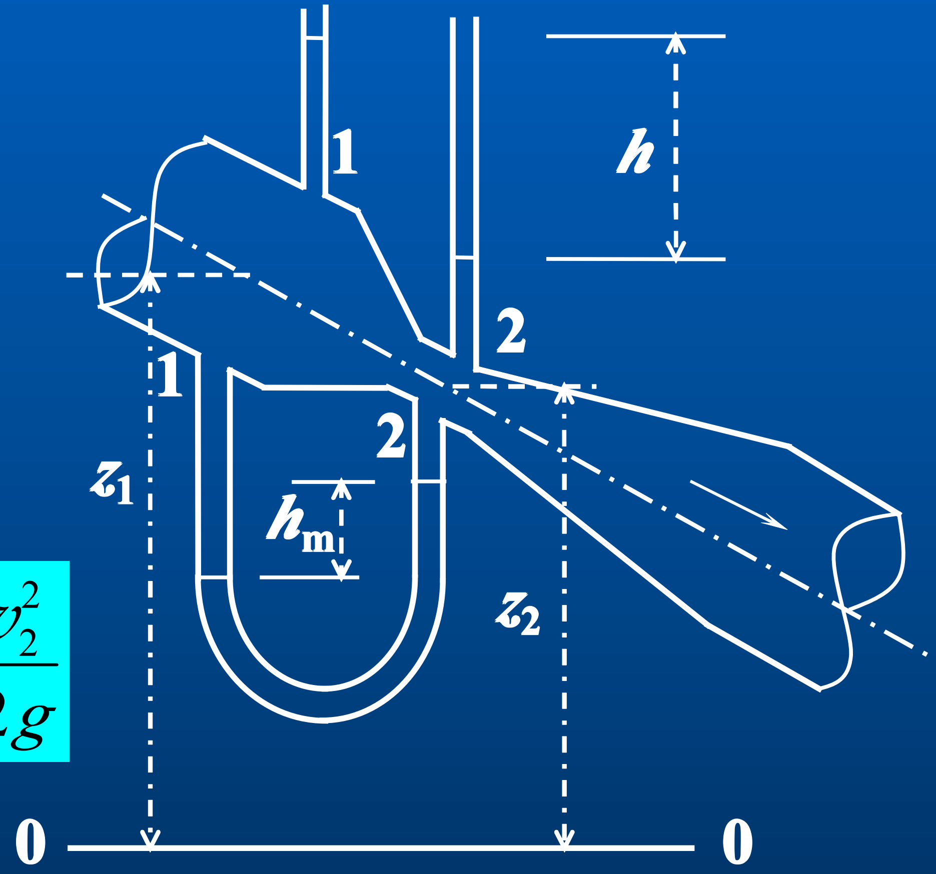
1.取基准面0-0；

2.取计算断面1-1，2-2；

水头损失忽略不计，则列伯努利方程

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}$$

令 $\alpha=1$。



再将连续性方程 $v_1 A_1 = v_2 A_2$ 与上式联立求得

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(D_1 / D_2\right)^4 - 1}} \sqrt{2g} \sqrt{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)}$$

令仪器常数为 K

$$K = \frac{\frac{1}{4}\pi D_1^2}{\sqrt{\left(D_1 / D_2\right)^4 - 1}} \sqrt{2g} = 0.009 m^{2.5} / s$$

于是，流量为

$$Q = \mu K \sqrt{\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)} = \mu K \sqrt{h} = 0.98(0.009 m^{2.5} / s)\sqrt{0.6m} = 6.38 \ \mathrm{L/s}$$

