

Chapter 5 拉普拉斯变换

- § 5.1 定义、存在性 pp2-9
- § 5.2 性质 pp10-16
- § 5.3 拉普拉斯逆变换 pp17-24
- § 5.4 系统函数 pp25-35
- § 5.5 线性定常系统频率响应 pp36-41
- § 5.6 BIBO稳定性 pp42-45
- § 5.7 全通系统/最小相移系统 pp46-50

§ 5.1 定义、存在性

- 问题的提出：信号 $f(t)$ 的傅里叶变换不存在！

有些信号 $f(t) \notin L^1[-\infty, +\infty]$ ，如 $\text{sgn}(t) \notin L^1$ ，

$$\mathbf{F} \{ \text{sgn}(t) \} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbf{F} \{ e^{-\sigma|t|} f(t) \}, \quad \sigma > 0。$$

考虑用 $e^{-\sigma t}$ 将信号衰减，即将 $e^{-\sigma t}$ 纳入积分核 $e^{-j\omega t}$ 。

对因果信号 $f(t) = f(t)u(t)$ ，指数衰减后的 FT 为：

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \{ e^{-\sigma t} f(t) \} &= \int_0^{\infty} [f(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\ &= F(\sigma + j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s), \quad s = \sigma + j\omega \end{aligned}$$

• 定义：信号 $f(t)$ 的(单边)拉普拉斯变换

$$\mathcal{L} \{f(t)\} \triangleq \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \triangleq F(s)$$

$$= \int_0^{+\infty} [f(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \quad (s = \sigma + j\omega)$$

$$\therefore f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{(\sigma+j\omega)t} ds$$

$$\text{即：} f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \triangleq \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$$

- 定义(指数阶函数)：

$f(t)$ 分段连续，存在有限个第一类间断点，

$\exists M > 0, T > 0$ ，对 $\forall t > T$ ，使 $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}$ ，

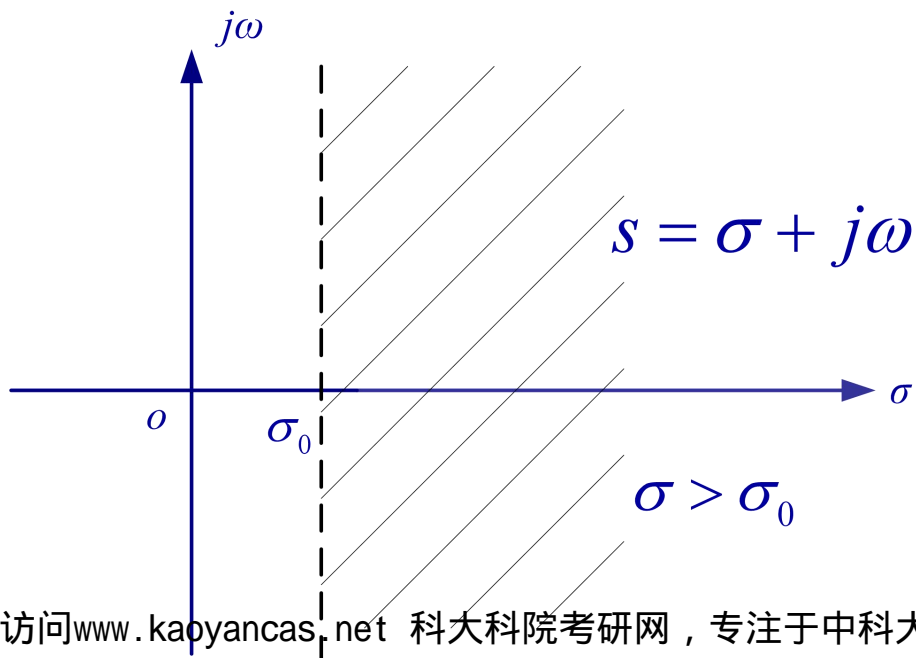
则称 $f(t)$ 为指数阶函数，并有 $f(t) = \mathcal{O}(e^{\sigma_0 t})$ 。

- $F(s)$ 存在，指 $|F(s)| < \infty$ 。

- 命题：指数阶信号存在拉氏变换。

证明：

- $p(t)e^{\alpha t}$ 为指数阶信号，其中 $p(t)$ 为多项式。
- $e^{t^2}, e^{t^3}, \dots, t \geq 0$ 为非指数阶信号。
- σ_0 为收敛坐标，过 σ_0 垂直于 σ 轴的垂线为收敛轴， $\sigma > \sigma_0$ 为收敛域。



• 例1：阶跃函数

$$f(t) = u(t) \leq Me^{\sigma_0 t}, \quad M = 1, \quad \sigma_0 = 0, \quad T = 0$$

$u(t) \leq 1 \cdot e^{0t}$ ，当 $\sigma > \sigma_0 = 0$ 时，收敛

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-(\sigma+j\omega)t}}{-s} \Bigg|_{t=0}^{+\infty} \stackrel{\sigma > 0}{=} \frac{1}{s}$$

• 例2：负指数函数

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{\alpha+s} \Bigg|_{t=0}^{+\infty} \stackrel{\sigma > -\alpha}{=} \frac{1}{\alpha+s}$$

• 例3：幂次函数

$$\mathbf{L} \left\{ t^n \right\} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{n}{s} \mathbf{L} \left\{ t^{n-1} \right\}$$

$$n = 0, \quad \mathbf{L} \left\{ u(t) \right\} = \frac{1}{s}$$

$$n = 1, \quad \mathbf{L} \left\{ tu(t) \right\} = \frac{1}{s^2}$$

$$n = 2, \quad \mathbf{L} \left\{ t^2 u(t) \right\} = \frac{2}{s^3}$$

$$n = n, \quad \mathbf{L} \left\{ t^n u(t) \right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

- 积分下限：当 $f(t)$ 在 $t=0$ 处是第一类间断点、冲激函数或其高阶导数时，则积分下限为

$$F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \} = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

