第五章 电磁波的辐射（8课时）

节次	节　　名	小节标题
5.1	电磁势及其方程	电磁势的引入，规范变换，规范不变性、规范不变量和规范场，电磁势满足的微分方程
5.2	推迟势	推迟势解，洛伦茨条件的检验
5.3	谐振荡电流的电磁场	电荷和电流密度的傅里叶积分表示，谐振荡场源的电磁场，近区、远区和小场源近似，辐射电磁场及其特性，辐射功率及其角分布
5.4	电偶极、磁偶极和电四极辐射	电偶极辐射，磁偶极辐射，电四极辐射，任意时变电流的辐射场
5.5	天线的辐射	沿天线的电流分布，天线的辐射，短天线的辐射，半波天线的辐射

- 由给定时变场源计算辐射电磁场并分析辐射场的基本性质
- 不显含场源和显含场源电磁场问题在解法上的区别：前者直接求解电磁场(第四章)，后者直接求解电磁势，再由电磁势算电磁场
- 电磁势的引入及推迟势解
- 限于时谐辐射场，其结果可以直接推广至任意时变场源的辐射场
- 使用泰勒展开和张量分析工具导出各类辐射场解

一 电磁势的引入

先挑出麦克斯韦方程中的两个齐次方程（不显含场源）：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \qquad (5.1.2) \qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad (5.1.3)$$

能否通过因变量变换使之自动满足？

由式(5.1.3)可引入矢势$\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (5.1.6)$$

代入式(5.1.2)得

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0$$

从而可针对$(\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ 引入标势φ：

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad (5.1.7)$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\end{cases}$$

- $\boldsymbol{A}$ 和 φ 统称为电磁势
- 电场表达式：无旋场＋涡旋场

二　规范变换

- 意识到电磁势的不确定性：对应同一电磁场的电磁势有无穷多种选择
- 充分利用这种不确定性简化电磁势微分方程

规范变换：

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi & (5.1.8) \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\psi}{\partial t} & (5.1.9) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{B}' = \nabla\times\boldsymbol{A}' = \nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \nabla\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi = -\nabla\varphi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E}$$

1. 一组或一类（$\boldsymbol{A}$，φ）称为一种规范
2. 任何一种规范由外加给电磁势的附加条件规定,该条件称为规范条件
3. 规范不变性和规范不变量
4. 任何可测物理量必须具有规范不变性

三 电磁势满足的微分方程

考察麦克斯韦方程中的两个非齐次方程（显含场源）：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0 \qquad (5.1.1)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j} \qquad (5.1.4)$$

将 $\begin{cases}\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\end{cases}$ 代入上述两式分别求得

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\rho/\varepsilon_0 \qquad (5.1.10)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{j} \qquad (5.1.11)$$

后式推导中用到 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

- 上述关于$\boldsymbol{A}$ 和 φ 的方程彼此耦合，不便求解
- 设法通过选择规范使之去耦

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\rho/\varepsilon_0 \qquad \nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{j}$$

1. 库仑规范 — 满足如下库仑条件的规范：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{5.1.15}$$

$$\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon_0, \qquad \nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t}$$

库仑规范的可行性. 若$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=g\neq 0$, 可通过如下规范变换得$\boldsymbol{A}'$，使$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'=0$：

【说明】 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{A}'=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla^2\psi=0 \Rightarrow \nabla^2\psi=-g$

a) 标势解同静电场，为库仑势，故称库仑规范

b) 标势解与因果率：我们最终关心电磁场而非电磁势，前者满足因果率

c) 矢势微分方程的源项：实际电流 $\boldsymbol{j}$ 减去“纵向电流”或“无旋电流”

$\boldsymbol{j}_L$：$\boldsymbol{j}_L=\dfrac{1}{\mu_0 c^2}\dfrac{\partial\nabla\varphi}{\partial t}=\nabla\dfrac{\partial(\varepsilon_0\varphi)}{\partial t},\ \nabla\times\boldsymbol{j}_L=0 \Rightarrow \boldsymbol{j}_T=\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}_L,\ \nabla^2\boldsymbol{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{j}_T$

