Chapter 7 离散信号与离散系统

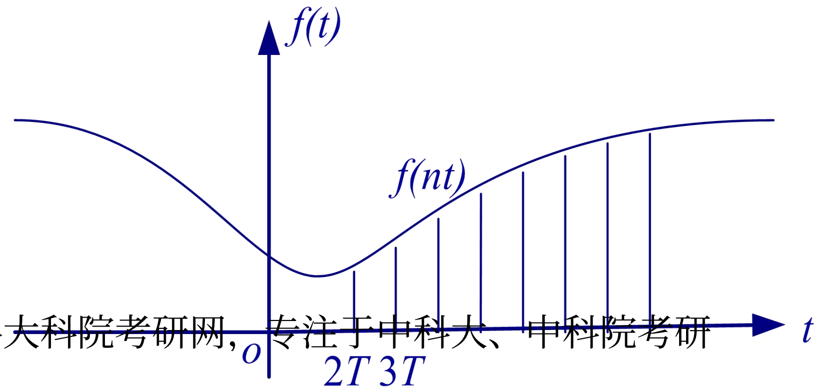
- §7.1 基本概念（书7.1、7.2、7.3、7.5）
- §7.2 线性定常系统差分方程的解（书7.4）
- §7.3 卷积（书7.6、7.7）

§7.1 基本概念

- **1. 离散时间信号——序列**
  - 定义：自变量（宗量）为离散点的信号（函数），记为 $f(n)$，$n \in Z$

$$f(\cdot)\text{的三种情况}\begin{cases}\text{离散事件所对应的信号}\\ \text{连续信号采样(取值无限精度)}\\ \text{数字信号(取值有限精度)}\end{cases}$$