– 注1：若0点有跳变，则

$$f'(t)|_{t=0} \sim \delta(t), f''(t)|_{t=0} \sim \delta'(t), \dots$$

– 注2：解微分方程的初(边)值问题，用0-作下限。
避免了从0-求0+的繁琐。

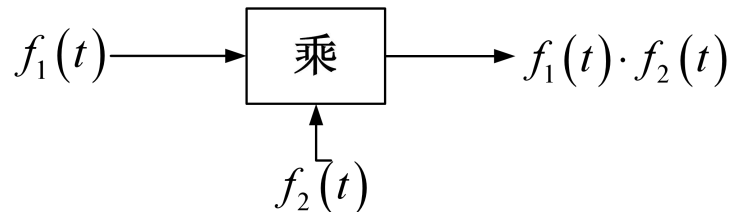
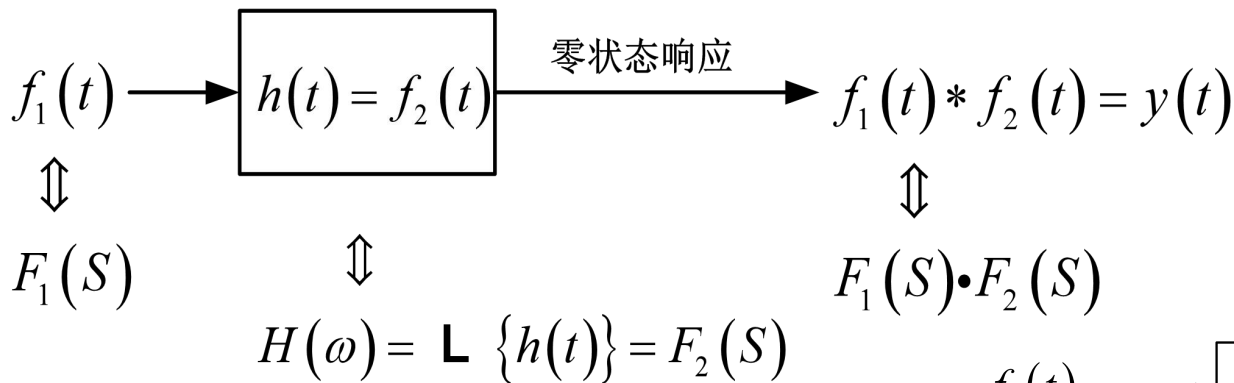
- 学习时须关注的内容：
 - 关于LT的存在性问题，考虑一般函数形式
 - 关于LT的积分下限
 - 关于LT与FT的对照关系
 - 关于LT的优点
 - 关于复频率 s 与实频率 ω 的含义
 - 关于 $f(t)$ 的微分性质之于FT、LT的适用性

§ 5.2 性质

• 1. 代数性质

– 线性：
$$\mathbf{L} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{L} \{ f_i(t) \}$$

– 卷积：
$$\mathbf{L} \{ f_1(t) * f_2(t) \} = F_1(s) F_2(s)$$



– s 域卷积：

$$\mathbf{L} \{ f_1(t) f_2(t) \} = \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(z) F_2(s-z) dz$$

• 2. 拓扑性质（微分、积分性质）：

– 微分：
$$\mathcal{L} \left\{ f'(t) \Big|_{t \geq 0_{\pm}} \right\} = sF(s) - f(0_{\pm})$$

– 对因果信号： $f(0_{\pm}) = 0$ ，则 $\mathcal{L} \{ pf(t) \} = sF(s)$

此时 p 、 s 、 $j\omega$ 作用等价： $pf(t) \Leftrightarrow j\omega F(\omega) \Leftrightarrow sF(s)$

– 高阶微分：
$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ p^2 f(t) \} &= \mathcal{L} \{ pf'(t) \} \\ &= s \left[sF(s) - f(0_-) \right] - f'(0_-) \\ &= s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-) \end{aligned}$$

特别地，当 $f(0_-) = f'(0_-) = \dots = f^{(n-1)}(0_-) = 0$ 时，

$$\mathcal{L} \{ p^n f(t) \} = s^n F(s)$$

– 积分：证明参见书

$$\mathbf{L} \left\{ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = \mathbf{L} \left\{ \frac{1}{p} f(t) \right\} = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0)$$

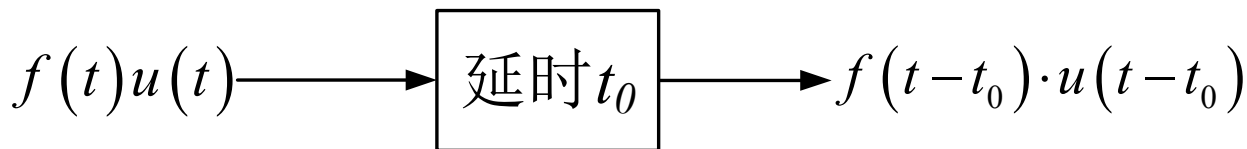
$$\text{其中： } f^{(-1)}(0) = \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau$$

– s 域（像）微分： $\mathbf{L} \{-tf(t)\} = \frac{d}{ds} F(s) \triangleq pF(s)$

– s 域（像）积分： $\mathbf{L} \left\{ \frac{1}{t} f(t) \right\} = \int_s^{\infty} F(z) dz$

• 3. 其他性质：

– 平移（延时）： $L \{ f(t-t_0)u(t-t_0) \} = e^{-st_0} L \{ f(t) \}$



– 像平移（调制）： $L \{ f(t)e^{\alpha t} \} = F(s-\alpha)$

例子： $L \{ u(t) \} = \frac{1}{s}$ ，由频移性质，可得：

$$L \{ u(t) \cos \omega_0 t \} = L \left\{ u(t) \left[\frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

– 相似（尺度变换）：
$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

– 初值定理：
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathcal{L}\{f'(t)\} \text{ 存在,}$$

则：
$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

注释：

1) s 平面无穷远点， $R = \infty$ 的所有点 \Leftrightarrow 黎曼球面北极 N 。

2) $s \rightarrow \infty \Leftrightarrow s = \sigma + j\omega \rightarrow \infty \Leftrightarrow \overset{a.e.}{\sigma} \rightarrow \infty \cap \overset{a.e.}{\omega} \rightarrow \infty$ ，四点除外

当 $s \rightarrow \infty$ 时， $\overset{a.e.}{e^{-st}} \rightarrow 0$ ，两点除外（ $j\omega$ 轴两端）

3) $f(t)$ 在零点有跳变 $\Delta = f(0_+) - f(0_-)$ ， $f(0_-) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - \Delta$

