Chapter 9 线性系统状态空间分析

§ 9.1 问题的提出

- 1. 信号与系统的基石地位：
  - 信号与系统 ⇒ 数字信号处理 ⇒ 现代信号处理 ⇒ 时间序列分析
  - 信号与系统 ⇒ 线性系统分析 ⇒ 高等系统分析 ⇒ 复杂系统分析
- 2. 系统分析方法：
  - 输入输出方法：
    - 微分方程描述 $\sim$ 时域$H(p)\sim$ 频域$H(j\omega)\sim$ 复频域$H(s)$
    - 差分方程描述 $\sim z$域$H(z)$
  - 状态空间方法：状态方程、观测方程描述

- **3. 状态空间描述：**

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)V(t) & \rightarrow \text{状态方程} \\ Y(t) = C(t)X(t) + D(t)V(t) & \rightarrow \text{观测方程} \\ X(t_0) = X_0 & \rightarrow \text{初始状态} \end{cases}$$

叫做 **Kalman** $\sum\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$ 模型。

解：

$$\begin{cases} X(t) = e^{At} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} BV(\tau)\,d\tau \\ Y(t) = Ce^{At} X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[Ce^{A(t-\tau)} B + D\delta(t-\tau)\right] V(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

- **4. 基本概念：**
  - 定义(状态)：能够完全表征系统时域动力学行为的最小内部变量组称为系统的状态。

记为 $\boldsymbol{X}(t)=\left[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right]^H$，$H$为转置共轭；

$x_1(t),\cdots,x_n(t)$称为状态变量。

  - 定义(状态空间)：由状态向量张成的线性空间为状态空间。

$$\boldsymbol{X}(t)\in \mathrm{L}_n^2\left[t_0,t_\alpha\right) \Rightarrow \left\|\boldsymbol{X}(t)\right\|_2^2=\int_{t_0}^{t_\alpha}\boldsymbol{X}^H(t)\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t<\infty$$

$L_n^2\left[t_0,t_\alpha\right)$中定义了内积，成为*Hilbert*空间。

§ 9.2 CT-L系统状态空间方程解

- **1. CT-LTV系统状态空间方程：**

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_{n\times n}(t)X(t) + B_{n\times r}(t)V(t) \\ Y(t) = C_{m\times n}(t)X(t) + D_{m\times r}(t)V(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$X(t) \in \mathrm{L}_n^2[t_0, t_\alpha),\quad V(t) \in \mathrm{L}_r^2[t_0, t_\alpha),\quad Y(t) \in \mathrm{L}_m^2[t_0, t_\alpha)$$

相应的齐次方程为：
$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

- **2. CT-LTV系统齐次状态方程求解**

定理1：对于$\dot{X}(t)=A(t)X(t)$，$X(t_0)=X_0$，$t\in[t_0,t_\alpha)$，

$A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]_{n\times n}$，若$a_{ij}(t)\in L^1[t_0,t_\alpha)$，则解存在且唯一，

表示为 $X(t)=\Phi(t,t_0)X_0$，$t\in[t_0,t_\alpha)$

其中，$\Phi(t,t_0)$为$n\times n$矩阵，称为状态转移阵。

定义（状态转移阵）：齐次系统$\dot{X}(t)=A(t)X(t)$的

状态转移阵$\Phi(t,t_0)$，是矩阵微分方程

$\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)$的解，$\Phi(t_0,t_0)=I$，单位阵。

- **3. 状态转移阵的计算（略）**

1）若$\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\,\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\,\mathrm{d}s\cdot\boldsymbol{A}(t)$，则$\Phi(t,t_0)=\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\,\mathrm{d}s\right\}$

2）若$\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}(s)$，则$\Phi(t,t_0)=\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\,\mathrm{d}s\right\}$

3）$\forall\boldsymbol{A}(t)$，$\Phi(t,t_0)=\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_1)\left[\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{A}(\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_2\right]\mathrm{d}\tau_1+\cdots$

当$a_{ij}(t)\in L^1[t_0,t_\alpha)$时，$\Phi(t,t_0)$的元是$[t_0,t_\alpha)$上的连续函数。

- **4. 状态转移阵的性质**

性质1：$\Phi(t,t)=\Phi(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}$

性质2：$\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)=\Phi(t_2,t_0)$

性质3：$\Phi(t,t_0)$ 在 $\forall t\in[t_0,t_\alpha)$ 上正则/可逆，

且 $\left[\Phi(t,t_0)\right]^{-1}=\Phi(t_0,t)$

性质4：$\dot{\Phi}(t_0,t)=-\Phi(t_0,t)\boldsymbol{A}(t)$　　**证明：**

• 5. CT-LTV系统状态空间方程的解：

定理2：

CTL系统$\sum\left\{\mathrm{A}(t),\mathrm{B}(t),\mathrm{C}(t),\mathrm{D}(t)\right\}$，$t\in\left[t_0,t_\alpha\right)$，$\boldsymbol{X}\left(t_0\right)=\mathrm{X}_0$，

$\boldsymbol{A}\left(t\right)=\left[a_{ij}\left(t\right)\right]_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\left(t\right)=\left[b_{ij}\left(t\right)\right]_{n\times r}$，$\boldsymbol{V}\left(t\right)=\left[v_i\left(t\right)\right]_{r\times 1}$

若$a_{ij}\left(t\right)$、$b_{ij}\left(t\right)$、$v_i\left(t\right)\in\mathrm{L}^1\left[t_0,t_\alpha\right)$，则系统的解存在且唯一：

$$\boldsymbol{X}\left(t\right)=\boldsymbol{\Phi}\left(t,t_0\right)\mathrm{X}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}\left(t,\tau\right)\mathrm{B}\left(\tau\right)\mathrm{V}\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{Y}\left(t\right)=\mathrm{C}\left(t\right)\boldsymbol{\Phi}\left(t,t_0\right)\mathrm{X}_0+\mathrm{C}\left(t\right)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}\left(t,\tau\right)\mathrm{B}\left(\tau\right)\mathrm{V}\left(\tau\right)\mathrm{d}\tau+\mathrm{D}\left(t\right)\mathrm{V}\left(t\right)$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}\left(t,t_0\right)$是对应齐次系统的状态转移阵。