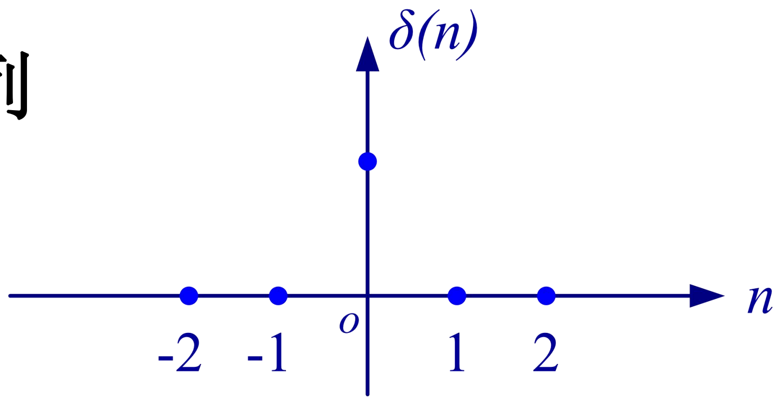
  - 连续时间信号离散化
    如图所示



§7.1 基本概念（续）

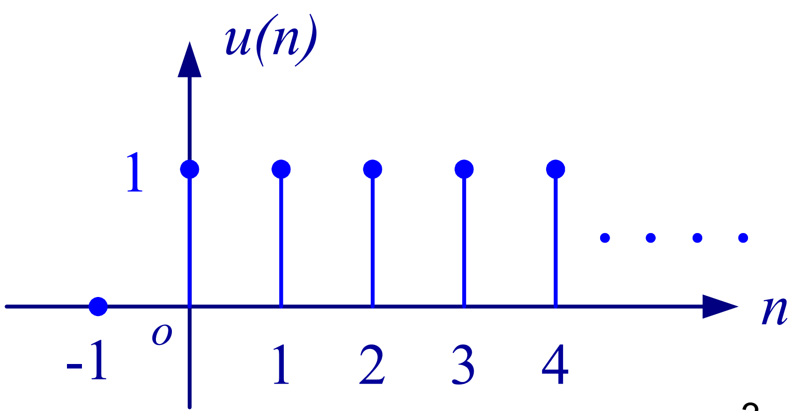
- **2. 典型序列**
  - **(1) 单位样值（冲激）序列**

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$



  - **(2) 单位阶跃序列**

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

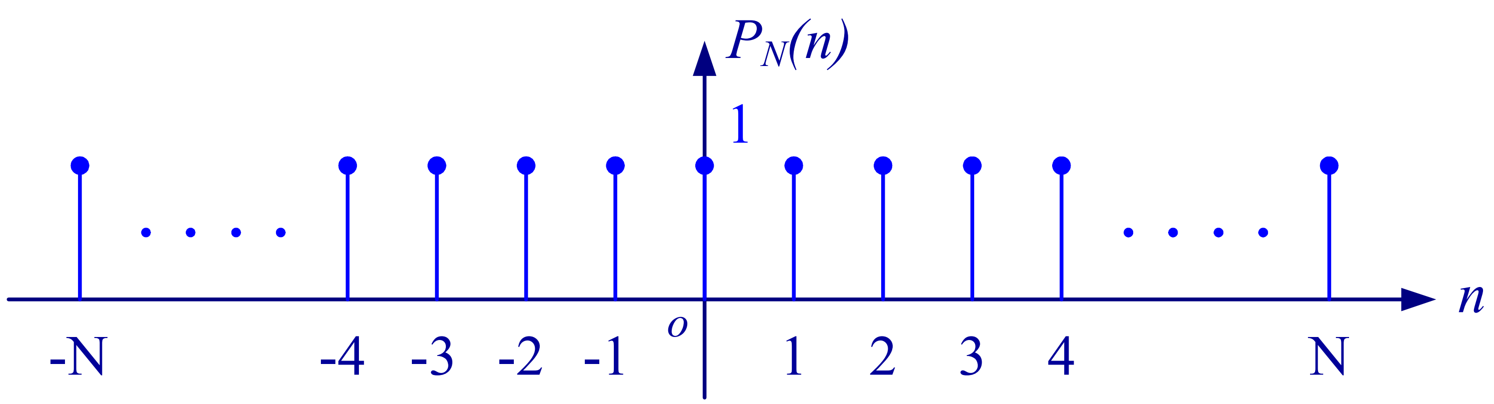


§7.1 基本概念（续）

– (3) 单位矩形序列

$$p_N(n)=\begin{cases}1, & |n|\le N\\ 0, & |n|>N\end{cases}$$

$$p_N(n)=u(n+N)-u[n-(N+1)],\qquad \text{注：} u(0)=1$$



– (4) 正弦序列：

$$f(t)=\sin\Omega_0 t$$

相角周期2π，时间周期 $T_0=2\pi/\Omega_0$。设采样周期 T_S

则有：$x(n)=f(nT_S)=\sin(nT_S\Omega_0)\triangleq\sin n\omega_0$

Ω_0，是连续正弦信号的角频率，每秒走过的弧度，rad/s

ω_0，是离散正弦序列的角频率，每采一点走过的弧度

$\omega_0=T_S\Omega_0$，是数字角频率，单位是每点弧度，rad/pt

$\omega_S=2\pi f_S=2\pi/T_S$，是抽样角频率　　举例

$\omega_0=T_S\Omega_0=\Omega_0/f_S$，是$f_S$对$\Omega_0$的归一化

§7.1 基本概念（续）

- (5) 复指数序列

$$x(n)=e^{jn\omega_0}=\cos(n\omega_0)+\mathrm{j}\cdot\sin(n\omega_0)$$

$$|x(n)|=1,\ \arg[x(n)]=n\omega_0$$

- 3. 信号分解

$$x(m)\delta(n-m)=\begin{cases}x(n), & m=n\\ 0\ , & m\neq n\end{cases}$$