（参见：**J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2004, p.241-242.**）

d) 磁矢势满足库仑条件 ⇨ $\nabla\cdot\boldsymbol{j}_T=0$ ⇨ $\nabla\cdot\boldsymbol{j}_L+\partial\rho/\partial t=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{j}_L=0$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\rho/\varepsilon_0 \qquad \nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{j}$$

2. 洛伦茨规范 —— 满足如下洛伦茨条件的规范：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \qquad (5.1.12)$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon_0,\ (5.1.13) \qquad \nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{j} \quad (5.1.14)$$

洛伦茨规范的可行性： $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=f\neq 0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{A}'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}=0$

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi,\quad \varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}: \qquad \nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-f$$

【说明】 a) 标势和矢势同满足达朗贝尔方程，便于统一求解

b) 可直接给出符合因果率的推迟势解，便于物理分析

c) 便于狭义相对论电动力学中的数学分析（参见第八章）

d) 满足洛伦茨条件的达朗贝尔方程的解才是电磁势解

e) 本教材将使用洛伦茨规范（常被误称为“洛伦兹规范”）

中心任务：求解达朗贝尔方程得电磁势

简化措施：无限空间 — 避免边界条件带来的复杂性

正则条件 — 只保留自有限场源发出的电磁波，使解唯一

一 推迟势解

解法要点：1. 先计算点源解，后叠加得连续场源解；

2. 先求标势解，后通过类比写出矢势解

3. 验证洛伦茨条件，确认达朗贝尔方程的解为电磁势解

写下标势满足的达朗贝尔方程：

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon_0, \tag{5.2.1}$$

考察位于$\mathbf{r}'$、体积为dV' 的电荷元： $Q(t)=\rho(\mathbf{r}',t)dV'$ (5.2.2)

其体电荷密度为： $\rho(\mathbf{r},t)=Q(t)\delta(r-\mathbf{r}')$ (5.2.3)

其电势φ'满足：

$$\nabla^2\varphi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}=-Q(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/\varepsilon_0 \tag{5.2.4}$$

$$\nabla^2\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} = -Q(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/\varepsilon_0 \qquad (5.2.4)$$

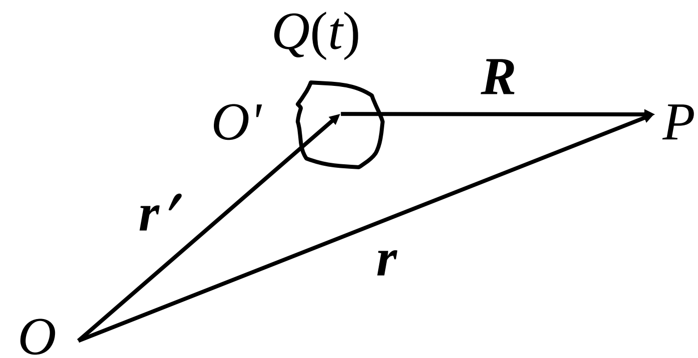

图5—1

实施坐标变换：将原点由O移至电荷元O'处

$$\mathbf{r} \to \mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}' \qquad (5.2.5)$$

在新坐标系(R, θ, ϕ)中，$\varphi' = \varphi'(R,t)$，满足

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\mathbf{R}) \qquad (5.2.6)$$

因变量变换：

$$\varphi'(R,t) = u(R,t)/R \qquad (5.2.8)$$

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial R} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R^2}, \quad \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi'}{\partial R}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial u}{\partial R} - u\right) = \frac{\partial u}{\partial R} + R\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{\partial u}{\partial R} = R\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}$$

$$(5.2.6) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{R}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\mathbf{R}) = \begin{cases} 0, & R \neq 0; \\ 0, & R = 0. \end{cases}$$