§ 9.3 CT-LTI系统状态空间方程解

1. 定理3：

CT-LTI系统$\sum\{A,B,C,D\}$，$A_{n\times n},B_{n\times r},C_{m\times n},D_{n\times r}$为实数阵；

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=AX(t)+BV(t)\\ Y(t)=CX(t)+DV(t)\ \Phi\\ X(t_0)=X_0\end{cases}$$

返回$H(t)$

状态转移阵化为：$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$；

解为：$X(t)=e^{A(t-t_0)}X_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}BV(\tau)d\tau$

$$Y(t)=Ce^{A(t-t_0)}X_0+\int_{t_0}^{t}\left[Ce^{A(t-\tau)}B+D\delta(t-\tau)\right]V(\tau)d\tau$$

2. CT-LTI系统状态转移阵的性质：

由$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)=\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t-t_0)}$，取$t_0=0$，化为：$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}$

定义： $\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}$ 为矩阵指数函数。

性质1: $\boldsymbol{\Phi}(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{A}\cdot 0}=\boldsymbol{I}$

性质2: $\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_0)$

性质3: $\left[\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}$

性质4: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}\right]^{-1}=-\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{A}t}\,\mathrm{A}$

性质5： $e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$

此式为 e^{At} 的定义，与 e^{at} 的台劳展开形式相同。

性质6： $\left[e^{At}\right]^n = e^{nAt}$

性质7： $L\left\{e^{At}\right\} = (sI - A)^{-1}$ 证明：

性质8： 若 $AB = BA$，则 $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$

$L\left\{e^{At}\right\} = (sI - A)^{-1}$ 称为**特征矩阵**。

3. e^{At} 的计算：

1）直接法：$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k$，便于计算机编程求解。

2）预解矩阵法：定义预解阵 $(sI-A)^{-1}$，

则 $e^{At}=L^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}$，$s$ 在收敛域中。

3）约旦规范型法：广义特征向量、特征根方法。

定理4：$\forall$ 方阵 $A_{n\times n}$，$\exists$ 非奇阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$A=\boldsymbol{PJP}^{-1},\qquad e^{At}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 由A的广义特征向量构成，$\boldsymbol{J}$ 为约旦阵。

4）Cayley-Hamilton方法

定理5（凯莱-哈密顿定理）：方阵$A_{n\times n}$的特征多项式为

$$\Delta(\lambda) \triangleq \det(\lambda I - A) \triangleq \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

则有：$\Delta(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I = \mathbf{0}$

即$A_{n\times n}$的特征多项式为化零多项式。

由定理5有：$A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \alpha_2 A^{n-2} - \cdots - \alpha_{n-1}A - \alpha_n I$

则 A^m 可表示为 I、A、A^2、…、A^{n-1} 的线性组合，$m > n$

$$\therefore \quad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k = \beta_0(t)I + \beta_1(t)A + \cdots + \beta_{n-1}(t)A^{n-1}$$

下面求： $\beta_0(t)$、$\beta_1(t)$、……、$\beta_{n-1}(t)$ $=?$

1）**A的特征根** $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ **互异，则∃P非奇异，使**

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\,\Lambda\,\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}\cdot\mathrm{diag}\{\lambda_i\}\cdot\mathbf{P}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_0(t)\\ \vdots\\ \vdots\\ \beta_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ \vdots\\ \mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

推导→

2）**当A有重根时，须计较根的几何、代数重数，较复杂！**

§9.4 脉冲响应阵，传输函数阵

1. 定义： 回顾定理3

$$Y(t)=Ce^{A(t-t_0)}X(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[Ce^{A(t-\tau)}B+D\delta(t-\tau)\right]V(\tau)d\tau$$

脉冲响应阵： $\mathbf{H}(t)\triangleq\begin{cases}Ce^{At}B+D\delta(t), & t\geq 0\\ \mathbf{0} & t<0\end{cases}$

零状态响应： $Y_{zs}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{H}(t-\tau)V(\tau)d\tau=\mathbf{H}(t)*V(t)$

2. 脉冲响应阵（其LT为传输函数阵）的用途

（1）分析MIMO–LTI系统的输入输出方法

（2）输入输出描述～卡尔曼状态空间方法

$$\mathbf{H}(t)=\left[h_{ij}(t)\right]_{m\times r};\quad V(t)=\begin{array}{c}[0 \quad \ldots \quad 0 \quad \delta(t) \quad 0 \quad \ldots \quad 0]^{\mathrm{T}} \\ \text{第}j\text{元}\end{array}$$

$h_{ij}(t)$：零状态系统第 j 个输入端为$\delta(t)$时的第 i个输出。

3. 定义(传输函数阵/系统函数阵)：

传输函数阵：MIMO-LTI系统$\mathbf{H}(t)$的拉氏变换：

$$\mathbf{H}(s)\triangleq \mathcal{L}\left\{\mathbf{H}(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\mathrm{C}e^{\mathrm{A}t}\mathrm{B}+\mathrm{D}\delta(t)\right\}$$

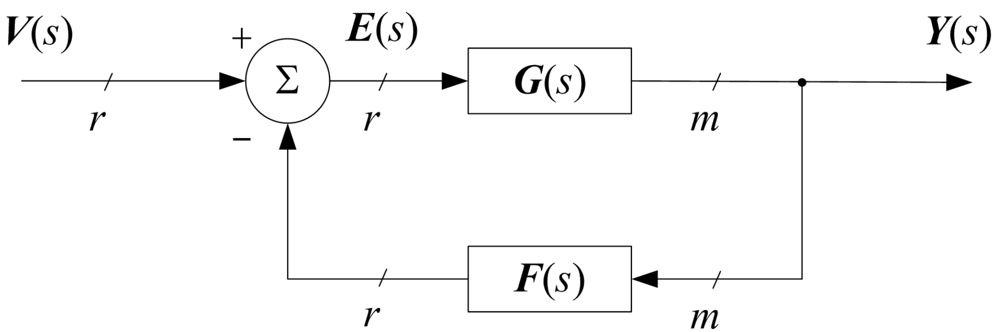
$$=\mathrm{C}\left(s\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{B}+\mathrm{D}$$