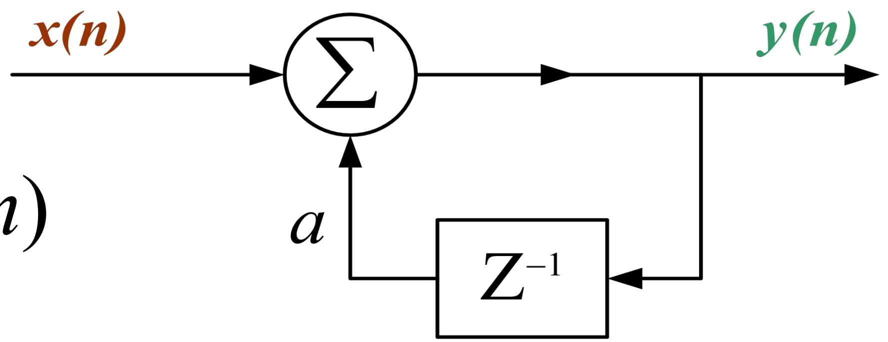
$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m)\triangleq x(n)*\delta(n)$$

卷积和

§7.1 基本概念（续）

- **4. 离散系统模型**

例：$y(n) - a\,y(n\text{-}1) = x(n)$



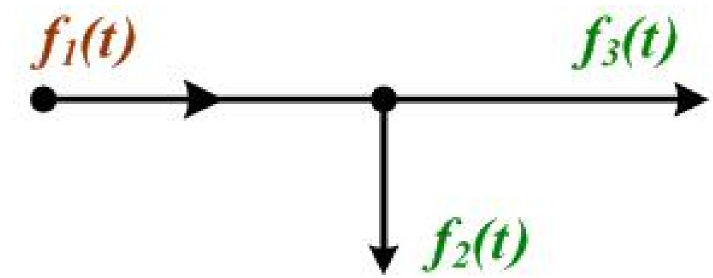
– 求和：

– 相乘：

§7.1 基本概念（续）

– 分支：

$$f_1(t)=f_2(t)=f_3(t)$$



– 一步延迟(一步右移)算子：

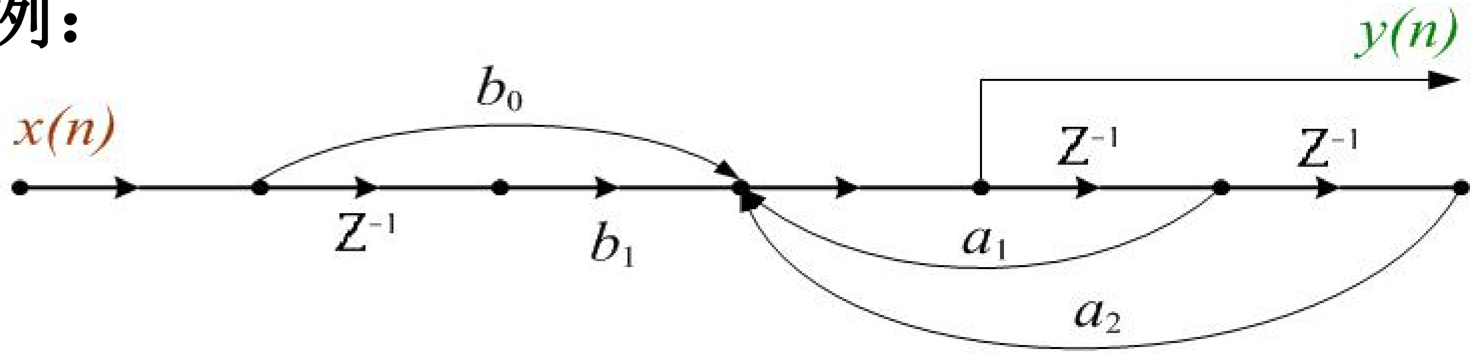
$$z^{-1}x(n)=x(n-1)$$

$$z^{-m}x(n)=x(n-m)$$

§7.1 基本概念（续）

– 一步导前（一步左移）算子：$z\,x(n)=x(n+1)$

– 例：



由上图：$y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)$

即：$y(n)-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)=b_0x(n)+b_1x(n-1)$

n 以递减方式给出，称为后向差分方程；

n 以递增方式给出，称为前向差分方程。

– 差分方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \qquad (*)$

– 零 状 态：$y(-1)$，$y(-2)$，……，$y(-N) \equiv 0$

– 零状态线性系统：$x(n) \longrightarrow \boxed{\mathrm{L}} \longrightarrow y(n)$

$$y(n) = \mathrm{L}x(n)$$

线性系统：$\mathrm{L}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i(n) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathrm{L}x_i(n)$