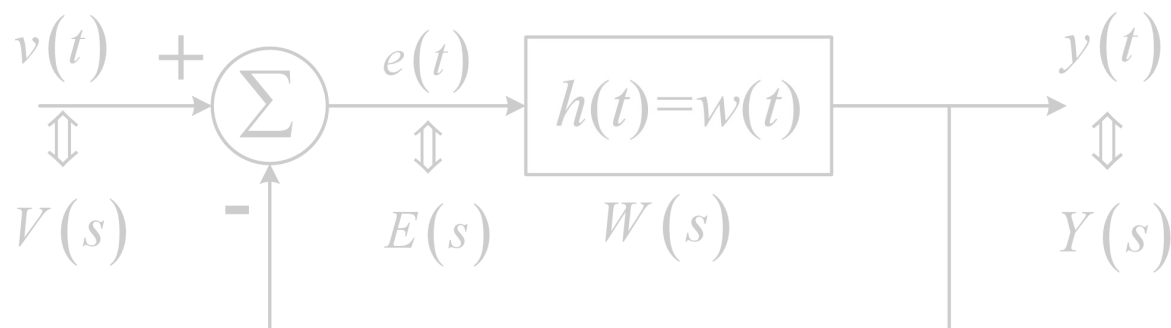
4) $f(t)$ 在零点有冲激， $f(t) = k\delta(t) + f_1(t)$ ， $F(s) = k + F_1(s)$

$$f(0_-) = f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s)$$

– 终值定理：求系统稳态

$L \{f(t)\} = F(s)$, $L \{f'(t)\}$ 存在, $sF(s)$ 在除原点外的 π_r^+ (右半闭平面) **解析**, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

– (1) 应用:



希望输出再现输入: $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - v(t)] = 0 \Leftrightarrow e(\infty) = 0$

$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{V(s)}{1 + W(s)}$ 为稳态误差 / 系统误差。

– (2) $s \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma, \omega \rightarrow 0$, 慢变信号

– (3) 终值定理条件:

$sF(s)$ 在除原点外的 π_r^+ 解析, $\pi_r^+ = \pi_r^- + \text{虚轴}$ 。

解析: 复变函数逐点可导, 相当于实函数光滑;

例: $\cos \omega_0 t \cdot u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$, 不满足终值定理条件!

$\sin \omega_0 t \cdot u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$, 不满足终值定理条件!

$e^{\alpha t} \cdot u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha}$, $\alpha > 0$, 不满足终值定理条件!

想: 初值 取决于高频成分, 终值 取决于低频成分。16
完整版, 请访问www.kaoyancas.net 科大科院考研网, 专注于中科大、中科院考研

§ 5.3 拉普拉斯逆变换

• 极点、零点：
$$F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

— $F(s)$ 的极点为 $p_i \Leftrightarrow F(p_i) = \infty$,

当 $N(s)$ 与 $D(s)$ 互素时，极点 p_i 即是 $D(s)$ 的零点。

— $F(s)$ 的零点为 $z_i \Leftrightarrow F(z_i) = 0$,

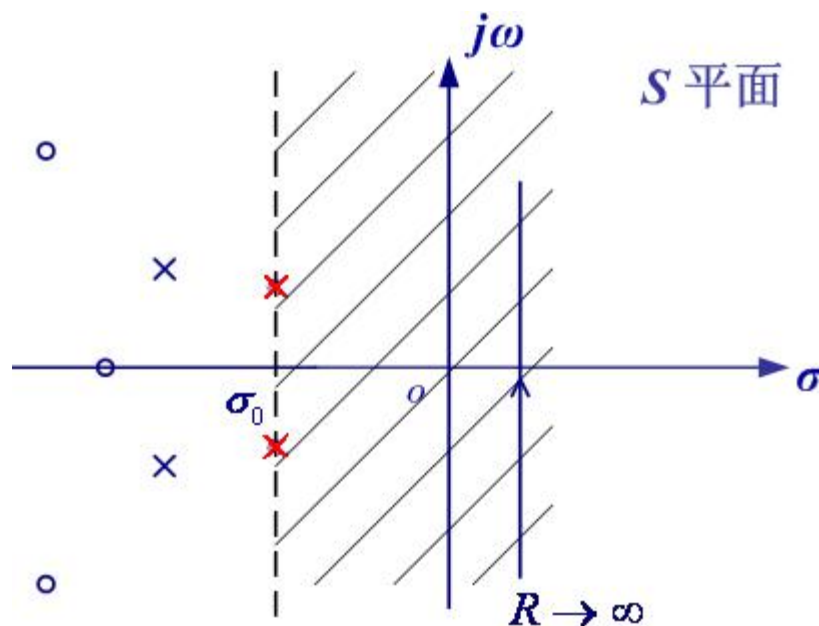
当 $N(s)$ 与 $D(s)$ 互素时，零点 z_i 即是 $N(s)$ 的零点。

• 已知 $F(s)$ ，求 $f(t)$

$$f(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\triangleq \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad \sigma > \sigma_0 = \max \operatorname{Re} p_i$$

(最右边极点)



• 方法一：留数法

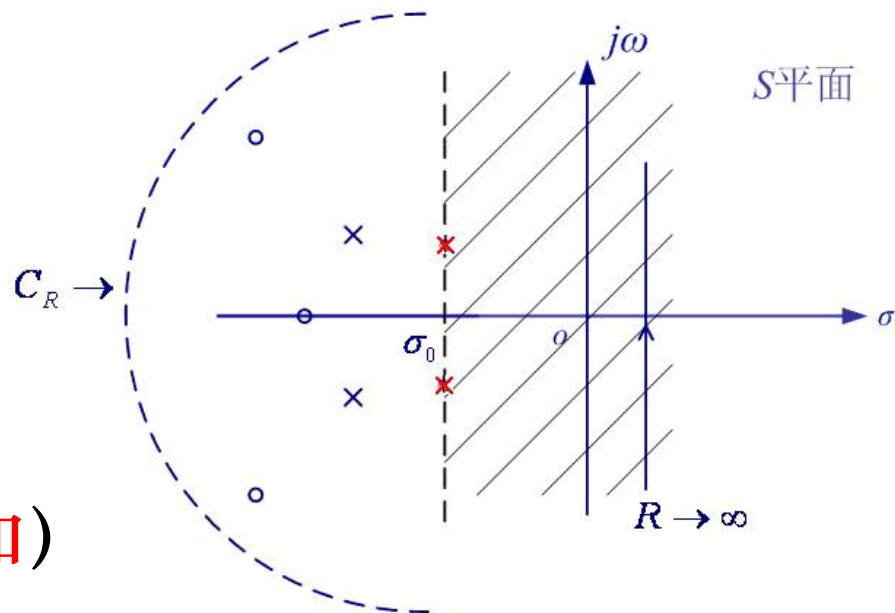
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \left\{ \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds + \int_{C_R} F(s) e^{st} ds - \int_{C_R} F(s) e^{st} ds \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \left\{ \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds + \int_{C_R} F(s) e^{st} ds \right\}$$