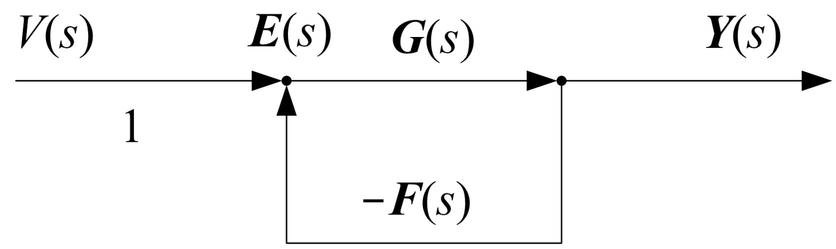
注：1）$\mathrm{H}_{ij}(s)=\mathcal{L}\left\{y_i(t)\right\}\Big/\mathcal{L}\left\{v_j(t)\right\}$，$v_j(t)\neq 0$，其它输入为零；

2）$\mathbf{H}(s)\neq\dfrac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{V}(s)}$，向量之比无意义；

3）由$\sum$系统模型可推出：$\mathbf{H}(s)=\mathrm{C}\left(s\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{B}+\mathrm{D}$

• MIMO闭环系统举例：





信号流图

由：$\mathbf{Y}(s)=\mathrm{G}(s)\mathbf{E}(s)=\mathbf{H}(s)\mathbf{V}(s)\ \Rightarrow\ \mathbf{H}(s)=\left[\mathbf{I}+\mathrm{G}(s)\mathrm{F}(s)\right]^{-1}\mathrm{G}(s)$

由：$\mathbf{E}(s)=\mathbf{V}(s)-\mathrm{F}(s)\mathbf{Y}(s)\ \Rightarrow\ \mathbf{H}(s)=\mathrm{G}(s)\left[\mathbf{I}+\mathrm{F}(s)\mathrm{G}(s)\right]^{-1}$

（二者等价）

定义：$\mathbf{E}(s)\overset{\Delta}{=}\mathbf{H}_e(s)\mathbf{V}(s)$

$\mathbf{H}_e(s)=\left[\mathbf{I}+\mathrm{F}(s)\mathrm{G}(s)\right]^{-1}$ 称为误差传输函数阵。

特别注意：算子改变了信号，作用次序应该是，算子在先，信号在后。

4. LTI系统的极点集合与特征根集合

$$\mathbf{H}(s)=\mathrm{C}(s\mathbf{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}+\mathrm{D}=\mathrm{C}\frac{\mathrm{Adj}(s\mathbf{I}-\mathrm{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathrm{A})}\mathrm{B}+\mathrm{D}$$

定义(Σ极点集)：$\boldsymbol{P}\overset{\Delta}{=}\left\{p_i \,\middle|\, \mathbf{H}(p_i)=\infty\right\}$

定义(Σ特征根集)：$\boldsymbol{\Lambda}\{\mathrm{A}\}\overset{\Delta}{=}\left\{\lambda_i \,\middle|\, \det(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A})=0\right\}$

由于可能存在$\mathbf{H}(s)$的零极相消，一般地：$\boldsymbol{P}\subseteq\boldsymbol{\Lambda}$

说明：

1）输入输出描述不能反应相抵消的零极点的行为，是不完全的系统描述，状态空间描述则是完全描述；

2）当且仅当$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$时，二者才是等价的描述。

§9.5 LTI系统状态空间中的线性变换

1. 问题的提出

已知LTI系统Σ，引入非奇线性变换 $X = P\hat{X}$ 使之变成 $\hat{\Sigma}$

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{X}(t) = AX(t) + BV(t) \\ Y(t) = CX(t) + DV(t) \\ X(t_0) = X_0\end{cases} \xrightarrow{X=P\hat{X}} \hat{\Sigma}:\begin{cases}\dot{\hat{X}}(t) = \hat{A}\hat{X}(t) + \hat{B}V(t) \\ Y(t) = \hat{C}\hat{X}(t) + \hat{D}V(t) \\ \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0\end{cases}$$

非奇指：$\det P \neq 0$；对目标系统 $\hat{\Sigma}$ 有四种要求：

1）约旦规范型

2）可控规范型

3）可观规范型

4）其它的结构

2. Σ与$\hat{\Sigma}$的代数等价关系

将$X = P\hat{X}$ (P非奇) 代入LTI系统 Σ 中，得系统 $\hat{\Sigma}$:

$$\begin{cases} P\dot{\hat{X}}(t) = AP\hat{X}(t) + BV(t) \\ Y(t) = CP\hat{X}(t) + DV(t) \\ P\hat{X}(t_0) = X_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = P^{-1}AP\hat{X}(t) + P^{-1}BV(t) \\ Y(t) = CP\hat{X}(t) + DV(t) \\ \hat{X}(t_0) = P^{-1}X_0 \end{cases}$$

代数等价关系为:

$$\hat{A} = P^{-1}AP$$

$$\hat{B} = P^{-1}B$$

$$\hat{C} = CP$$

$$\hat{D} = D$$

定义(等价关系)：

称 Σ 与 $\hat{\Sigma}$ 是代数等价关系，指 $\Sigma \xleftrightarrow[\text{P非奇}]{X=P\hat{X}} \hat{\Sigma}$，

即X与$\hat{X}$是代数同构的，二者线性一一对应。

以下讨论对角规范型问题：

定义(对角规范型)：$\hat{\Sigma}$或Σ为对角规范型，指$\hat{A}$或A是对角阵。

定理6：系统Σ，若A的特征根为$\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$，ξ_i是属于λ_i的特征向量。若A有n个线性无关的常义特征向量，取$P=[\xi_1,\cdots\xi_n]$，则经$X=P\hat{X}$变换后，$\hat{\Sigma}$为对角规范型。

