第三章 静磁场（6课时）

节次	节　　名	小节标题
3.1	基本方程和唯一性定理	基本方程，磁矢势及其微分方程，无限均匀线性各向同性磁介质中的磁矢势解，边值关系，边界条件和唯一性定理
3.2	二维二分量问题	二维二分量静磁场的定解问题，二维二分量静磁场的定解问题求解举例
3.3	从磁矢势出发计算磁场	圆环电流的磁场，任意小载流导体在远处的磁场，磁偶极子在外磁场中所受的力和力矩
3.4	磁标势法	磁标势的引入、相关方程和边值关系，磁标势法与静电场解法的对应关系，磁标势法应用举例
3.5	磁能	磁能基本公式，安培力做功与磁能变化，小载流导体在外磁场中的磁能和势能，静磁场热力学

- 静磁场的典型解法：磁矢势法，磁标势法，泰勒展开法
- 严格证明静磁场两条定理与毕奥－萨伐尔定律的等效性
- 静磁场能量

1. 静磁场能量表达式的严格推导；2. 静磁场热力学

【提示】对比静电场的分析方法

一 基本方程

(分区均匀线性各向同性介质)

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_0 \qquad (3.1.1)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad (3.1.2)$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \qquad (3.1.3)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{j}_0 \qquad (3.1.6)$$

二 磁矢势及其微分方程

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (3.1.4)$$

为减小 $\boldsymbol{A}$ 的任意性，对其散度加上条件（又称规范条件）：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \qquad (3.1.5)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}=-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}_0 \qquad (3.1.7)$$

说明：(3.1.7)的解必须满足(3.1.5)，才是磁矢势解！

对比静电势的泊松方程： $\nabla^2\varphi=-\rho_0/\varepsilon$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{j}_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \\ \nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}_0 \end{cases}$$

- 转换之后的定解问题变得更加复杂：
  - 偏微分方程由一阶增至二阶
  - 对 $\boldsymbol{A}$ 提边界条件缺乏物理依据和实用价值

结论：一般不直接求解 $\boldsymbol{A}$

- 为何要引入磁矢势 $\boldsymbol{A}$？

1. 在无限均匀介质中，可类比静电场直接写出磁矢势解：$\begin{cases} \nabla^2\varphi=-\rho_0/\varepsilon \\ \nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}_0 \end{cases}$

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho_0(\boldsymbol{r}')}{R}dV' \Longrightarrow \boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (3.1.8)$$

2. 对于二维二分量问题，A 只有一个分量，且具有明确的物理意义，便于直接计算或求解（套用静电场各种解法）
3. 对时变场源情况，从$\boldsymbol{A}$（和φ）出发计算辐射场比较方便，且便于实现经典电动力学向相对论电动力学和量子力学过渡

- 检验 $\boldsymbol{A}$ 的解是否满足规范条件

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\ ?$$

1. 检验的必要性

2. 检验过程：

∇ 作用于 $\boldsymbol{r}$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$\nabla=-\nabla'$

$$=-\frac{\mu}{4\pi}\iiint\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'=-\frac{\mu}{4\pi}\iiint\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$\nabla'\cdot\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')=0$

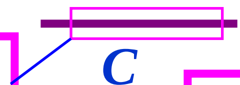
$$=-\frac{\mu}{4\pi}\oint\!\!\!\!\oint\frac{j_{0n}d\sigma}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=0.$$

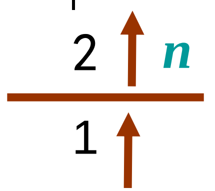
- 导出毕奥—沙伐尔定律：$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu}{4\pi}\iiint\dfrac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV'$ （3.1.9）

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\nabla\times\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\times\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV'$$

【推论】静磁场两条定理与毕奥—萨伐尔定律等效

三 边值关系





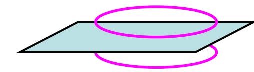
$$\boxed{\begin{gathered}\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\end{gathered}}\Rightarrow\boxed{\begin{gathered}\oint_C\boldsymbol{A}d\boldsymbol{l}\cdot=\iint_\Sigma\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\\ \oiint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0\end{gathered}}\Rightarrow\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_1)=0\\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_1)=0\end{gathered}}\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2}$$