或 $Q = \mu K \sqrt{12.6 h_{\mathrm{m}}} = 6.38 \ \mathrm{L/s}$

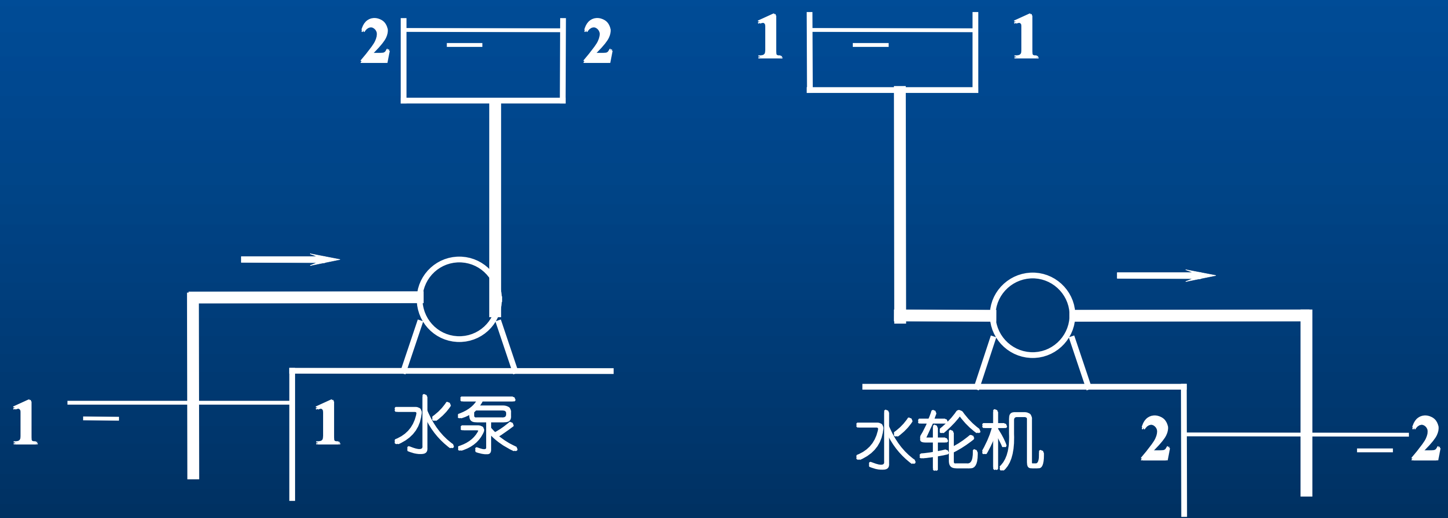
4.5.4 有能量输入或输出的伯努利方程

总流伯努利方程是在无能量输入或输出的前提下导出的，若有能量输入或输出，方程需作修改，即

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\pm H_{\mathrm{m}}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_l$$

式中 $+H_m$ 单位重量流体获得的机械能，如水泵的扬程；

$-H_m$ 单位重量流体失去的机械能，如水轮机的水头。



4.6 动量方程

动量方程是质点系动量定理的水力学表达式。

设恒定总流，过水断面1-1、2-2面积分别为A_1和A_2，与总流侧面所围空间称为控制体。经 dt 时间，控制体内液体由1-2运动到1′-2′。

总流内任取元流，过水断面面积dA_1和dA_2，流速分别为 u_1 和 u_2 。经 dt 时间，元流的动量增量为：

$$\mathrm{d}\vec{K}=\vec{K}_{1'-2'}-\vec{K}_{1-2}=\left(\vec{K}_{1'-2}+\vec{K}_{2-2'}\right)_{t+dt}-\left(\vec{K}_{1-1'}+\vec{K}_{1'-2}\right)_{t}$$

恒定流动，dt 前后元流重叠部分动量相同，故

$$\mathrm{d}\vec{K}=\vec{K}_{2-2'}-\vec{K}_{1-1'}=\rho_2 u_2 \mathrm{d}t\mathrm{d}A_2\vec{u}_2-\rho_1 u_1 \mathrm{d}t\mathrm{d}A_1\vec{u}_1$$

对于不可压缩液体，密度等于常数。若以断面平均流速 v 代替真实流速 u，需引入动量修正系数 β。于是根据质点系动量定理

$$\sum \vec{F}\mathrm{d}t = \sum \mathrm{d}\vec{K} = \rho \mathrm{d}tQ\left(\beta_2 \vec{v}_2 - \beta_1 \vec{v}_1\right)$$

得恒定总流动量方程

$$\sum \vec{F} = \rho Q\left(\beta_2 \vec{v}_2 - \beta_1 \vec{v}_1\right)$$

若总流两断面间有分流或合流，总流动量方程可为

$$\sum \vec{F} = \sum\left(\rho Q \beta \vec{v}\right)_{流出} - \sum\left(\rho Q \beta \vec{v}\right)_{流入}$$

【例4】水平输水弯管。直径由 D_1 = 200mm经 $\alpha = 60°$ 转角变为D_2 = 150mm。已知转弯前断面的表压强 p_1= 18 kPa，输水流量Q = 0.1 m³/s，不计水头损失，求水流对弯管的作用力。