3. 代数等价系统的不变性

若Σ 与 $\hat{\Sigma}$ 代数等价，则系统具有以下不变性：

1）特征根不变性：具有相同的特征根

2）传输函数阵不变性：具有相同的传输函数阵

证明：对于Σ，有$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$

对于$\hat{\Sigma}$，$\hat{H}(s)=\hat{C}\left(sI-\hat{A}\right)^{-1}\hat{B}+\hat{D}=CP\left(sI-P^{-1}AP\right)^{-1}P^{-1}B+D$

$=C\left[P\left(sI-P^{-1}AP\right)P^{-1}\right]^{-1}B+D=C(sI-A)^{-1}B+D$

3）脉冲响应阵不变性：具有相同的脉冲响应阵

4）响应不变性：输出的零状态响应、零输入响应不变

§9.6 李亚普诺夫稳定性

1. 李亚普诺夫稳定问题的提出

《运动稳定性的一般问题》，$1892 \to 1960s$，完整理论体系

考察齐次动力学系统：$\dot{X}(t) = f(X(t), t)$，$X(t_0) = X_0 \in R^n$

假设其解存在且唯一：$\begin{cases} X(t) = \phi(t, X_0, t_0) \\ X(t_0) = \phi(t_0, X_0, t_0) = X_0 \end{cases}$

定义(平衡态)：齐次动力学系统的一个状态 $X_e \in R^n$ 称为 t_0时刻的平衡态，指对 $\forall t \ge t_0$，有 $X(t) = \phi(t, X_e, t_0) = X_e$

三点说明：

1）零输入时，$X(t_0) = X_e$建立的状态响应永远停留于X_e。

2）系统在X_e的变化率为 $\mathbf{0} \in R^n$，$\dot{X}(t)=\boldsymbol{f}(X_e,t)=\mathbf{0}$，即$X_e$是齐次微分方程的平凡解(trivial solution)。

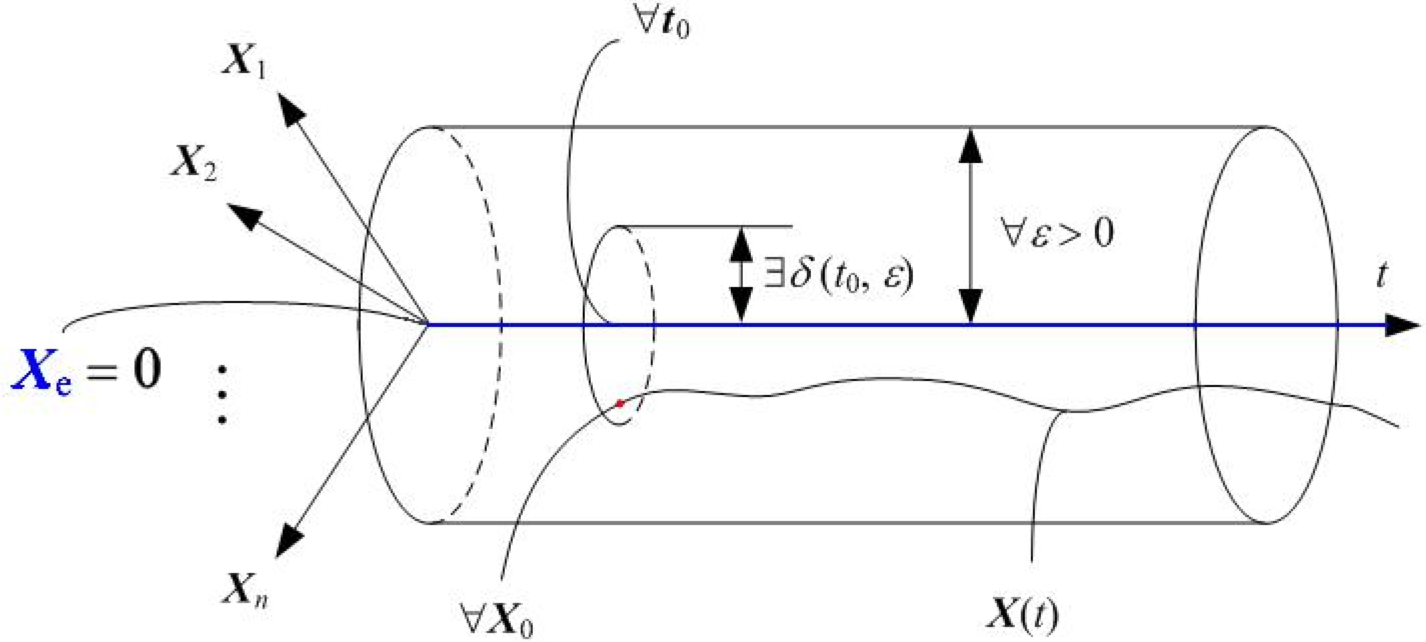
若 $\dot{X}(t)=\boldsymbol{f}(X(t),t)=AX(t) \Rightarrow$ 当A可逆时，平衡态$X_e=\mathbf{0}$唯一；当A奇异时，有无穷多平衡态，但线性无关平衡态有$n-\mathrm{rank}A$ 个。

若$\boldsymbol{f}(X(t),t)$为非线性向量函数，则存在一个或多个平衡态。

3）一般地 $X_e=\mathbf{0}$ 是一个平衡态，如果$X_e \neq \mathbf{0}$，可通过坐标平移(一种仿射变换)，使得$\boldsymbol{f}(\mathbf{0},t)=\mathbf{0}$;

为简化叙述且不失一般性，通常考察 $X_e=\mathbf{0}$ 的稳定性。

2. 李稳定的定义



定义(李稳定)：系统 $\dot{X}(t) = f\left(X(t), t\right)$的一个平衡态$X_e$李稳，

指对于$\forall t_0$，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta(t_0, \varepsilon)$，使当$\|X_0 - X_e\| < \delta(t_0, \varepsilon)$时，

有$\|\phi(t, X_0, t_0) - X_e\| < \varepsilon$，$\forall t > t_0$ 。

其中：$X(t) = \phi(t, X_0, t_0)$是状态方程的解。

关于李稳定的说明：

1）只要给定$\varepsilon > 0$，必存在$\delta(t_0,\varepsilon)$，使从半径为$\delta(t_0,\varepsilon)$的开超球内出发的运动，永远围于半径为 ε 的开超球内，超球的球心为X_e ；