（3.1.12）

$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}}$ 或 $\boxed{\oint_C\boldsymbol{A}d\boldsymbol{l}=\iint_\Sigma\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\Rightarrow\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=\lim_{\Sigma\to0}\frac{1}{\Sigma}\oint_C\boldsymbol{A}d\boldsymbol{l}}\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0}$

推论：切向分量连续的矢量场，其旋度法向分量连续

C：界面任一侧闭合回路



$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{i}_0\Rightarrow\boldsymbol{n}\times\left(\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\boldsymbol{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\boldsymbol{A}_1\right)=\boldsymbol{i}_0\quad(3.1.13)$$

【备注】齐次边值关系用于直接求解；非齐次关系事后用来计算界面电荷密度（题目给定非零 $\boldsymbol{i}_0$ 的情况例外）

四 边界条件和唯一性定理

1. 同第一章1.1节的任意矢量场的唯一性定理：给定磁场的散度（等于零）和旋度，以及边界上的法向分量，解唯一。
2. 静磁场的定解问题：多数情况下给定

$B_n|_S = g$， 满足自洽条件(无孤立磁荷)： $\oiint_S g d\sigma = 0$

3. 实际情况

- 给定星体（如地球和太阳）表面的法向磁场强度
- 超导体或磁场为零的理想导体：$B_n = 0$（自洽边界条件）

一　二维二分量静磁场的定解问题

正交曲线坐标系：u_1, u_2, u_3；拉梅系数：h_1, h_2, h_3；

二维：磁场和拉梅系数仅与坐标 u_1, u_2 有关（**u_3称为“可忽略坐标”**）

二分量：$B_3 = 0$

猜：$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_3$，则

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \Longrightarrow \begin{cases} B_1 = \dfrac{1}{h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_2}(h_3A_3) - \dfrac{\partial}{\partial u_3}(h_2A_2)\right] = \dfrac{1}{h_2h_3}\dfrac{\partial}{\partial u_2}(h_3A) \\ B_2 = \dfrac{1}{h_3h_1}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_3}(h_1A_1) - \dfrac{\partial}{\partial u_1}(h_3A_3)\right] = -\dfrac{1}{h_3h_1}\dfrac{\partial}{\partial u_1}(h_3A) \\ B_3 = \dfrac{1}{h_1h_2}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_1}(h_2A_2) - \dfrac{\partial}{\partial u_2}(h_1A_1)\right] = 0 \end{cases}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right] = 0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2B_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1B_1)\right]\boldsymbol{e}_3 = \mu_0\boldsymbol{j}_0 \Longrightarrow \boldsymbol{j}_0 = j_0\,\boldsymbol{e}_3$$

1. 基本方程：限于直角坐标系(x, y, z)和圆柱坐标系(ρ, ϕ, z)

$$\boldsymbol{j}_0 = j_0\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_z \tag{3.2.1}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times(A\boldsymbol{e}_z) = \nabla A\times\boldsymbol{e}_z = \frac{\partial A}{\partial y}\boldsymbol{e}_x - \frac{\partial A}{\partial x}\boldsymbol{e}_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\rho - \frac{\partial A}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\phi \tag{3.2.2}$$

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\phi^2} = -\mu j_0 \tag{3.2.3}$$

2. 边值关系：引入局地正交坐标系$(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_\tau, \boldsymbol{e}_z)$

局地坐标	$\boldsymbol{e}_n$	$\boldsymbol{e}_\tau$	$\boldsymbol{e}_z$
直角坐标	$\boldsymbol{e}_x$	$\boldsymbol{e}_y$	$\boldsymbol{e}_z$
圆柱坐标	$\boldsymbol{e}_\rho$	$\boldsymbol{e}_\phi$	$\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\partial A}{\partial\tau}\boldsymbol{e}_n - \frac{\partial A}{\partial n}\boldsymbol{e}_\tau \tag{3.2.4}$$

$$A_1 = A_2 \tag{3.2.5}$$

$$\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_2 - \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_1 = -i_0 \tag{3.2.6}$$