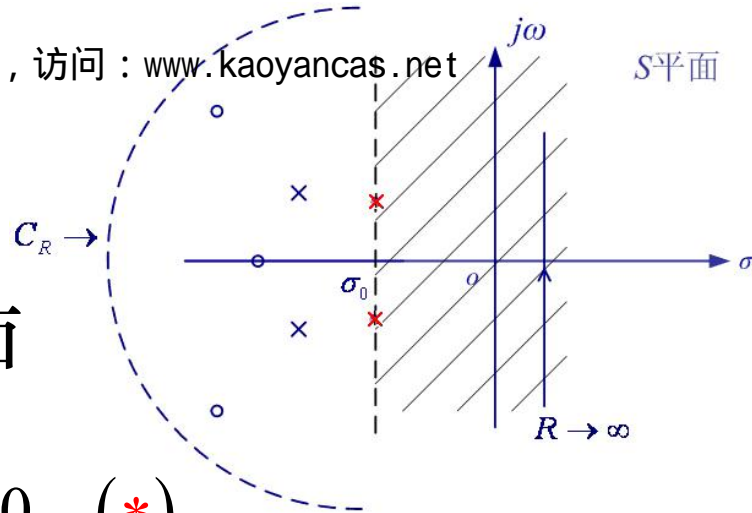
$$= \frac{1}{2\pi j} \left\{ \oint_C F(s) e^{st} ds \right\}$$

$$= \sum_i \operatorname{Res} \left\{ F(s) e^{st} \right\}_{s=p_i} u(t)$$

(围线C内全部极点的留数和)



– 说明与求解方法：



(1) 曲线 CR , $R = \infty$, 在左半平面

(2) 充要条件：
$$\frac{1}{2\pi j} \int_{CR} F(s) e^{st} ds = 0 \quad (*)$$

(3) $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, 若 $\deg N < \deg D$, 则 $(*)$ 式成立

(4) e^{st} 解析，是全纯/整函数，对 $F(s) e^{st}$ 极点没有贡献

(5) 当 $F(s)$ 不是有理函数时，须研究

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{CR} F(s) e^{st} ds = 0 \quad \text{是否成立?}$$

(6) 当 p_i 为 $F(s)$ 的一阶极点，
$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - p_i) D_0(s)}$$

则：
$$\text{Res} \left\{ F(p_i) e^{p_i t} \right\} = \left[(s - p_i) F(s) e^{st} \right]_{s=p_i} u(t)$$

(7) 当 p_i 为 $F(s)$ 的 r 阶极点，
$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - p_i)^r D_0(s)}$$

则：
$$\text{Res} \left\{ F(p_i) e^{p_i t} \right\}$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} (s - p_i)^r F(s) e^{st} \right]_{s=p_i} u(t)$$

$(r-1)$ 的阶乘分之 $(r-1)$ 阶导数

$$(8) F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad \deg N = \deg D + q$$

$$F(s) = C(s) + \frac{N_0(s)}{D(s)}$$

$$= \sum_{i=0}^q C_i s^i + \frac{N_0(s)}{D(s)}$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^q C_i \delta^{(i)}(t) + \sum_i \operatorname{Res} \left\{ \frac{N_0(s)}{D(s)} e^{st} \right\}_{s=p_i} u(t)$$

例题： $F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$ ，求 $f(t) = ?$

• 方法二：部分分式展开法

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad \deg N < \deg D$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)^r (s - p_{r+1}) \cdots (s - p_n)}$$

$D(s)$ 是 s 的多项式，存在 n 个根。

p_1 : r 阶

$p_{r+1} \neq \cdots \neq p_n$: 一阶

$$F(s) = \sum_{i=1}^r \frac{C_{1i}}{(s-p_1)^i} + \sum_{i=r+1}^n \frac{C_i}{s-p_i}$$

$$C_{1r} = \text{Res}\{F(s)\}_{s=p_1} = \left[(s-p_1)^r F(s) \right]_{s=p_1}$$

$$C_{1i} = \frac{1}{(r-i)!} \left[\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} (s-p_1)^r F(s) \right]_{s=p_1}, \quad i = r-1, \dots, 2, 1$$

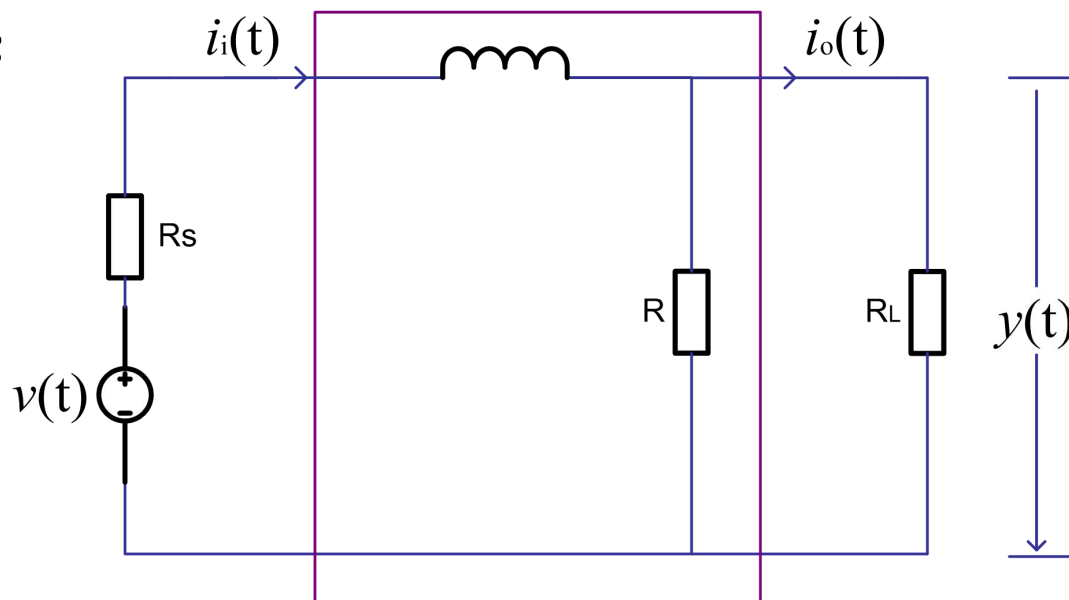
$$C_i = \text{Res}\{F(s)\}_{s=p_i} = \left\{ (s-p_i) F(s) \right\}_{s=p_i}, \quad i \in \{r+1, \dots, n\}$$

$$f(t) = \left[\sum_{i=1}^r C_{1i} \frac{1}{(i-1)!} t^{i-1} e^{p_1 t} \right] u(t) + \left[\sum_{i=r+1}^n C_i e^{p_i t} \right] u(t)$$