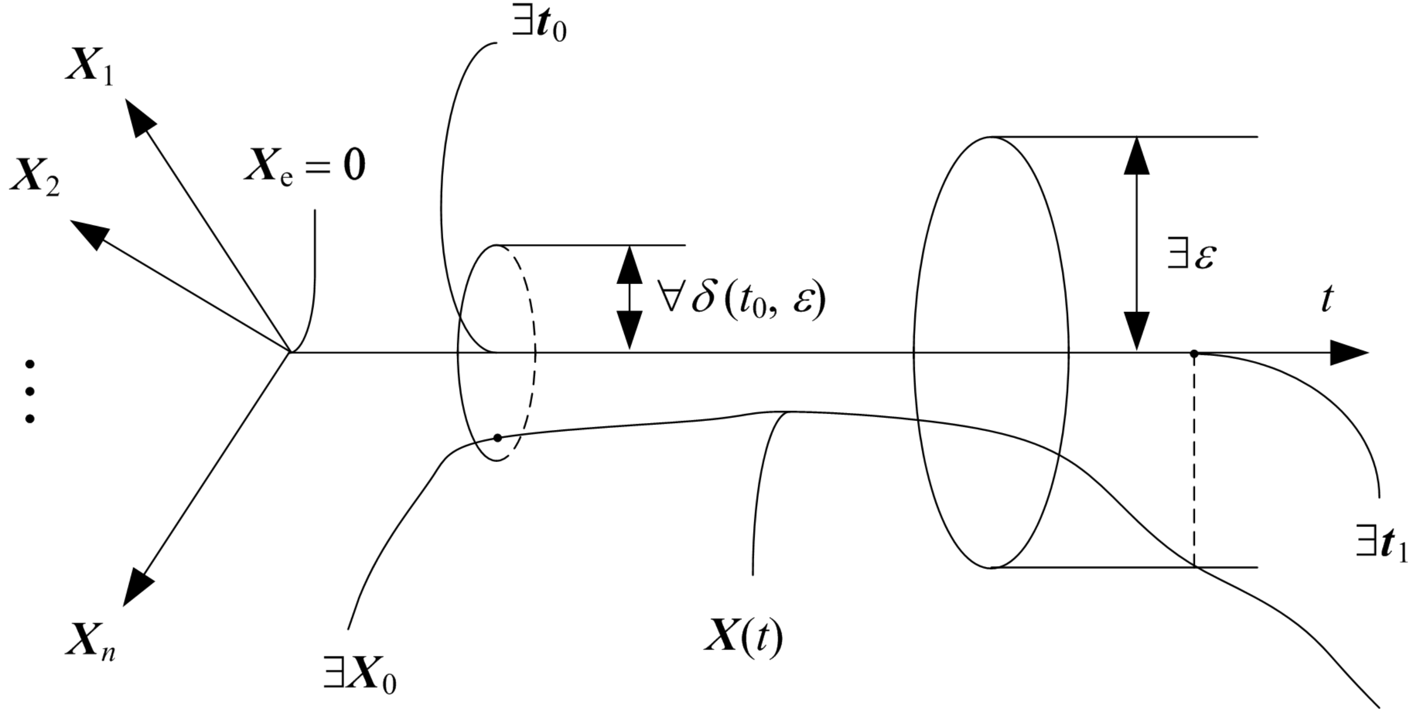
2）李稳定的定义未必规定 $X(t)$最终收敛到 X_e ；

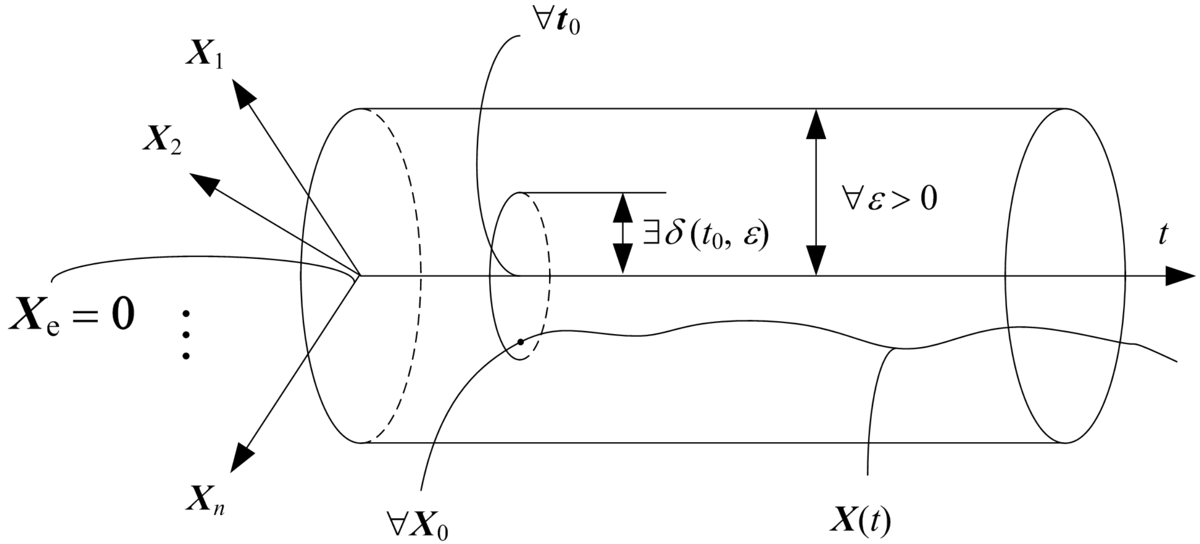
3）李稳定的定义只对半径为$\delta(t_0,\varepsilon)$的超球内出发的运动稳定，因此，李稳定属于局部稳定性；

4）若$\delta(t_0,\varepsilon)$的选取与t_0无关，即$\exists\delta(t_0,\varepsilon) \Rightarrow \exists\delta(\varepsilon)$，则$X_e$是李一致稳定的。