磁介质界面：$\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_2 - \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_1 = 0$

理想导体表面：$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)_S = -i_0$

3. 边界条件：设 C 为解域边界与 $z=0$ 平面的交线(闭合曲线)

它即为二维问题的边界

● 给定 $B_n|_C$：

$$B_n|_C=\left.\frac{\partial A}{\partial \tau}\right|_C=g(\tau) \qquad \oint_C g(\tau)d\tau=0 \qquad (3.2.6)$$

$$A|_C=\int g(\tau)d\tau\equiv A_C(\tau) \qquad (3.2.11)$$

物理意义： $A_C(\tau_2)-A_C(\tau_1)$

表示通过 τ_1 和 τ_2 之间、沿 z 轴方向单位长度边界面的磁通量

对内部磁场为零的理想导体边界，A_C 为常数

● 给定理想导体柱的电流强度：

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_C \frac{1}{\mu}B_\tau d\tau=-\oint_C \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}d\tau=I_0 \Rightarrow \begin{cases}\oint_C \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}d\tau=-I_0\\ A_C=\text{常数}\end{cases}$$

与静电场情况给定单位长度导体柱的电量相对应

二　二维二分量静磁场问题求解举例

例3.1 半径为 a、电流强度为 I_0 的长圆柱超导体，置于均匀外磁场中，外场方向与柱轴垂直，求柱外空间（真空）的磁场.

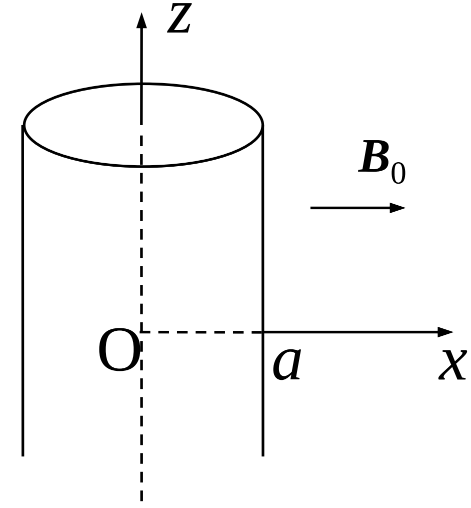


图3—1

解　取圆柱坐标(ρ, ϕ, z); $\boldsymbol{B}_0$沿 x 轴方向，取

$$A = b_0 \ln(\rho/\rho_0) + (a_1\rho + b_1\rho^{-1})\sin\phi$$

列出边界条件和正则条件：

1. 周期边界条件（已体现在通解的选择之中）
2. 远处渐近条件：均匀场＋长直线电流场（部分体现）
3. 导体电流强度和导体表面为等磁矢势面（尚未使用）

利用远处（$\rho \to \infty$）均匀场条件： $A|_{\rho\to\infty} \to B_0\rho\sin\phi \Rightarrow a_1 = B_0$

利用超导体表面等势的条件： $a_1 a + b_1/a = 0 \Rightarrow b_1 = -a_1 a^2 = -B_0 a^2$

利用电流强度为I_0 的条件：

$$\boxed{\partial A/\partial\rho = b_0/\rho + (a_1 - b_1\rho^{-2})\sin\phi} \quad \frac{1}{\mu_0}\int \frac{\partial A}{\partial \rho} dl = \frac{1}{\mu_0}\int_0^{2\pi} b_0 d\phi = -I_0 \Rightarrow b_0 = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}$$

(续解例3.1)

$$A=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)+B_0\rho\sin\phi-\frac{B_0 a^2}{\rho}\sin\phi$$

式中无关紧要的常数 ρ_0 可通过适当选择磁矢势零点确定.