注意： e^{pt} 形式/模式！

§ 5.4 系统函数

- 1. 问题的提出：

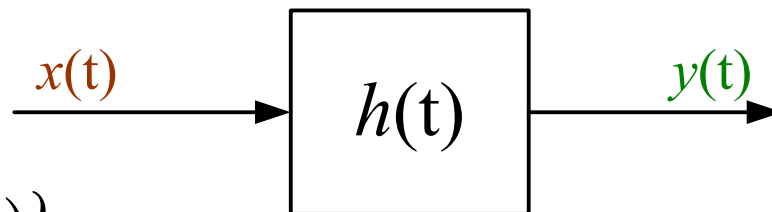


输入 $v(t)$ ，求 $i_i(t)$ 、 $i_o(t)$ 、 $y(t)$

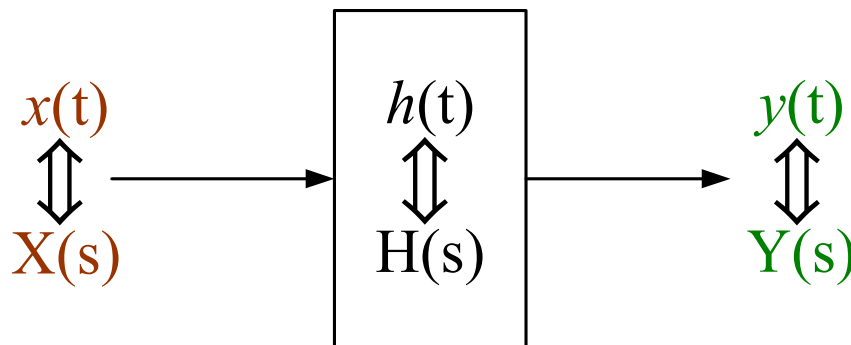
输入 $i_i(t)$ ，求 $v(t)$ 、 $i_o(t)$ 、 $y(t)$

输入/输出描述与系统求解：

$h(t)$ 为系统的冲激响应；



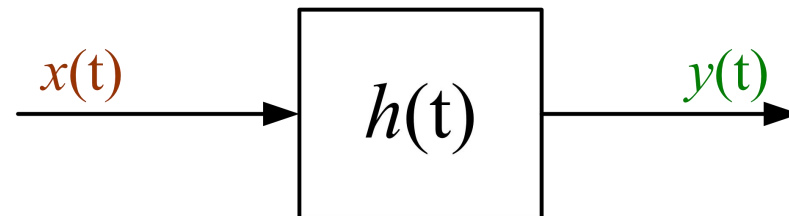
系统函数： $H(s) = \mathcal{L} \{h(t)\}$



$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$\text{零状态响应： } y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)X(s)\}$$

• 2. 系统的几种描述形式



$y(t) = H(p)x(t)$, $H(p)$ 称为系统算子 (见Ch2)

$H(s) = \mathcal{L} \{h(t)\}$, $H(s)$ 称为系统函数

$Y(s) = H(s)X(s)$, 系统的复频域输入输出描述

$H(s) \stackrel{\text{形式}}{=} H(p)|_{s=p}$, $p = \frac{d}{dt}$, $s \in$ 复平面收敛域

注：若写为 $y(t) = H(s)x(t)$, 则 s 表示微分算子

但不能写作 $Y(s) = H(s)x(t)$, 或 $y(t) = H(s)X(s)$

系统的多种输入输出描述：

冲激响应~系统算子~系统函数~微分方程描述

$h(t)$ $H(p)$ $H(s)$



零状态响应



零状态响应
非零状态响应

定义（系统函数）：

零状态响应的LT与激励的LT之比。

系统函数，也称为**网络函数**。

• 3. $H(s)$ 的零点、极点与 $h(t)$ 的特征波形函数

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad N(s) \text{ 与 } D(s) \text{ 互素}, \quad \deg N < \deg D$$

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)^r (s - p_{r+1}) \cdots (s - p_n)} \quad (\text{同前})$$

$$= \sum_{i=1}^r \frac{C_{1i}}{(s - p_1)^i} + \sum_{i=r+1}^n \frac{C_i}{s - p_i} \quad (\text{同前})$$

$$\text{则: } h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)\} = \left\{ \sum_{i=1}^r C_{1i} t^{i-1} e^{p_1 t} + \sum_{i=r+1}^n C_i e^{p_i t} \right\} u(t)$$

$$\text{重写: } h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)\} = \left\{ \sum_{i=1}^r C_{1i} t^{i-1} e^{p_1 t} + \sum_{i=r+1}^n C_i e^{p_i t} \right\} u(t)$$

说明：**模态分解**

(1) $e^{p_1 t}, te^{p_1 t}, \dots, t^{r-1} e^{p_1 t}, e^{p_{r+1} t}, \dots, e^{p_n t}$ 线性无关，与零点无关，与极点有关，称为系统的**模态**。

(2) $C_{11}, \dots, C_{1r}, C_{1r+1}, \dots, C_n$ 决定于 $H(s)$ 的**零点极点**分布。

(3) $H(s)$ 是 s 的实系数有理函数， p_i 中可能存在共轭对

若： $p_1 = a + j\omega_0, p_2 = p_1^* = a - j\omega_0$

则： $p_1, p_2 \Rightarrow k e^{at} \sin \omega_0 t \cdot u(t)$ 的形式

(4) 若 $\forall \operatorname{Re} p_i < 0$ ，则对应项（模态） $\rightarrow 0$ ， $t \rightarrow \infty$