跳过本节

定义(不稳)：系统 $\dot{X}(t)=f\left(X(t),t\right)$ 的一个平衡态 X_e 不稳定/完全不稳定，指 $\exists t_0$，$\exists \varepsilon>0$，对 $\forall \delta(t_0,\varepsilon)>0$，$\exists X_0$/$\forall X_0$，$\left\|X_0-X_e\right\|<\delta(t_0,\varepsilon)$，$\exists t_1\ge t_0$，当 $t>t_1$ 时，有 $\left\|X(t)-X_e\right\|>\varepsilon$。



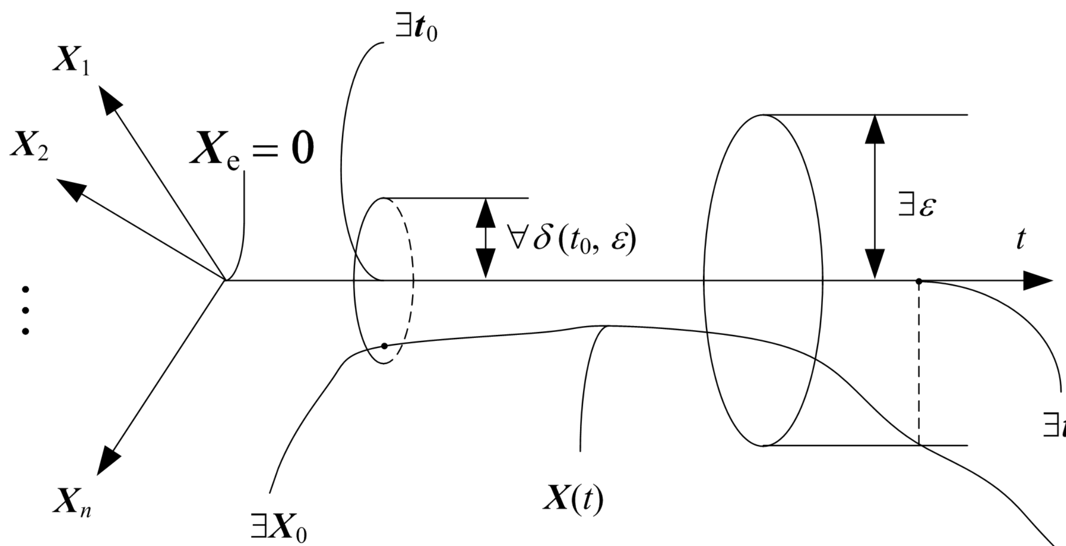


说明：

∃与∀互换，

则：李稳定

$\xleftrightarrow{a}$ 李不稳。



定义(吸引)：称系统 $\dot{X}(t)=f\left(X(t),t\right)$ 的一个平衡态 X_e 是吸引的，指 $\forall t_0\geq\tau$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(t_0)>0$，$\exists T(t_0,\varepsilon,X_0)>0$，使当 $\|X_0-X_e\|<\delta(t_0)$、$\forall t\geq t_0+T(t_0,\varepsilon,X_0)$ 时，有 $\|\phi(t,X_0,t_0)-X_e\|<\varepsilon$。

注1：与李稳相比，δ 的选择与 ε 无关，且多了一个条件 $\exists T(t_0,\varepsilon,X_0)$；因此，若取 $\varepsilon\to0$，则可能 $T(t_0,\varepsilon,X_0)\to\infty$。

即：X_e 的吸引性，意味着 $X(t)$ 渐近于 X_e；换言之，亦即：$X(t)$ 最终回到平衡态 X_e。

注2：X_e 吸引，不一定能导致 X_e 李稳定。

注3：若 δ、T 选择与 t_0、X_0 无关，则称 X_e 为一致吸引的；再若 δ 可以任意大，则为全局一致吸引的。

定义(李渐稳)：X_e是系统 $\dot{X}(t)=f\left(X(t),t\right)$的一个平衡态，

则X_e的**李渐稳**、**一致渐稳**、**全局一致渐稳**定义为：

(1) X_e渐稳 $\Leftrightarrow$ X_e稳定，X_e吸引

(2) X_e一致渐稳 $\Leftrightarrow$ X_e一致稳定，X_e一致吸引

(3) X_e全局一致渐稳 $\Leftrightarrow$ X_e一致稳定，X_e全局一致吸引

全局一致渐近稳定 $\Rightarrow$ 一致渐近稳定

一致渐近稳定 $\Rightarrow$ 一致稳定 $\Rightarrow$ 稳定

一致渐近稳定 $\Rightarrow$ 渐近稳定 $\Rightarrow$ 稳定

3. 李稳定判据

定理7：LTI系统 $\dot{\mathrm{X}}(t)=\mathbf{A}\,\mathrm{X}(t)$的李稳等价关系为：

(1)一致稳定 $\Leftrightarrow$ 稳定；

(2)渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 一致渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 全局一致渐近稳定。

定理8：LTI系统 $\dot{\mathrm{X}}(t)=\mathbf{A}\,\mathrm{X}(t)$,

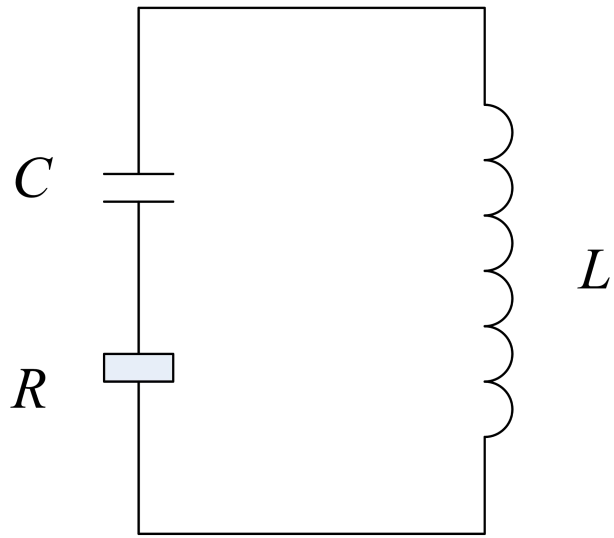
X_e=0 李稳定 $\Leftrightarrow$ **A**的特征根$\lambda_i \in \pi_\ell^+$ (左半闭)，$\forall i$,