由算子符：$y(n-k) = z^{-k} y(n)$，$x(n-r) = z^{-r} x(n)$

$(*)$式化为：$\left[\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right] y(n) = \left[\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\right] x(n) \qquad (**)$

§7.1 基本概念（续）

重写系统差分方程：

$$\left[\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right] y(n) = \left[\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\right] x(n) \qquad (**)$$

则：$$y(n) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} x(n) \triangleq H\left(z^{-1}\right) x(n)$$

系统算子：$\mathrm{L} = H\left(z^{-1}\right)$；

阶：差分方程未知序列的最高与最低序号差。

§7.1 基本概念（续）

- **5. 系统响应 = 零状态响应 + 零输入响应**

零状态响应$y_{zs}(n)$：由系统输入产生的响应。

此时：$y(-1)$，$y(-2)$，……，$y(-N)\equiv 0$。

零输入响应$y_{zi}(n)$：由初始状态

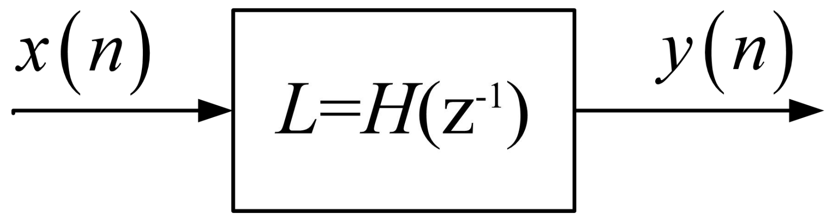
$y(-1)$，$y(-2)$，……，$y(-N)\neq 0$ 产生的响应。

此时：$x(n)\equiv 0$。

系统响应：$y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)$

§7.1 基本概念（续）

- **6. 单位样值响应 $h(n)$：**



$$h(n)\overset{\text{零状态}}{=}\mathrm{L}\delta(n)\overset{\text{线性定常}}{=}H\left(z^{-1}\right)\delta(n)$$

定常： $h(n)=\mathrm{L}\delta(n)\Leftrightarrow h(n-m)=\mathrm{L}\delta(n-m)$

$$\because\ x(n)=x(n)*\delta(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m)$$

$$\therefore\ y_{zs}(n)=\mathrm{L}x(n)\overset{\text{线性}}{=}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\mathrm{L}\delta(n-m)$$

$$\overset{\text{定常}}{=}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

§7.1 基本概念（续）

- **7. 因果系统：** $h(n)=h(n)u(n)$
  - 因果序列： $f(n)=f(n)u(n)$
  - **BIBO稳定：**

线性离散时间系统**BIBO**稳定 $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|h(n,m)\right|<\infty$

若系统定常，则系统**BIBO**稳定 $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|h(n)\right|<\infty$

稳定信号$f(n) \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|f(n)\right|<\infty \Leftrightarrow f(n)\in l^1(-\infty,+\infty)$