由磁矢势A求得磁场分量如下：

$$B_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial\phi}=B_0\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\phi$$

$$B_\phi=-\frac{\partial A}{\partial\rho}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho}-B_0\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\phi$$

解毕

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\qquad \boldsymbol{B}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV'$$

- 一般情况下，从 $\boldsymbol{B}$ 的表达式出发更为直接、简便
- 对于二维二分量问题，从 $\boldsymbol{A}$ (仅有一个分量)出发简单

一　圆环电流的磁场

取圆柱坐标(ρ, ϕ, z); 圆环位于 $z=0$ 平面，半径为a，电流强度为I，z 轴与电流方向成右手螺旋关系

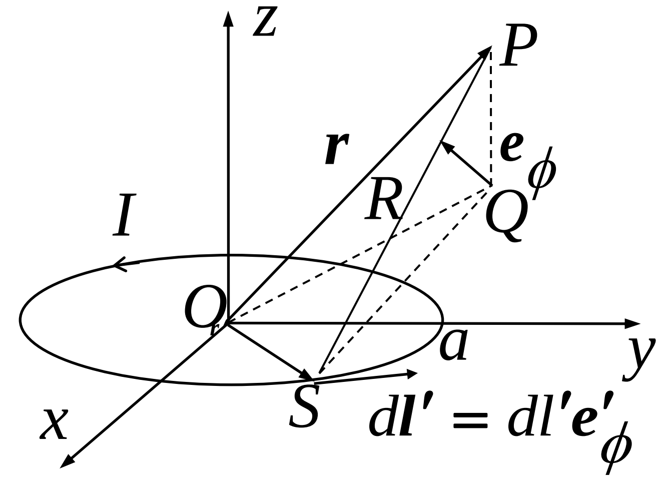


图3－2

场点P：$\boldsymbol{r}$ (ρ, ϕ, z); 源点S：$\boldsymbol{r}'$(a, ϕ', 0);

电流元： $\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'=Id\boldsymbol{l}'=Idl'\boldsymbol{e}'_\phi=Iad\phi'\boldsymbol{e}'_\phi$

关键在于写出 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 的表达式

考察直角三角形PQS, 成立 $\overline{PS}=R$, $\overline{PQ}=z$,

$\overline{SQ}=[a^2+\rho^2-2\rho a\cos(\phi-\phi')]^{1/2}$ $(\varDelta OQS)$ $\Rightarrow$ $R=(\overline{SQ}^2+\overline{PQ}^2)^{1/2}$

$$R=[a^2+\rho^2+z^2-2\rho a\cos(\phi-\phi')]^{1/2}$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu I a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{e}'_\phi d\phi'}{[a^2+\rho^2+z^2-2\rho a\cos(\phi-\phi')]^{1/2}}$$

下面要解决两个问题：

1. 磁矢势只有一个分量：$\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{e}_\phi$ (基于对称性分析或解析证明）

2. 计算积分：一般使用泰勒展开法，求远处的磁场

由$\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}'_\phi=0$, 可知$A_z=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{A}=0$；

再由

$$\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}'_\phi=(\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}'_\phi=(\boldsymbol{e}'_\phi\times\boldsymbol{e}_\phi)\cdot\boldsymbol{e}_z=\sin(\phi-\phi')$$

$$\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\mu I a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\phi-\phi')d\phi'}{[a^2+\rho^2+z^2-2\rho a\cos(\phi-\phi')]^{1/2}}=0$$

证毕；这与二维二分量问题的磁矢势只有第3分量的结论自洽

$$A_\phi = \boldsymbol{e}_\phi \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\phi - \phi')d\phi'}{[a^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho a \cos(\phi - \phi')]^{1/2}}$$

$$\phi' - \phi \to \phi' \quad \Rightarrow \quad A_\phi = \frac{\mu I a}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi' d\phi'}{\left(1 + \dfrac{a^2 - 2\rho a \cos\phi'}{\rho^2 + z^2}\right)^{1/2}}$$

远场近似（泰勒展开）：

$$a^2 << \rho^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad A_\phi \approx \frac{\mu I a}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\rho a \cos\phi'}{\rho^2 + z^2}\right) \cos\phi' d\phi'$$

$$A_\phi = \frac{\mu I a^2 \rho}{4(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu I a^2 \sin\theta}{4r^2}, \quad \boldsymbol{A} = A_\phi \boldsymbol{e}_\phi = \frac{\mu \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3}, \quad \boldsymbol{m} = \pi a^2 I \boldsymbol{e}_z = IS\boldsymbol{e}_z$$