虚轴上重根对应的约旦子块阶数为1。

定理9：LTI系统 $\dot{\mathrm{X}}(t)=\mathbf{A}\,\mathrm{X}(t)$,

X_e=0 渐近李稳定 $\Leftrightarrow$ **A**的$\forall\lambda_i \in \mathbf{\Lambda}(\mathbf{A}) \subset \pi_\ell^-$ (左半开)，$\forall i$。

- **当$R=0$时，系统是李稳定的，但不是渐近稳定的；当$R\neq0$时，系统是渐近稳定的，也是李稳定的。**



4. 渐近稳定与BIBO稳定的关系

(1) 零状态线性系统BIBO稳定 $\Leftrightarrow$

传输函数阵极点$P_i \in \Pi_\ell^-$；即$P \subset \Pi_\ell^-$。

(2) 线性定常系统渐近稳定 $\Leftrightarrow \Lambda(\mathrm{A}) \subset \Pi_\ell^-$

由于$P \subset \Lambda$，则有如下结论：

LTI系统渐近稳定 $\Rightarrow$ 系统BIBO稳定，反之未必然。

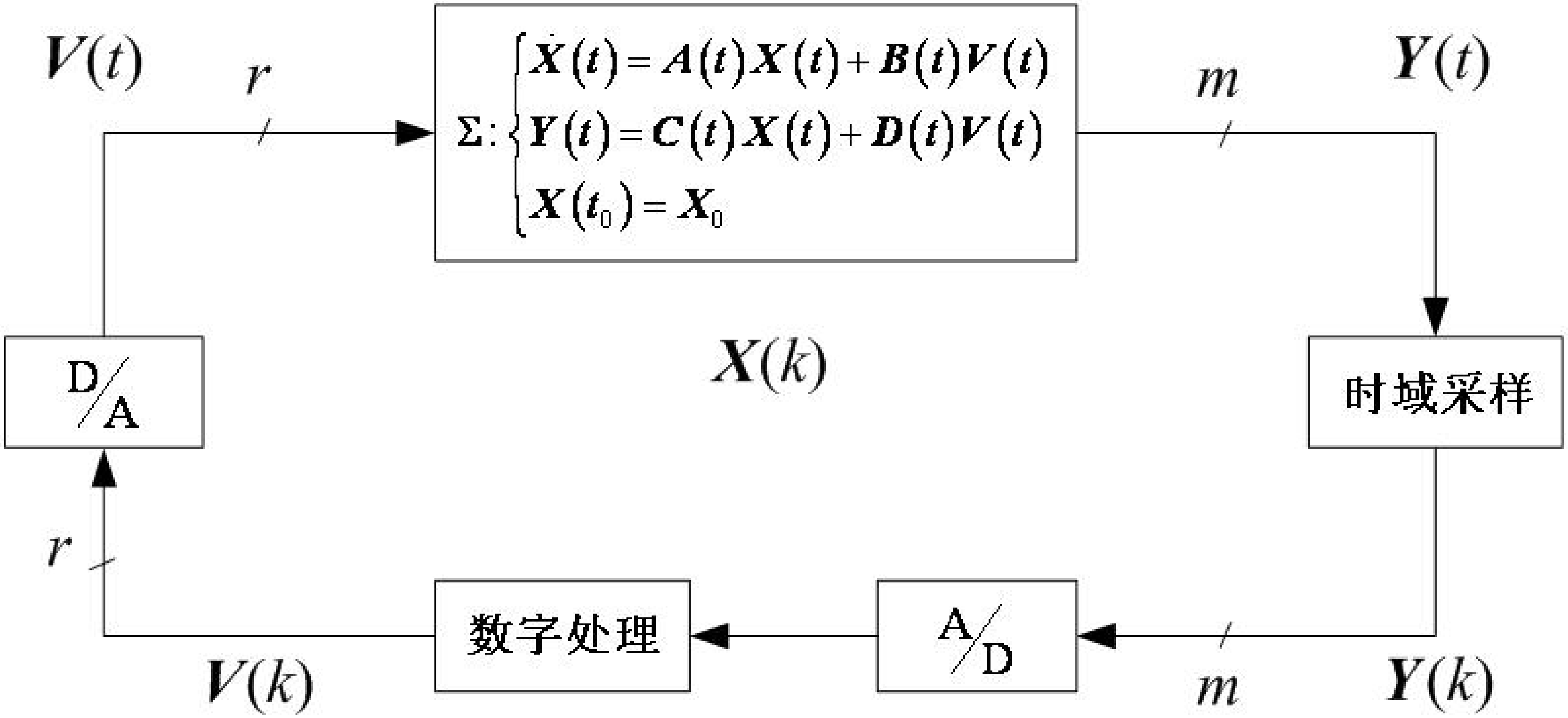
LTI系统状态完全可控且完全可观，

则：I/O描述 $\Leftrightarrow$ SS描述；

且：渐近稳定 $\Leftrightarrow$ BIBO稳定。

§ 9.7 CT-L系统状态空间方程离散化

1. 问题的背景：求解 Σ与 Σ_Δ的对应关系。



2. 基本假设：Σ与 Σ_{Δ}的对应关系。

(1) 均匀周期采样，且$\mathrm{Y}(k)=\begin{cases}\mathrm{Y}(t) & t=kT \\ \mathbf{0} & t\neq kT\end{cases}$