§ 7.2 线性定常系统差分方程的解

差分方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$

- **1. 迭代方法：**

已知：$y(n) = ay(n-1) + x(n)$，$x(n) = \delta(n)$，$y(-1) = 0$

求：$y(n) = h(n) = ?$

解：$y(0) = ay(-1) + \delta(0) = 1$

$y(1) = ay(0) + \delta(1) = a$

$y(2) = ay(1) + \delta(2) = a^2$

……

$y(n) = a^n u(n)$

§ 7.2 线性定常系统差分方程的解

- 差分方程描述了一种递推形式
- 迭代法的代数原理：

差分方程：$AY = X$，A 是$n \times n$矩阵，$A = A_{n\times n}$

给定：A、X，求 $Y = ?$

构造：$AY - Y + Y = X$

则有：$Y_{n+1} = (I - A)Y_n + X$

若：$B = I - A$ 满足一定条件，则对 $\forall\, Y_0$

$$Y_0 \Rightarrow Y_1 \Rightarrow Y_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow Y_n = Y,\quad n \to \infty$$

§7.2 线性定常系统差分方程的解

- **2. 经典方法：** 全解 = (齐次解 + 特解)$|_{初始条件}$
  - 先求齐次解的形式：

$$y(n)+a_1y_1(n-1)+\cdots+a_Ny_N(n-N)=0$$

令 $y(n)=C\alpha^n$

$\alpha^N+a_1\alpha^{N-1}+\cdots+a_{N-1}\alpha+a_N=0$ 为特征方程，

Case I：$\alpha_1,\cdots,\alpha_N$为N个不同特征根，则

$$y_{齐}(n)=\left[C_1\alpha_1^n+\cdots+C_N\alpha_N^n\right]u(t)=\left[\sum_{i=1}^{N}C_i\alpha_i^n\right]u(t)$$

Case II：α_i是k重根，其对应的解有k项

§7.2 线性定常系统差分方程的解

– 求特解（见下页几种情况）：

例：$x(n)=n^k$，则特解为$D(n)=D_k n^k+\cdots+D_1 n+D_0$

代入原始差分方程求得$D_0,\cdots,D_k$。

– 求完全解：$y(n)=\left[\sum_{i=1}^{N}C_i\alpha_i^n+D(n)\right]u(n)$

– 求系数：

代入$y(0),y(1),\cdots,y(N-1)$，确定$C_1,\cdots,C_N$，

其中：$y(0),y(1),\cdots,y(N-1)$由$y(-1),\cdots,y(-N)$

迭代得到。$n=0$时刻接入激励，改变了初态。

§ 7.2 线性定常系统差分方程的解

线性时不变系统输出与输入有相同的形式：

输入	输出特解
$x(n) = Ae^{\alpha n}$	$y(n) = Ae^{\alpha n}$
$x(n) = e^{j\omega n}$	$y(n) = Ae^{j\omega n}$
$x(n) = \cos\omega n$	$y(n) = A\cos(\omega n + \theta)$
$x(n) = \sin\omega n$	$y(n) = A\sin(\omega n + \theta)$
$x(n) = n^k$	$y(n) = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$x(n) = u(n)$	$y(n) = C$
$x(n) = r^n$	$y(n) = Cr^n$ （r 不是特征根）
$x(n) = r^n$ （r 与特征根重）	$y(n) = C_1 n r^n + C_2 r^n$

§ 7.2 线性定常系统差分方程的解

- **3. 零输入响应、零状态响应分解：**

$$y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)$$

– 零输入响应： $x(n)=0 \ \Rightarrow \ D(n)=0$

$$y_{zi}(n)=\sum_{i=1}^{N}C_i\alpha_i^n\Big|_{\text{代入}y(-1),\cdots,y(-N)}$$

– 零状态响应： $y(-1),\cdots,y(-N)\equiv \mathbf{0}$

$$y_{zs}(n)=\left[\sum_{i=1}^{N}B_i\alpha_i^n+D(n)\right]u(n)$$

由 $\left[y(-1),\cdots,y(-N)\right]^T$ 迭代得到 $\left[y(0),y(1),\cdots,y(N-1)\right]^T$