意外收获：u 非奇异，满足一维齐次达朗贝尔方程！

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \quad (5.2.9) \Longrightarrow u(R,t)=f\left(t-\frac{R}{c}\right)+g\left(t+\frac{R}{c}\right) \quad (5.2.4)$$

原方程：

$$\nabla^2\varphi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}=-Q(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/\varepsilon_0 \quad (5.2.6)$$

f 和 g 的确定：

1. 由无限空间的发散波解条件得 $g=0$;
2. 回到原方程确定 f

【问题】原方程(5.2.6)已用来推导(5.2.9)，为何再次使用？

【回答】方程(5.2.6)和(5.2.9)不完全等效，前者包含更多物理信息。

【步骤】式(5.2.6)在如下积分意义上成立（δ函数的性质）：

$$\iiint\limits_{R\le\xi}\left(\nabla^2\varphi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}\right)dV=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\iiint\limits_{R\le\xi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi'=\frac{f}{R} \Longrightarrow \nabla^2\varphi'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}=f\boxed{\nabla^2\frac{1}{R}}+2\nabla f\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla^2 f-\frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\boxed{-4\pi\delta(\mathbf{R})} \Longrightarrow f(t)=Q(t)/(4\pi\varepsilon_0)$$

$$f(t)=\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{4\pi\varepsilon_0}dV'$$

$$\varphi'(\mathbf{r},t)=\frac{1}{R}f\left(t-\frac{R}{c}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}Q\left(t-\frac{R}{c}\right)dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)dV'$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon_0$$

$$\Longrightarrow\quad \varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R}dV' \qquad (5.2.13)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{j}$$

$$\Longrightarrow\quad \boldsymbol{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R}dV' \qquad (5.2.15)$$

推迟势解的物理意义：电磁相互作用以有限速度 c 传播；任意考察点在 t 时刻的电磁场取决于前一个时刻$(t-R/c)$场源的状态

二 洛伦茨条件的检验

对$\mathbf{r}'$的积分或对$\mathbf{r}$的微分均固定t而非t'！

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{R}dV',\quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{R}dV',\quad t'\equiv t-\frac{R}{c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\mathbf{r}',t')dV',\qquad \nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\nabla\cdot\left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{R}\right]dV'$$

$$\nabla\cdot\left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{R}\right]=\frac{1}{R}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'}\cdot\nabla t'+\mathbf{j}\cdot\nabla\frac{1}{R},\qquad \nabla t'=-\nabla't',\qquad \nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\frac{1}{R}$$

$$\mathbf{j}\cdot\nabla\frac{1}{R}=-\mathbf{j}\cdot\nabla'\frac{1}{R}=-\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right)+\frac{1}{R}\nabla'\cdot\mathbf{j}=-\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right)+\frac{1}{R}(\nabla'\cdot\mathbf{j})_{t'}+\frac{1}{R}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t'}\cdot\nabla't'$$

$$\nabla\cdot\left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{R}\right]=-\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right)+\frac{1}{R}(\nabla'\cdot\mathbf{j})_{t'}=-\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{j}}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=-\oint_S\frac{\mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{R}-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\mathbf{r}',t')dV'=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

证毕

中心任务：从推迟势公式出发积分求电磁势和电磁场

积分难点：积分变量 $\boldsymbol{r}'$ 出现于分母和推迟因子的 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$之中

处理方法：限于时谐场源，采用泰勒展开（远场近似）

一　电荷和电流密度的傅里叶积分表示

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\omega(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}d\omega,\qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}d\omega \tag{5.3.1}$$

,

- 为将分析限于时谐场源的做法的正当性提供理论依据
- 为将时谐场源的结果推广至任意时变场源奠定数学基础

二　谐振荡场源的电磁场

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t},\quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\varphi=\varphi_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t},\qquad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.3.6}$$

$$\varphi_0(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho_0(\boldsymbol{r}')e^{\mathrm{i}kR}}{R}dV', \tag{5.3.7}$$