① p_i 是一阶极点，对应模态 $e^{p_i t}$ $\xrightarrow{\text{单调渐近}} 0$ ， $t > 0$

② p_i 是重极点，对应模态 $t^m e^{p_i t}$ $\xrightarrow{\text{单调渐近}} 0$ ， $t > T$

亦即： $\operatorname{Re} p_i < 0$ ， $p_i \in \pi_l^-$ ，则模态**减幅**(渐近于0)。

(5) 若： $\text{Re } p_i = 0$ ，即极点在虚轴上

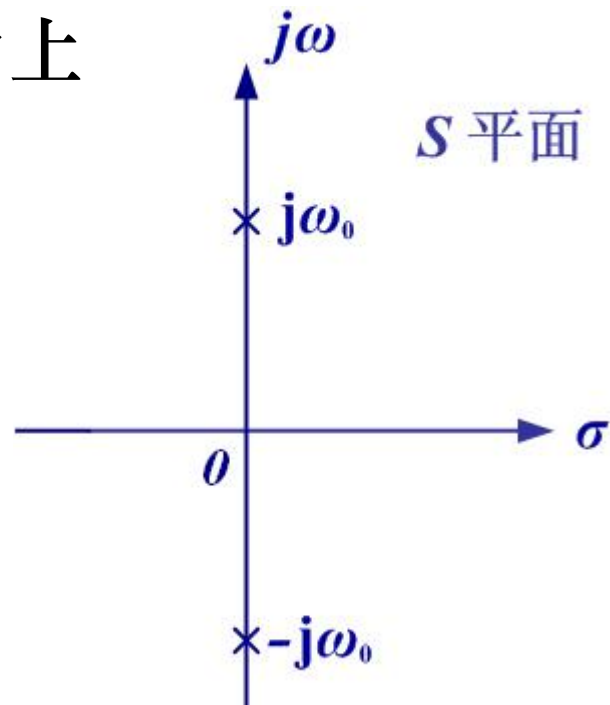
$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right\} = \cos \omega_0 t \cdot u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = u(t), \quad \omega_0 = 0$$

一阶 $p_i \in j\omega$ ，模态**等幅**；

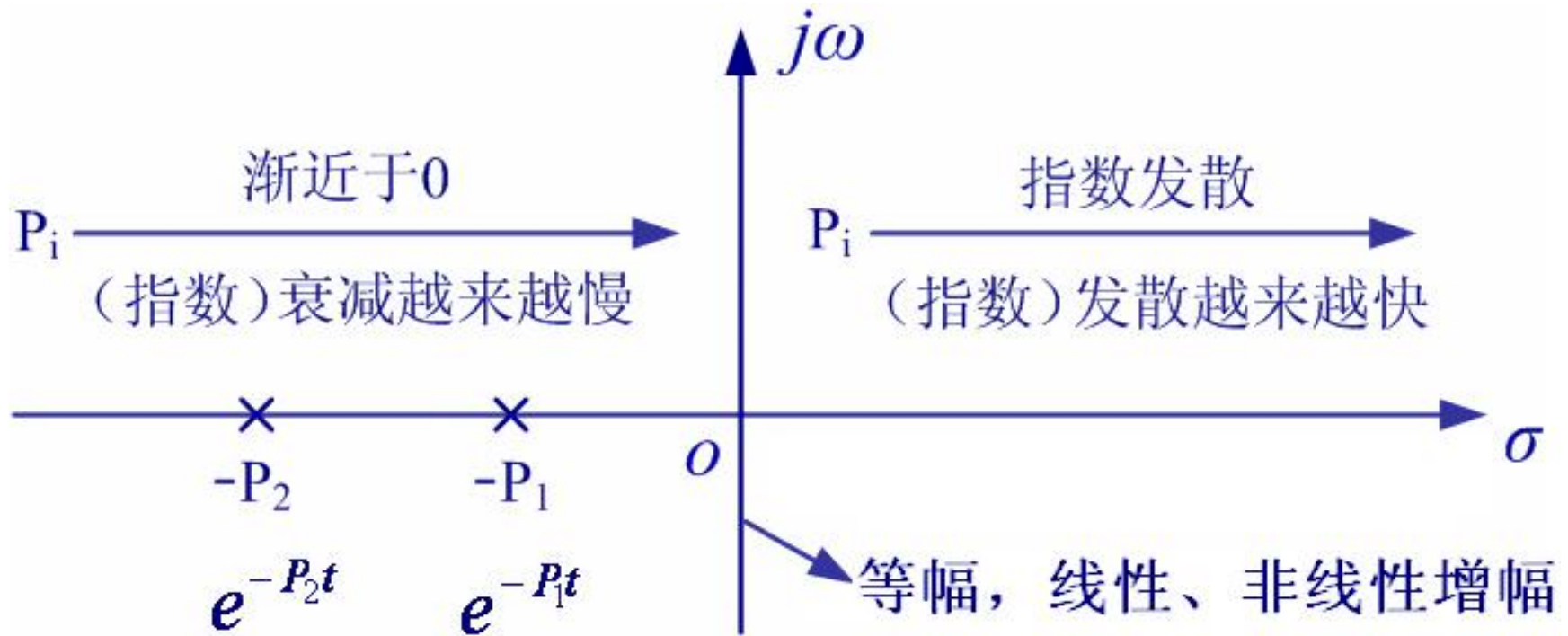
二阶 $p_i \in j\omega$ ， $t \sin \omega_0 t \cdot u(t)$ ，模态**线性增幅**；

高阶 $p_i \in j\omega$ ，非线性**(幂律)增幅**。



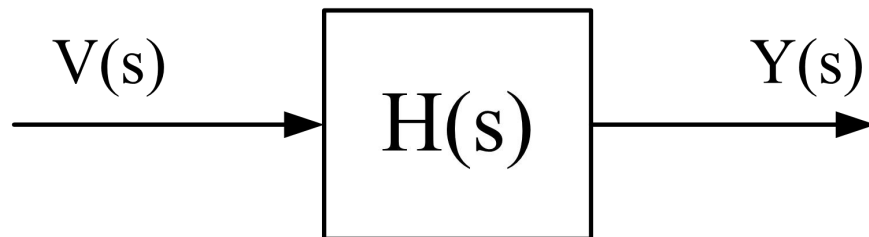
(6) 若： $\text{Re } p_i > 0$ ， $p_i \in \pi_r^-$ ，则模态**发散**(渐近于 ∞)。

各种情况总结（表4-4、表4-5）



结论：虚轴附近的极点所决定的模态是慢变的。

- 4. $Y(s) = H(s)V(s)$ 的零极点分布与响应:



$$y_{zs}(t) = \underbrace{\sum_i \text{Res} \{ Y(s) e^{st} \}_{H(s)\text{极点 } p_i}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\sum_j \text{Res} \{ Y(s) e^{st} \}_{V(s)\text{极点 } p_j}}_{\text{强迫响应}}$$