代入得到 $B_i,\ i=1,\cdots,N$

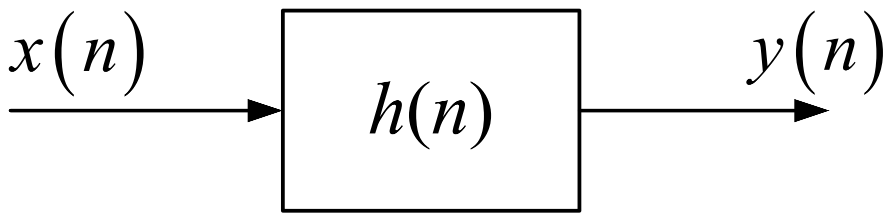
§7.2 线性定常系统差分方程的解

- N阶差分方程有N个独立的边界条件

  如，y(-1)、y(-2)、……、y(-N+1)、y(-N)。
- 与连续系统比较，两相邻点之差决定一阶导数；三个相邻点差值之差决定二阶导数。
- 离散系统没有0-、0_+概念。一般认为，y(-1)、y(-2)、……、y(-N)是激励加入之前的系统储能，相当于连续系统的0-；由此0-，与输入序列共同作用，迭代得到y(0)、y(1)、y(2)、……、y(N-1)，相当于0_+
- 零输入时，系统的响应决定于0-的初始储能。
- 有输入时，系统的响应由初始储能与输入激励共同作用产生，因此求系数时应该用0_+的边界条件。

§ 7.3 卷积

- **1. 卷积**



$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)$$

$$h(n)=h(n)*\delta(n)=L\left[\delta(n)\right]$$

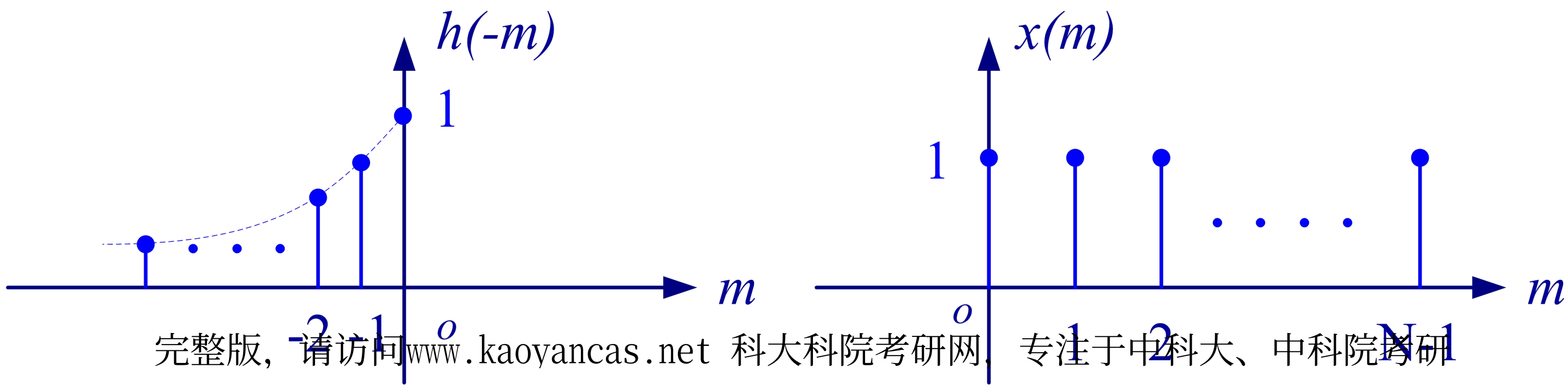
– 例：已知：$h(n)=a^n u(n)$，$x(n)=u(n)-u(n-N)$

求：$y(n)=?$ $\quad (0<a<1)$

– 解：$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m)$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a^{n-m}u(n-m)\cdot\left[u(m)-u(m-N)\right]$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{n} a^{n-m}=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0\le n\le N-1\\ \sum\limits_{m=0}^{N-1} a^{n-m}=\dfrac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}a^n=\dfrac{1-a^N}{1-a}a^{n-N+1}, & n\ge N-1\end{cases}$$