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')e^{\mathrm{i}kR}}{R}dV',\quad k=\frac{\omega}{c} \tag{5.3.8}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad (5.3.6) \qquad \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')e^{\mathrm{i}kR}}{R}dV' \qquad (5.3.8)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{j}-\mathrm{i}\omega\rho=0 \Rightarrow \rho=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\cdot\boldsymbol{j}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{A}-i\omega\varphi/c^2=0 \Rightarrow \varphi=-\frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j} \Rightarrow \nabla\times\boldsymbol{B}+\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\mu_0\boldsymbol{j} \Rightarrow \boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}(\nabla\times\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{j})$$

【说明】

1. 只需给定电流密度 j 和计算矢势 A，便可通过简单矢量微分算得所有电磁学量
2. 相因子e^{ikR}体现了推迟效应
3. 下一步目标：在远场近似（$r'/r << 1$）下，借助泰勒展开简化被积式中的（$1/R$）；在小场源近似（$kR << 1$）下, 借助泰勒展开简化被积式中的相因子e^{ikR}

三　近区、远区和小场源近似

1. 小参数的引入 — 每两个具相同量纲的特征参数之比

系统特征长度参数：

- 场源尺寸：l 或 r'
- 波长：λ 或 $1/k$
- 考察距离：R 或 r

2. 近区电磁场

近区近似：$R << \lambda$；　　小参数：R/λ 或 kR

泰勒展开：$e^{ikR} \approx 1$

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_0(\mathbf{r}')e^{ikR}}{R}dV' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\mathbf{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \dfrac{\rho(\mathbf{r}',t)}{R}dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\iiint \dfrac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{R}dV' \end{array} \right. \quad (5.3.9)$$

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')e^{ikR}}{R}dV' \Rightarrow$$

准静态近似：完全忽略推迟效应(类比似稳电路)

3. 远区辐射场

辐射场近似：略去 $(r'/r)^n$ $(n>1)$ 小项, 维持总电磁能流有限

a) 对$1/R$做泰勒展开（小参数：l/R 或 r'/r），只保留至$O(1/r)$级项：

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}'+\cdots\approx\frac{1}{r}$$

b) 对相因子e^{ikR}中的 kR 做泰勒展开（小参数r'/r），只保留至$O(1)$级项：

$$R\approx r+\boldsymbol{r}'\cdot(\nabla' R)_{r'=0}+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}':(\nabla'\nabla' R)_{r'=0}\approx r-\boldsymbol{r}'\cdot\nabla r+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}':\nabla\nabla r$$

$$\approx r-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}'+\frac{1}{2r}[r'^2-(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}')^2]\approx r-\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}'$$

$$kR\approx kr-k\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}'\approx kr-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}',\quad(\boldsymbol{k}\equiv k\boldsymbol{e}_r),\quad e^{\mathrm{i}kR}\approx e^{\mathrm{i}kr}e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$$

理由：$\boldsymbol{E}\propto\nabla e^{\mathrm{i}p(r)}=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}p(r)}dp/dr,\quad p=ar+b+c/r\approx ar+b$

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')e^{\mathrm{i}kR}}{R}dV' \Rightarrow \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\iiint\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}dV' \quad (5.3.14)$$

分母r与主相因子e^{ikr}一道被提出积分号；次相因子$e^{-ik\cdot r'}$留在被积式中

4. 小场源—远区辐射场近似

小场源近似：$l << \lambda$（同时有 $l << R$，以实现辐射场近似）

小参数：l/λ 或 kr'

将次相因子做泰勒展开

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}dV' \quad (5.3.14)$$

$$e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'} \approx 1 - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}' - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')^2 + \cdots \quad (5.3.15)$$