圆环电流的磁矩

磁偶极子场：

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = -\frac{\mu \boldsymbol{m}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi r^5} \tag{3.3.7}$$

二 任意小载流导体在远处的磁场**(对比电多级子场的分析过程)**

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3.3.1}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\approx\frac{1}{r}-\boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2} \tag{3.3.8}$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi r}\iiint\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'+\frac{\mu}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\iiint\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV' \tag{3.3.9}$$

由 $\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}')=(\nabla'\cdot\boldsymbol{j}_0)\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{j}_0\cdot\nabla'\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{j}_0$ 得

$\iiint\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'=\iiint\nabla'\cdot[\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}']dV'=\oiint_S\boldsymbol{r}'j_{0n}d\sigma=0,$ 第一项为零；

由 $\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}')=(\nabla'\cdot\boldsymbol{j}_0)\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'+(\boldsymbol{j}_0\cdot\nabla'\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{j}_0\cdot\nabla'\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0$ 得

$$\iiint(\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0)dV'=\iiint\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}')dV'=\oiint\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'j_{0n}d\sigma=0$$

第二项 $=\dfrac{\mu}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot\iiint \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'$

$$\boldsymbol{e}_r\cdot\iiint \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0 dV'=\boldsymbol{e}_r\cdot\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0-\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}')dV'$$

$$=\frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{r}')dV'=\frac{1}{2}\left(\iiint(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}_0)dV'\right)\times\boldsymbol{e}_r.$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu\,\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3},\qquad \boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}_0(r')dV'$$

任意载流导体的磁矩

注意：磁矩计算结果与参考点选择无关：

将参考点由原点移至 $\boldsymbol{r}_0$，相应 $\boldsymbol{r}'\rightarrow\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0$：

$$\boldsymbol{m}'=\iiint(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{j}_0(r')dV'=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r}_0\times\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')dV'=\boldsymbol{m}$$

三 磁偶极子在外磁场中所受的力和力矩

（对比电偶极子受力分析）

$$\boldsymbol{F}=\iiint j_0(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})dV' \qquad (3.3.14)$$

$$\boldsymbol{M}=\iiint \boldsymbol{r}'\times[\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})]dV' \qquad (3.3.15)$$

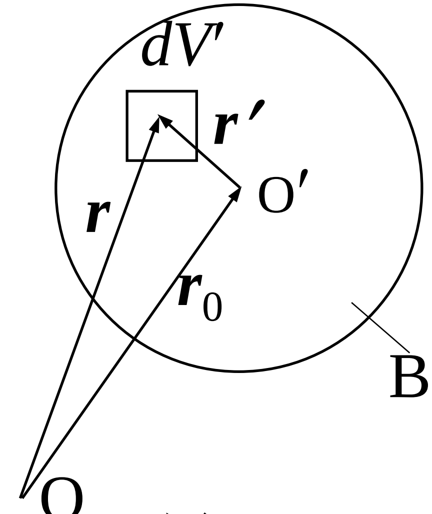


图3—3

- 力： $\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})\approx\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}_0)+\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_0\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}_0),\qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}'$

$$\text{第一项}=\iiint \boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}_0)dV'=(\iiint \boldsymbol{j}_0 dV')\times\boldsymbol{B}_e=0$$

$$\text{第二项}=\iiint \boldsymbol{j}_0\times(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_0\boldsymbol{B}_e)dV'=(\iiint dV'\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'\cdot\nabla_0)\times\boldsymbol{B}_e$$

$$=[\iiint dV'\tfrac{1}{2}\boxed{(\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0)\cdot\nabla_0}]\times\boldsymbol{B}_e=\frac{1}{2}[\iiint dV'\boxed{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}_0)\times\nabla_0}]\times\boldsymbol{B}_e$$

$$=\underline{\frac{1}{2}[(\iiint \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}_0 dV')}\times\nabla_0]\times\boldsymbol{B}_e=(\underline{\boldsymbol{m}}\times\nabla_0)\times\boldsymbol{B}_e$$

$$=\nabla_0(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e)-\boldsymbol{m}(\nabla_0\cdot\boldsymbol{B}_e)=\nabla_0(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e)$$ 求导时视 $\boldsymbol{m}$ 为常矢量！