自由响应

强迫响应

• 1) 零输入响应 \Rightarrow 自由响应，

与 $H(s)$ 极点有关，与 $H(s)$ 零点无关；

2) 零状态响应 = 自由响应 + 强迫响应 (见前页)
= 瞬态响应 + 稳态响应

瞬态响应 $\Leftrightarrow Y(s)$ 在 π_l^- 上极点贡献 \Leftrightarrow 渐近于 0；

稳态响应 $\Leftrightarrow Y(s)$ 在 π_r^+ 上极点贡献；

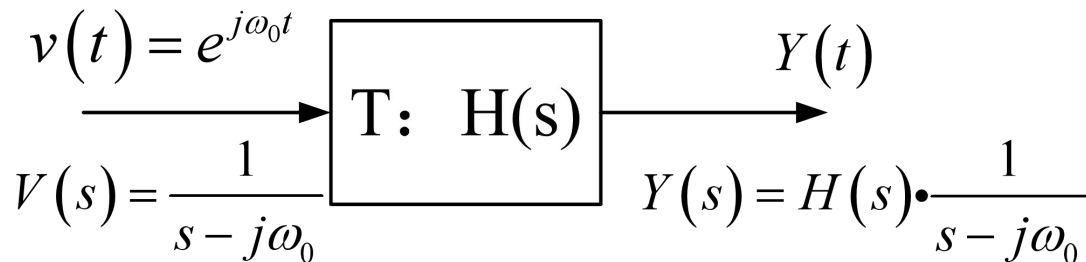
3) 快变响应 \Leftrightarrow 远离虚轴极点贡献；

慢变响应 \Leftrightarrow 虚轴附近极点贡献；

4) $H(s)$ 极点个数 = 系统独立储能元件个数。

§ 5.5 线性定常系统频率响应

- 1. 正弦稳态响应与系统特征函数：



$$y_{zs}(t) = \text{Res} \left\{ Y(s) e^{st} \right\}_{p=j\omega_0} + \underbrace{\sum_i \text{Res} \left\{ Y(s) e^{st} \right\}_{H(s)\text{极点} p_i}}_{H(s) \sim \text{BIBO 稳定} \searrow 0}$$

$y_s(t) = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$, 正弦稳态响应 \rightarrow 同频率正弦

$$H(j\omega_0) = H(s) |_{s=j\omega_0} = |H(j\omega_0)| e^{j\phi(\omega_0)}$$

$$y_s(t) = |H(j\omega_0)| e^{j[\omega_0 t + \phi(\omega_0)]}$$

$$y_s(t) = \mathcal{T} \{ e^{j\omega_0 t} \} = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$

- 注 (1) 对于矩阵 A ，有 $A\xi = \lambda\xi$ ， $\xi \in R^n$ ， $\xi \neq 0$

ξ 为特征向量， λ 为属于 ξ 的特征值

仿照上式： $T \{ e^{j\omega_0 t} \} = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$

$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow$ 特征函数，频谱 $H(j\omega_0) \leftrightarrow$ 特征值。

(2) 输入 $v(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta_0)$ ，则

输出 $y_s(t) = |H(j\omega_0)| A \sin(\omega_0 t + \theta_0 + \phi(\omega_0))$

加权

输入 $v(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ ，则

输出 $y_s(t) = |H(j\omega_0)| A \cos(\omega_0 t + \theta_0 + \phi(\omega_0))$

加权

• 2. 频响特性：输出随输入频率变化的特性。

$H(s)|_{s=j\omega_0} = H(j\omega_0)$ 为加权因子，亦称为系统增益。

当 ω_0 遍历 $(-\infty, +\infty)$ 时， $H(j\omega)$ 为系统**频率响应特性**。

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

其中： $|H(j\omega)|$ 为系统的幅频特性(响应)，幅度谱；

$\phi(\omega)$ 为系统的相频特性(响应)，相位谱；

系统**BIBO稳定** $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \Leftrightarrow H(s)$ 极点 $\in \pi_l^-$

此时， $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad (*)$

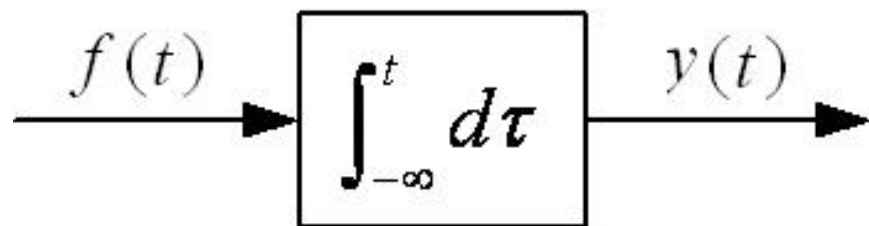
若系统**非BIBO稳定**，则**(*)**式不成立。

例如：积分器，**非BIBO稳定**。参见教材例5-1。

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f(t) * u(t)$$

$$h(t) = u(t) \Leftrightarrow H(s) = \frac{1}{s}$$

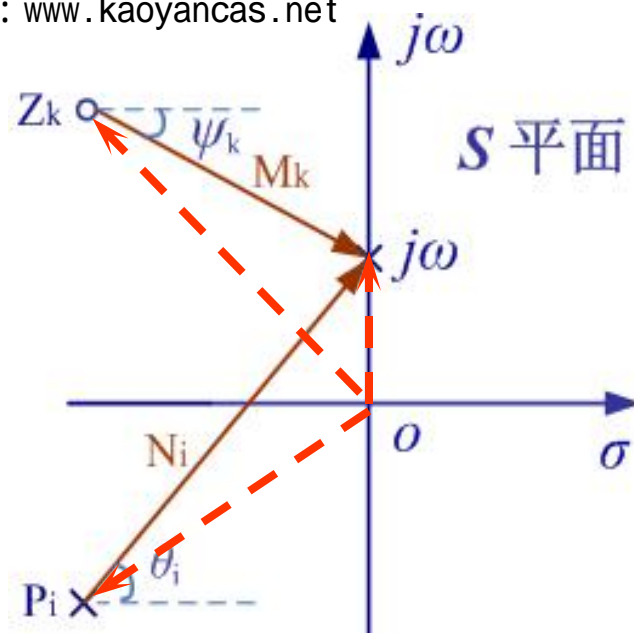
$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega}$$



$$\text{而 } H(\omega) = \mathcal{F} \{h(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

可见，**二者不相等**。

3. 确定频响特性的几何方法：



$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K \prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