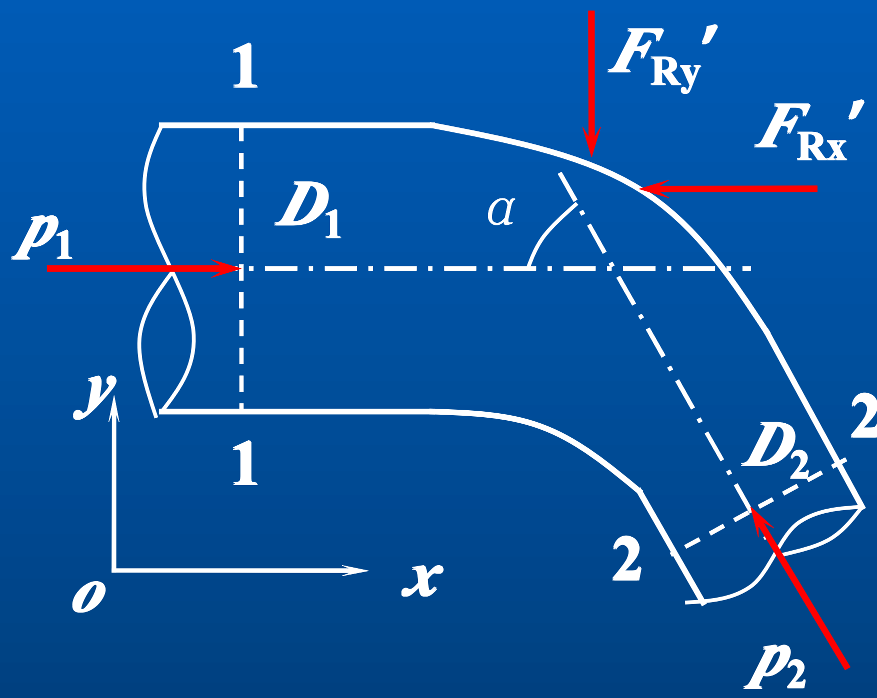
【解】

1.取控制体；

2.取坐标系；

3.找出控制体上所受外力；

4.将动量方程分别投影在不同的坐标轴上，即



$$F_{P1} - F_{P2}\cos 60 - F'_{Rx} = \rho Q(\beta_2 v_2 \cos 60 - \beta_1 v_1)$$

$$F_{P2}\sin 60 - F'_{Ry} = \rho Q(-\beta_2 v_2 \sin 60 - 0)$$

上式中 $$F_{\mathrm{P1}} = p_1 A_1 = 18000 N/m^2 \times \frac{\pi}{4} \times (0.2m)^2 = 565\ \mathrm{N}$$

$F_{\mathrm{P2}} = p_2 A_2$ 中的 p_2 需通过列1-2断面间的伯努利方程求得。

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = 7.043\ \mathrm{kPa}$$

其中 $$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = 3.18\ \mathrm{m/s}$$ $$v_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = 5.66\ \mathrm{m/s}$$

将各量代入动量方程，得弯管对水流的作用力为

$$F'_{\mathrm{Rx}} = 538\ \mathrm{N} \qquad F'_{\mathrm{Ry}} = 597\ \mathrm{N}$$

水流对弯管的作用力与弯管对水流的作用力大小相等方向相反

$$F_{\mathrm{Rx}} = 538\ \mathrm{N} \qquad F_{\mathrm{Ry}} = 597\ \mathrm{N}$$

【例5】水平分岔管。干管直径 D_1 = 600mm，分岔角 θ = 30°，支管直径D_2 = 400mm，分岔前断面的表压强 p_1= 70 kPa，总流量Q = 0.6 m³/s，不计水头损失，求水流对分岔管的作用力。

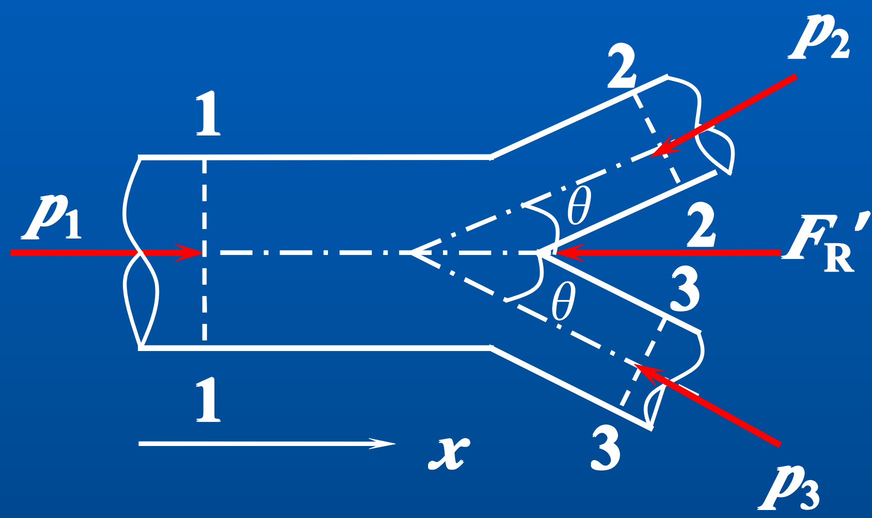
【解】

1.取控制体；

2.取坐标系；

3.找出控制体上所受外力；

4.将动量方程分别投影在坐标轴上，即



$$F_{P1} - F_{P2}\cos 30 - F_{P3}\cos 30 - F_R' = \rho \frac{Q}{2} v_2 \cos 30 + \rho \frac{Q}{2} v_3 \cos 30 - \rho Q v_1$$