由 $\boldsymbol{m}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_e)=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e)-\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{B}_e=0 \Longrightarrow \nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e)=\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{B}_e$

磁偶极子受力公式： $\boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e)=\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{B}_e$ (求导时视 $\boldsymbol{m}$ 不变)

- 力矩：仅保留 $\boldsymbol{B}_e$ 展开式的主项 $\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r})\approx\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{r}_0)$

$$\iiint \boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{j}_0\times\boldsymbol{B}_e)dV'=\iiint \boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{B}_e dV'-\boldsymbol{B}_e\iiint \boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{r}'dV'$$

$$\text{第一项}=\iiint \underline{\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'}\cdot\boldsymbol{B}_e dV'=\iiint \underline{\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0)}\cdot\boldsymbol{B}_e dV'$$

$$=\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}_0)\times\boldsymbol{B}_e dV'=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_e.$$

$$\text{第二项}=\iiint \boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{r}'dV'=\iiint(\boldsymbol{j}_0\cdot\nabla'\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{r}'dV'=\frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{j}_0\cdot\nabla' r'^2 dV'$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\nabla'\cdot(r'^2\boldsymbol{j}_0)dV'=\frac{1}{2}\oiint r'^2 j_{0n}d\sigma=0. \Longrightarrow \boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_e$$

【说明】以上略去了对磁四极子的力和力矩的分析

一 磁标势的引入、相关方程和边值关系

在没有传导电流的空间, 磁场满足

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=0,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$$

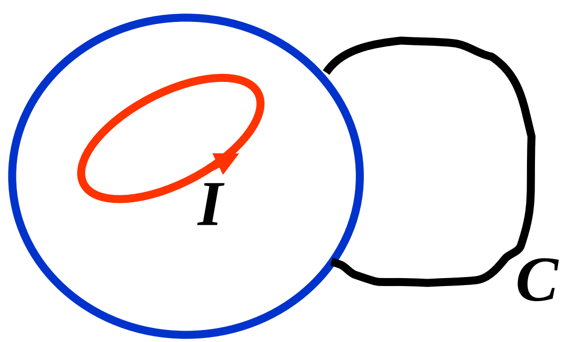
$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0,\qquad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$$

与没有自由电荷的静电场方程和边值关系具有同样的数学形式

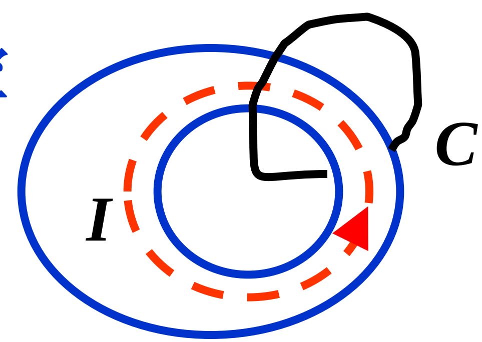
$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m,\qquad \varphi_m\text{：磁标势}$$

磁标势单值条件： $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=0$ ⇒ 限于单连通空间，避免 C 与电流相互环绕

单连通空间示例



多连通空间示例



1. 分区均匀线性各向同性磁介质

- 基本方程： $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$ （3.4.8)

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m \Rightarrow \nabla^2\varphi_m=0 \quad （3.4.9)$$

- 边值关系： $\varphi_{m1}=\varphi_{m2},\quad \mu_1\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}$

2. 永磁体

- 基本方程：

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}),\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{H}=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m \Rightarrow \nabla^2\varphi_m=-\rho_m/\mu_0,\quad \rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M}$$