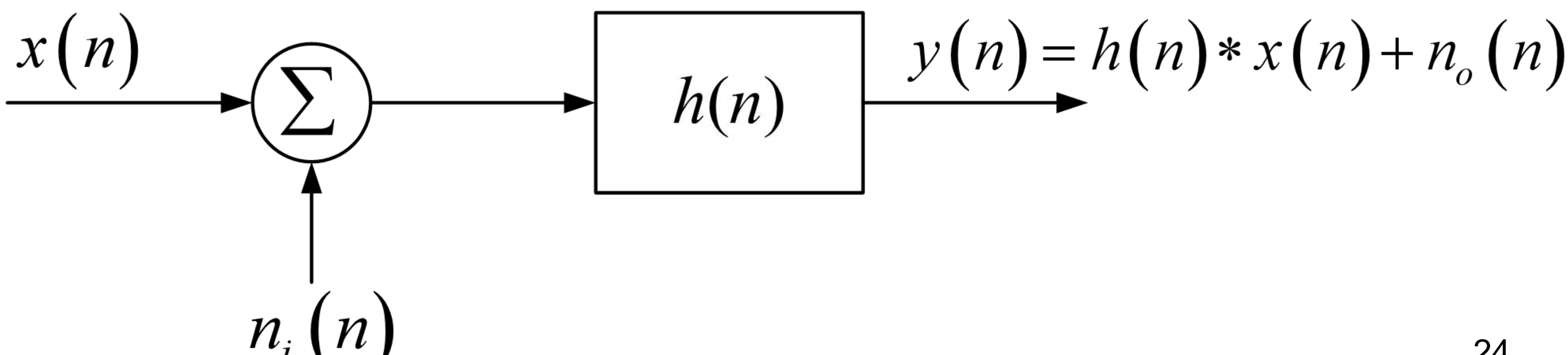


- **2. 反卷积**
  - **问题：** $y(n)=h(n)*x(n)$

    卷积： 已知$h(n)$、$x(n)$，求$y(n)$

    反卷积： 已知$y(n)$、$h(n)$，求$x(n)$；或者

    已知$y(n)$、$x(n)$，求$h(n)$
  - **病态反卷积：存在性、唯一性、连续性**



– 求系统的方法：伪随机信号输入

伪随机信号 $x(n)$ $\longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow$ $y(n)$

$$y(n)=h(n)*x(n)$$

$$R_{xx}(n)=x(n)*x^{*}(-n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)x^{*}(m-n)$$

若$x(n)$ 是伪随机序列，则有 $R_{xx}(n)=N\cdot\delta(n)$

表明$x(n)$具有理想的相关特性。

此时， $R_{yy}(m)=R_{xx}(m)*R_{hh}(m)\ =N\cdot R_{hh}(m)$

即通过测量输出的自相关特性，可推测系统特性。

End of Chapter 7

Thx~ 4 Ur Attention.

正弦信号采样举例：

返回

$f_1(t)=\sin\Omega_1 t=\sin 2\pi t$，每秒一个周期，$T_1=1$秒

$f_2(t)=\sin\Omega_2 t=\sin 4\pi t$，每秒两个周期，$T_2=0.5$秒

设采样率为 $f_S=10Hz$，每秒钟采10个点，$T_S=0.1$秒

$x(n)=f(nT_S)=\sin(nT_S\Omega)\triangleq\sin n\omega$，$\omega$单位是弧度/点

$\omega_1=T_S\Omega_1=0.2\pi$，10个点构成一个$2\pi$周期

$\omega_2=T_S\Omega_2=0.4\pi$， 5个点构成一个$2\pi$周期

引入数字角频率ω，便于得到每周期采样点数！

Ω，是连续正弦信号的角频率，每秒走过的弧度

ω，是离散正弦序列的角频率，每采一点走过的弧度

$\omega=\Omega/f_S$，f_S对Ω归一化：$\dfrac{\text{弧度/秒}}{\text{点数/秒}}=\text{弧度}/\text{点}$