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV' - \frac{\mathrm{i}\,\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\boldsymbol{k}\cdot\iiint \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV' \quad (5.3.16)$$

两个积分分别对应电流密度分布的零阶矩和一阶矩。下节将证明：

- 电流密度各阶矩对应高出一阶的电荷密度矩和同阶磁矩
- 第一项（电流密度零阶矩）：电偶极辐射(无零阶磁矩即磁单极子)
- 第二项（电流密度一阶矩）：电四极和磁偶极辐射
- 被略去的项：更高极辐射

5. 小场源近似与非相对论近似（低速运动近似）

$$v \sim \omega l \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}' \sim kl = \omega l / c \sim v / c << 1$$

小结1：如何由推迟矢势推出时谐小场源的辐射场矢势

推迟势：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}dV'$$

时谐小场源的远区辐射场：

$$\begin{cases}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}, \qquad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}\\ \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\iiint\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'-\frac{\mathrm{i}\,\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\boldsymbol{k}\cdot\iiint\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'\end{cases}$$

限于时谐场：

$$e^{-\mathrm{i}\omega t}\ \rightarrow\ e^{-\mathrm{i}\omega(t-R/c)}=e^{-\mathrm{i}\omega t}e^{\mathrm{i}kR}$$

辐射场近似（只保留至1/r）：

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}'+\cdots\approx\frac{1}{r}$$

$$kR\approx kr-k\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}'\approx kr-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}', \qquad (\boldsymbol{k}\equiv k\boldsymbol{e}_r)$$

$$e^{\mathrm{i}kR}=e^{\mathrm{i}kr}e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$$

小场源近似（$kr'<<1$）：

$$e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\approx 1-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'$$

小结2：与电多极子静电场推导过程比较

静电场：

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}+\frac{1}{2r^3}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}:\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r\right) \qquad (2.4.7)$$

辐射场：

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'-\frac{\mathrm{i}\,\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\boldsymbol{k}\cdot\iiint \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV' \qquad (5.4.1)$$

比较内容	静电场	辐射场
小参数	$r'/r\ (\lambda\to\infty)$	$r'/r,\ r'/\lambda$
展开物理量	φ	$\boldsymbol{A}_0$
展开$1/R$	多极子静电场	$1/r$
展开相因子	—	多极子辐射场
求矩对象	电荷密度分布	电流密度分布
电磁势与 r 的关系	$\propto 1/r^n,\ n\ge 1$	$\propto 1/r$

四　辐射电磁场及其特性

- 电磁场（时谐）的计算 — 与传播问题的区别

➢ 传播问题：直接计算电磁场，先计算电场，再由电场计算磁场

➢ 辐射问题：先计算电磁矢势，再计算磁场，再由磁场计算电场

- 辐射电磁场计算中的矢量微分运算

辐射场的总能流非零，只需保留电磁场与径向距离 r 成反比的项

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}=\frac{\mu_0}{4\pi r}e^{\mathrm{i}kr}e^{-\mathrm{i}\omega t}\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}dV' \tag{5.3.14}$$

$$\nabla\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}}{r}\right)=e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\nabla e^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}'}=-\frac{1}{r^2}e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\boldsymbol{e}_r-\frac{\mathrm{i}k}{r}\nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}\right)$$

$$\nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}\right)=\frac{\nabla\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\boldsymbol{r}'}{r}-\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{r}'}{r}\boldsymbol{e}_r\propto\frac{1}{r},$$

$$\nabla e^{\mathrm{i}kr}=\nabla e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\,e^{\mathrm{i}kr}\quad\Longrightarrow\quad\nabla\rightarrow\mathrm{i}\boldsymbol{k}$$

● 辐射电磁场的表达式

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A} \tag{5.3.17}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}c^2}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}c}{k}\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}=-\frac{c}{k}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r \tag{5.3.18}$$

1. 辐射电磁场为球面电磁波：$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \propto [\exp(\mathrm{i}kr-\mathrm{i}\omega t)]/r$