- 边值关系： $\varphi_{m1}=\varphi_{m2},\quad \dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}-\dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}=-\dfrac{\sigma_m}{\mu_0}$

$$\sigma_m=-\mu_0\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1) \quad （3.4.15)$$

二　磁标势法与静电场解法的对应关系

限于分区均匀线性各向同性介质(可含永磁体，但不含传导电流)

表3－1 分区均匀各向同性介质和永电、磁体中的静电场和静磁场方程

矢量场	静电场	静磁场
旋度方程	$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=0$
散度方程(各向同性介质)	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$
散度方程(永电体,永磁体)	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\rho_m/\mu_0$
电荷、磁荷密度	$\rho=\rho_0-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$	$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M}$
性能方程(各向同性介质)	$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$
电磁极化强度	$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}$	$\mu_0\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{H}$

表3－2 电学量和磁学量的对应关系

电学量	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{D}$	φ	ρ	σ	ε	ε_0	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{p}$
磁学量	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{B}$	φ_m	ρ_m	σ_m	μ	μ_0	$\mu_0\boldsymbol{M}$	$\mu_0\boldsymbol{m}$

三 磁标势法应用举例

例3.2 半径为a、磁导率为μ的均匀介质球置于均匀磁场$\boldsymbol{B}_0$之中，球外真空，求空间磁标势和磁场分布.

解 本问题与2.2节例2.3的静电场问题对应，其电势和电场分布如下：

$$\varphi=\begin{cases}-\dfrac{3\varepsilon_0 E_0 r\cos\theta}{\varepsilon+2\varepsilon_0}, & r\le a;\\ -E_0 r\cos\theta+\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)E_0 a^3\cos\theta}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)r^2}, & r>a.\end{cases}\qquad \varphi_m=\begin{cases}-\dfrac{3B_0 r\cos\theta}{\mu+2\mu_0}, & r\le a;\\ -\dfrac{B_0 r}{\mu_0}\cos\theta+\dfrac{(\mu-\mu_0)B_0 a^3\cos\theta}{\mu_0(\mu+2\mu_0)r^2}, & r>a.\end{cases}$$

转换为磁场解：

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\boldsymbol{E}_1=\dfrac{3\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}, & r\le a;\\ \boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_0-\dfrac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\dfrac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\boldsymbol{r}, & r>a;\end{cases}\qquad \boldsymbol{H}=\begin{cases}\boldsymbol{H}_1=\dfrac{3\boldsymbol{B}_0}{\mu+2\mu_0}, & r\le a;\\ \boldsymbol{H}_2=\dfrac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}-\dfrac{\boldsymbol{m}}{4\pi r^3}+\dfrac{3\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^5}\boldsymbol{r}, & r>a;\end{cases}$$

$$\boldsymbol{p}=\frac{4\pi a^3}{3}\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_1=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0\qquad \boldsymbol{m}=\frac{4\pi a^3}{3}\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{M}=\frac{(\mu-\mu_0)\boldsymbol{H}_1}{\mu_0}=\frac{3(\mu-\mu_0)}{\mu_0(\mu+2\mu_0)}\boldsymbol{B}_0$$

符号替换表：

电学量	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E}_0$	φ	ε	ε_0	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{p}$
磁学量	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{B}_0/\mu_0$	φ_m	μ	μ_0	$\mu_0\boldsymbol{M}$	$\mu_0\boldsymbol{m}$

例3.2（续）

由磁场强度求磁感应强度：

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\mu\boldsymbol{H}_1=\dfrac{3\mu\boldsymbol{B}_0}{\mu+2\mu_0}, & r\le a;\\ \mu_0\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{B}_0-\dfrac{\mu_0\boldsymbol{m}}{4\pi r^3}+\dfrac{3\mu_0(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi r^5}, & r>a.\end{cases}\qquad(3.4.20)$$

磁化介质球（磁化强度*M*）产生的磁感应强度：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_0=\begin{cases}\dfrac{2\mu_0\boldsymbol{M}}{3}, & r\le a;\\ -\dfrac{\mu_0\boldsymbol{m}}{4\pi r^3}+\dfrac{3\mu_0(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi r^5}, & r>a;\end{cases}\qquad(3.4.21)$$

例3.3 求半径为 a、磁化强度为$\boldsymbol{M}$ 的永久磁铁球产生的磁场.