(2) 采样频率 $f_s=\dfrac{1}{T}$满足$Nyquist$采样定理

(3) D/A为零阶保持器，即$\mathrm{V}(t)=\mathrm{V}(k)$，$kT\le t\le(k+1)T$。

3. Σ与 Σ_Δ的基本关系

定理10：系统 $\Sigma\{A(t),B(t),C(t),D(t)\}$，$X(0)=X_0$，在基本假设下离散化为 $\Sigma_\Delta\{G(k),H(k),C(k),D(k)\}$：

$$\begin{cases} X(k+1)=G(k)X(k)+H(k)V(k) \\ Y(k)=C(k)X(k)+D(k)V(k) \\ X(0)=X_0 \qquad k=0,1,2,\cdots,p \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(k)=\Phi\left[(k+1)T,kT\right]\overset{\Delta}{=}\Phi(k+1,k) \\ H(k)=\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi\left[(k+1)T,\tau\right]B(\tau)\,d\tau \end{cases},\quad \begin{cases} C(k)=\left[C(t)\right]_{t=kT} \\ D(k)=\left[D(t)\right]_{t=kT} \end{cases}$$

4. LTI系统离散化

定理11: **LTI系统** $\Sigma\left\{A,B,C,D\right\}$，$X(0)=X_0$，

离散化为 $\Sigma_\Delta\left\{G,H,C,D\right\}$

其中：$G=\mathbf{\Phi}(T)=e^{AT}$

$$H=\left[\int_0^T e^{At}\,dt\right]B$$

注1：时间量化(离散化)不改变系统的时变性/定常性；

注2：$\mathbf{\Phi}(t,t_0)$非奇，无论$A(t)/A$是否非奇，离散化系统的系数矩阵$G(t)/G$一定非奇。

§9.8 DT-L系统状态空间方程的解

1. DT-L系统状态空间方程的解——迭代法

状态方程：$X(k+1)=G(k)X(k)+H(k)V(k)$，$X(0)=X_0$

$X(0)=X_0$ $\quad\{G(k)=\Phi(k+1,k)$，是一步转移算子$\}$

$X(1)=G(0)X(0)+H(0)V(0)$

$$X(2)=G(1)X(1)+H(1)V(1)$$
$$=G(1)G(0)X_0+G(1)H(0)V(0)+H(1)V(1)$$

$$X(3)=G(2)X(2)+H(2)V(2)$$
$$=G(2)G(1)G(0)X_0+G(2)G(1)H(0)V(0)$$
$$+G(2)H(1)V(1)+H(2)V(2)$$

……

$$\begin{aligned}X(k)=&G(k-1)\cdots G(0)X_0+G(k-1)\cdots G(1)H(0)V(0)\\&+G(k-1)\cdots G(2)H(1)V(1)+\cdots\\&+G(k-1)H(k-2)V(k-2)+H(k-1)V(k-1)\end{aligned}$$

定义（状态转移阵）：$\Phi(k,m)$称为离散系统状态转移阵。

注意：$\Phi(k,k-1)=G(k-1)$ 是一步转移算子。

$\Phi(k,0)=G(k-1)\cdots G(0)$，表示第0步到第$k$步依存关系。

则：$\Phi(k,m)=G(k-1)G(k-2)\cdots G(m)$

$$\Phi(k+1,m)=G(k)G(k-1)\cdots G(m)=G(k)\Phi(k,m)$$

$$\Phi(m,m)=I$$

$$\Phi(k,k-1)=G(k-1)$$

因此，状态迭代式变成：

$$X(k)=\mathbf{\Phi}(k,0)X_0+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}(k,i+1)H(i)V(i)$$

或：$$X(k)=\mathbf{\Phi}(k,0)X_0+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}(k,k-i)H(k-i-1)V(k-i-1)$$

（零输入 + 零状态）

输出为：

$$Y(k)=C(k)\mathbf{\Phi}(k,0)X_0+$$

$$C(k)\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}(k,k-i)H(k-i-1)V(k-i-1)+D(k)V(k)$$

2. DT-LTI系统状态空间方程的解

对于离散LTI系统 $\Sigma_{\Delta}\{G, H, C, D\}$，$X(0) = X_0$

$$G(k) = G(k-1) = G(k-2) = \cdots = G(1) = G(0)$$

状态转移阵为：$\boldsymbol{\Phi}(k, 0) \triangleq \boldsymbol{\Phi}(k) = G^k$

$$\boldsymbol{\Phi}(0, 0) \triangleq \boldsymbol{\Phi}(0) = I$$

$$\boldsymbol{\Phi}\left[(k+1) - m\right] = G\,\boldsymbol{\Phi}(k-m)$$

于是，状态方程迭代变为：

$$X(k) = G^k X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} G^{k-i-1} H\,V(i)$$

或：$X(k) = G^k X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} G^{i} H\,V(k-i-1)$

及：$Y(k) = CG^k X_0 + C\sum_{i=0}^{k-1} G^{i} H\,V(k-i-1) + D\,V(k)$

3. 脉冲响应阵、传输函数阵

考虑离散LTI系统 Σ_Δ: $\begin{cases} X(k+1) = GX(k) + HV(k) \\ Y(k) = CX(k) + DV(k) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$

z 变换得: $\begin{cases} zX(z) - zX_0 = GX(z) + HV(z) \\ Y(z) = CX(z) + DV(z) \end{cases}$

零状态 $X_0 = \mathbf{0}$，则: $Y(z) = \left[C(zI-G)^{-1}H + D\right]V(z) \overset{\Delta}{=} H(z)V(z)$

其中，$H(z) = C(zI-G)^{-1}H + D$ 为系统Σ_Δ的传输函数阵，

$H(k) = Z^{-1}\{H(z)\}$ 为系统Σ_Δ的的脉冲响应阵。

§9.9 系统的可控性与可观性

(SISO LTI系统状态空间实现)

- 可控性的通俗理解：

给定系统的任意初始状态，可以找到输入控制向量，在有限时间之内把系统的所有状态引向状态空间的原点（即零状态$X_0=0$），则系统是完全可控的；如果只能对部分状态变量可以做到这一点，则系统不完全可控。

- 可观性的通俗理解：

　　给定控制后，能在有限的时间内，根据系统输出唯一地确定系统的所有起始状态X_0。则系统完全可观；如果只能确定部分起始状态，则系统不完全可观。

- 可观测与可控制是系统分析的重要概念。

End of Chapter 9

Thx~ 4 Ur Attention.

2-B-Cont.