$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{k}$ 之间满足右手正交关系：

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=-\frac{c}{k}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\frac{c}{k}(B^2\boldsymbol{k}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}))=\frac{cB^2}{k}\boldsymbol{k}$$

2. 球面波不是（严格意义上的）横波！

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \Rightarrow \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\approx 0; \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \Rightarrow \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}\approx 0$$

3. 辐射场及其能流密度通过次相因子与传播方向（θ, ϕ）有关：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t}=\frac{\mu_0}{4\pi r}e^{\mathrm{i}kr}e^{-\mathrm{i}\omega t}\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\boxed{e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}}dV' \tag{5.3.14}$$

五　辐射功率及其角分布

- 平均电磁能流密度

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B})=\frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}[(\boldsymbol{B}^*\times\boldsymbol{e}_r)\times\boldsymbol{B}]=\frac{c}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{e}_r$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{c}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{e}_r=\frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\,\boldsymbol{e}_r \tag{5.3.19}$$

$|\boldsymbol{B}|^2$的计算：在球坐标系下写出$\boldsymbol{B}$ 的3个分量, 分别算得各分量的模后平方相加

- 辐射功率（平均）：

  任取一半径为 $\boldsymbol{r}$ 的球面，对平均电磁能流密度积分得

$$P=\oiint\overline{\boldsymbol{S}}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\frac{c}{2\mu_0}\oiint|\boldsymbol{B}|^2r^2d\Omega \tag{5.3.20}$$

积分结果与 $\boldsymbol{r}$ 无关。

- 辐射功率角分布：

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\,r^2=|\overline{\boldsymbol{S}}|\,r^2 \tag{5.3.21}$$

本节目的：在小场源近似下计算辐射场；出发公式：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t},\ \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'-\frac{\mathrm{i}\,\mu_0 k e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\boldsymbol{e}_r\cdot\iiint \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV' \quad (5.4.1)$$

类比小载流导体的磁矢势：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\mu_0}{4\pi r}\iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')dV'+\dfrac{\mu_0}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\iiint \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')dV'$

分析使用的数学手段完全相同，区别仅仅在于：

静磁场情况：$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$

辐射场情况：$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_0=i\omega\rho_0 \quad (5.4.2)$

两种情况下的物理结果不同：

1. 电流密度零阶矩：静磁场情况下为零；辐射场情况对应电偶极辐射
2. 电流密度一阶矩：静磁场情况对应磁（偶极）矩，辐射场情况对应电四极矩和磁偶极辐射两项之和

一 电偶极辐射

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV' \tag{5.4.3}$$

$$\nabla'\cdot[\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}']=(\nabla'\cdot\boldsymbol{j}_0)\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{j}_0\cdot\nabla'\boldsymbol{r}'=\mathrm{i}\omega\rho_0\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{j}_0$$

$$\boldsymbol{j}_0=\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}')-\mathrm{i}\omega\rho_0\boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{r})=-\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\boldsymbol{p}_0 \tag{5.4.4}$$

$$\boldsymbol{p}_0=\iiint\rho_0(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'dV' \tag{5.4.5}$$

$$\boldsymbol{p}=\iiint\rho(\boldsymbol{r}',t)\boldsymbol{r}'dV'=\boldsymbol{p}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.4.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\iiint\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)dV'=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{p} \tag{5.4.8}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\dot{\boldsymbol{p}} \tag{5.4.7}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}=\frac{\mathrm{i}\omega k\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\omega r}\boldsymbol{e}_r\times\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi cr}\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_r \tag{5.4.9}$$

$$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}(\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_r)\times\boldsymbol{e}_r \tag{5.4.10}$$

电偶极辐射（续）

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi cr}\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_r \tag{5.4.9}$$

$$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r=\frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}(\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_r)\times\boldsymbol{e}_r \tag{5.4.10}$$

$$\bar{\boldsymbol{S}}=\frac{\mu_0}{32\pi^2cr^2}|\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_r|^2\boldsymbol{e}_r \tag{5.4.11}$$