解 采用球坐标(r, θ, φ)，原点位于球心，取尝试分离变量解：

$$\varphi_{m1} = a_0 + a_1 r\cos\theta \quad (r \le a), \qquad \varphi_{m2} = a_0' + \frac{b_0'}{r} + \frac{b_1'}{r^2}\cos\theta \quad (r > a)$$

满足边值关系：
$$\varphi_{m1}\big|_{r=a} = \varphi_{m2}\big|_{r=a}, \qquad \left.\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r}\right|_{r=a} - \left.\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{\sigma_m}{\mu_0} = -M\cos\theta$$

确定待定系数：
$$a_0' = a_0 \equiv \varphi_0, \quad b_0' = 0, \quad a_1 = \frac{M}{3}, \quad b_1' = \frac{Ma^3}{3}$$

代回尝试解得：
$$\varphi_{m1} = \varphi_0 + \frac{1}{3}Mr\cos\theta = \varphi_0 + \frac{1}{3}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r} \tag{3.4.24}$$

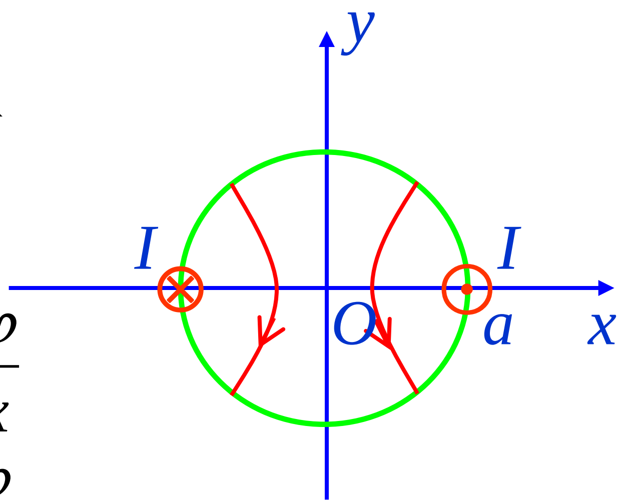
$$\varphi_{m2} = \varphi_0 + \frac{Ma^3\cos\theta}{3r^2} = \varphi_0 + \frac{a^3\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r}}{3r^3} = \varphi_0 + \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \tag{3.4.25}$$

$$\boldsymbol{H}_1 = -\nabla\varphi_{m1} = -\frac{\boldsymbol{M}}{3}, \qquad \boldsymbol{H}_2 = -\nabla\varphi_{m2} = -\frac{\boldsymbol{m}}{4\pi r^3} + \frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi r^5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B}_1 = \underline{\mu_0(\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{M})} = \frac{2\mu_0\boldsymbol{M}}{3}, \qquad \boldsymbol{B}_2 = \mu_0\boldsymbol{H}_2 = -\frac{\mu_0\boldsymbol{m}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi r^5}$$

例3.4 半径为 a 的长导体薄圆柱壳,沿轴线切成两半,彼此绝缘,电势分别为$\pm V$，求该柱面内外的电势分布。

解 本问题的两半圆柱壳均为等电势面.在两狭缝处置入长直线电流，强度相同，流向相反。可证明磁力线与圆柱面垂直，该面为等磁势面。因此，待求电场与该磁场具有同样的形式，即



$$B_x \propto \frac{y}{(x+a)^2+y^2}-\frac{y}{(x-a)^2+y^2},\propto E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$B_y \propto -\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}+\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\propto E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

从上述两式积分得到同样结果：

$$\varphi\propto \arctan\left(\frac{2ay}{a^2-\rho^2}\right),\quad \rho^2=x^2+y^2$$

理由：$\partial\varphi/\partial x$ 和 $\partial\varphi/\partial y$ 为同一个电势函数$\varphi(x,y)$的偏导数