或者

$$F_R' = F_{P1} - 2F_{P2}\cos 30 - \rho Q\left(v_2 \cos 30 - v_1\right)$$

上式中 $F_{P1}=p_1A_1=70000N/m^2\times\frac{\pi}{4}\times(0.6m)^2=19780\ \text{N}$

而p_2 (p_3)则需通过列1-2(1-3)断面间的伯努利方程求得。

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{4Q}{\pi D_1^2}=2.12\text{m/s}$$

$$v_2=v_3=\frac{4Q}{\pi D_2^2}=2.39\text{m/s}$$

$$p_2=p_1+\rho\frac{v_1^2-v_2^2}{2}=70kPa+1000kg/m^3\,\frac{2.12^2-2.39^2}{2}\,m^2s^{-2}=69.4\ \text{kPa}$$

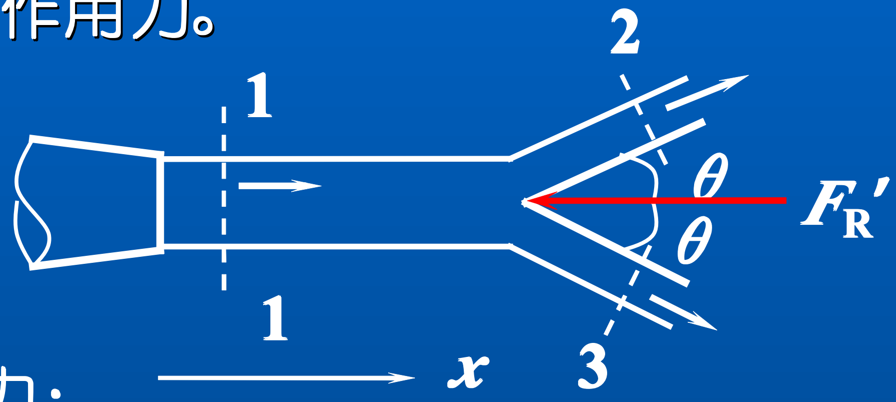
将各量代入动量方程，得分岔管对水流的作用力为

$$F_R'=4720\ \text{N}$$

水流对分岔管的作用力与分岔管对水流的作用力大小相等方向相反

$$F_R=4720\ \text{N}$$

【例 6】水平射流。狭缝出口流速为 v_1，单宽流量为 q，射流冲击到与其成 2θ 角的光滑壁面上。若不计水流与壁面的摩擦，求水流对壁面的作用力。



解：

1、取控制体；

2、取坐标系；

3、找出控制体上所受外力；

4、将动量方程分别投影在坐标轴上，即

$$-F_R' = \rho\frac{q}{2}v_2\cos\theta + \rho\frac{q}{2}v_3\cos\theta - \rho q v_1$$

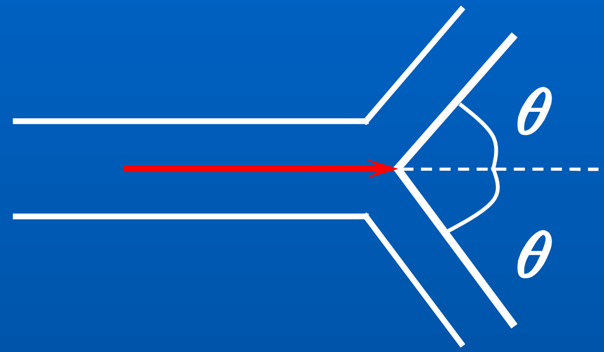
列1-2(1-3)断面间的伯努利方程，得 $v_1 = v_2 = v_3$

于是上式为

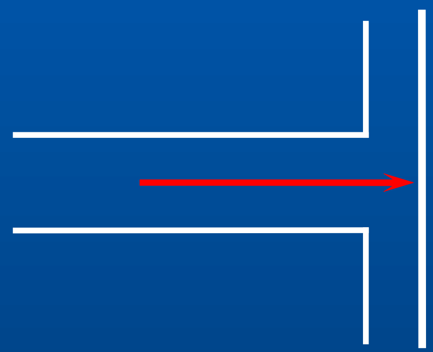
$$F_R' = \rho q v(1-\cos\theta)$$

水流对壁面的作用力为 $F_{\mathrm{R}} = \rho q v(1-\cos\theta)$

$\theta = 60$ 时，$F_{\mathrm{R}} = \dfrac{1}{2}\rho q v$



$\theta = 90$ 时，$F_{\mathrm{R}} = \rho q v$



$\theta = 180$ 时，$F_{\mathrm{R}} = 2\rho q v$