对定向偶极子：

$$\bar{\boldsymbol{S}}=\frac{\mu_0|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{32\pi^2cr^2}\sin^2\theta\,\boldsymbol{e}_r \quad (5.4.13) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dP}{d\Omega}=\frac{\mu_0|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{32\pi^2c}\sin^2\theta \quad (5.4.14)$$

总辐射功率：

$$P=\oint\!\!\!\oint|\bar{\boldsymbol{S}}|^2r^2d\sigma=\frac{\mu_0|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{12\pi c} \tag{5.4.15}$$

说明：1. 对定向偶极子，将(5.4.13)式代入上式积分

2. 对取向随时间任意变化的情况 上式也成立（见习题5.4）

- 习题提示：$|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}_r|^2=(\boldsymbol{p}^*\times\boldsymbol{e}_r)\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}_r)=[(\boldsymbol{p}^*\times\boldsymbol{e}_r)\times\boldsymbol{p}]\cdot\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{p}^*\cdot\boldsymbol{p}-\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r:\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{e}_r=\sin\theta(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y)+\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z,\quad \iint\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r d\Omega=4\pi\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}/3$$

例5.1 沿如图5—2所示的短天线($l \ll \lambda$)的电流强度分布为

$$I(z,t)=I_0(z)e^{-\mathrm{i}\omega t},\quad I_0(z)=I_m(1-2|z|/l),\ |z|\le l/2$$

计算辐射场，辐射功率的角分布和辐射功率。

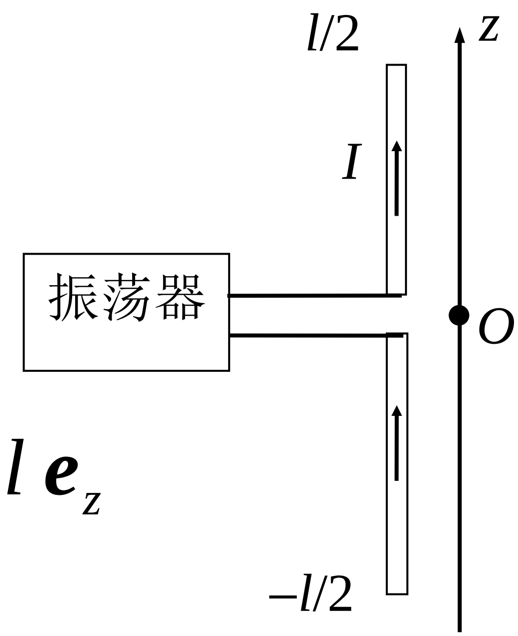

图5—2

解 由给定的电流分布计算 $\dot{\boldsymbol{p}}$

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)dV'=-\mathrm{i}\,\omega\boldsymbol{p},\qquad \dot{\boldsymbol{p}}=\frac{1}{2}I_m\,l\,\boldsymbol{e}_z$$

代入相关公式求得辐射场、功率角分布和辐射功率：

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mathrm{i}\,\mu_0\omega I_m l\sin\theta}{8\pi cr}e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}\boldsymbol{e}_\phi,\quad \boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{i}\,\mu_0\omega I_m l\sin\theta}{8\pi r}e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{\mu_0\omega^2 I_m^2 l^2}{128\pi^2 c}\sin^2\theta,\qquad P=\frac{\mu_0\omega^2 I_m^2 l^2}{48\pi c}$$

物理分析：

1. 偏振态：电矢量沿 θ 方向线偏振；
2. 辐射角分布：由$\sin^2\theta$描述；
3. 辐射功率与 $(kl)^2$ 或 $(l/\lambda)^2$ 成正比，与 ω^4 成正比(给定p_m或q_m)

$$I_m^2\propto\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\propto q_m^2\omega^2$$