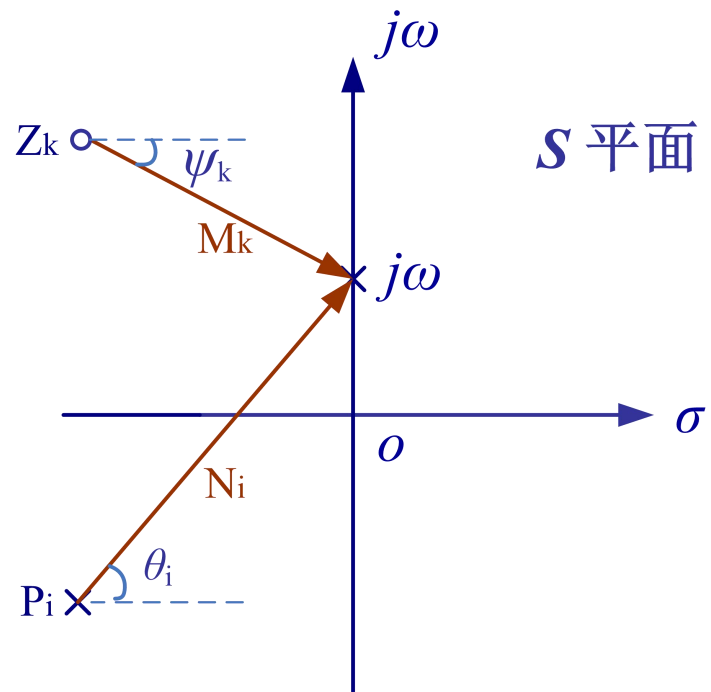
BIBO稳定， s 沿虚轴从 $-j\infty \rightarrow +j\infty \Rightarrow H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{K \prod_{k=1}^m (j\omega - z_k)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} = \frac{K \prod_{k=1}^m [M_k e^{j\psi_k}]}{\prod_{i=1}^n [N_i e^{j\theta_i}]} = \frac{K \prod_{k=1}^m M_k e^{j \sum_{k=1}^m \psi_k}}{\prod_{i=1}^n N_i e^{j \sum_{i=1}^n \theta_i}}$$

$$\text{重写: } H(j\omega) = \frac{K \prod_{k=1}^m M_k e^{j \sum_{k=1}^m \psi_k}}{\prod_{i=1}^n N_i e^{j \sum_{i=1}^n \theta_i}} = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K \prod_{k=1}^m N_k}{\prod_{i=1}^n M_i}, \text{ 幅频特性}$$

$$\phi(\omega) = \sum_{k=1}^m \psi_k - \sum_{i=1}^n \theta_i, \text{ 相频特性}$$



注：与正实轴夹角（正实轴旋转至差向量），逆时针为正，顺时针为负。
每个矢量有两个相角，一正一负。

§ 5.6 BIBO稳定性

- 1. 系统稳定性：

- 零状态稳定：

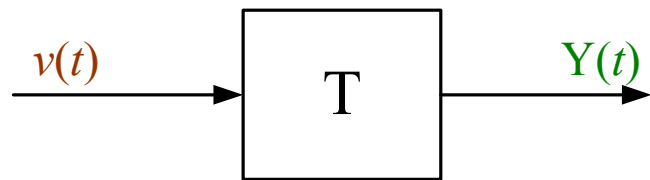
- 外部稳定性，输入~输出稳定性，**BIBO**稳定；

- 零输入稳定：

- 内部稳定性，李亚谱诺夫稳定性。

- 李稳定：系统输出能回到平衡态。

• 2. BIBO稳定性:



定义:

零状态系统BIBO稳定: 对任一有界输入, 输出均有界。

即: 对 $\forall v(t) \in L^\infty(a, b)$, 恒有 $y(t) = Tv(t) \in L^\infty(a, b)$

亦即: $\|v(t)\|_\infty = \sup_{\forall t} |v(t)| < \infty$, $\|y(t)\|_\infty = \sup_{\forall t} |y(t)| < \infty$

注:

1. 此定义是普适的, 不要求系统线性;
2. 零状态系统BIBO稳定, 非零状态时未必BIBO稳定。

定理：

零状态线性系统BIBO稳定 $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t, \tau)| d\tau < \infty, \forall t$

定理：

零状态线性定常系统BIBO稳定 $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty \Leftrightarrow$

$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ 的 $\forall p_i \in \pi_l^-$ ，且 $H(s)$ 是真有理分式。

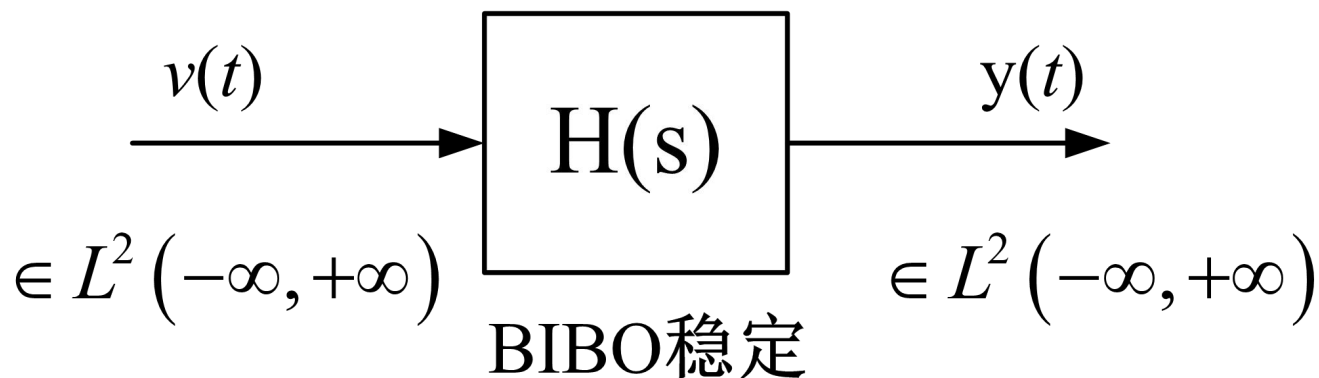
$\Rightarrow h(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ ；积分器不满足 $h(t) \rightarrow 0$

注1) 若 $\deg N > \deg D$ ，含微分算子，则非BIBO稳定

2) 稳定信号： $f(t) \Leftrightarrow f(t) \in L^1(-\infty, +\infty)$

3) 临界稳定是李稳定，不是BIBO稳定， $h(t) \not\rightarrow 0$ 。

- **定理：** 若 $\forall h(t) \in L^1(-\infty, +\infty)$, $\forall v(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$
则 $y(t) = h(t) * v(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$



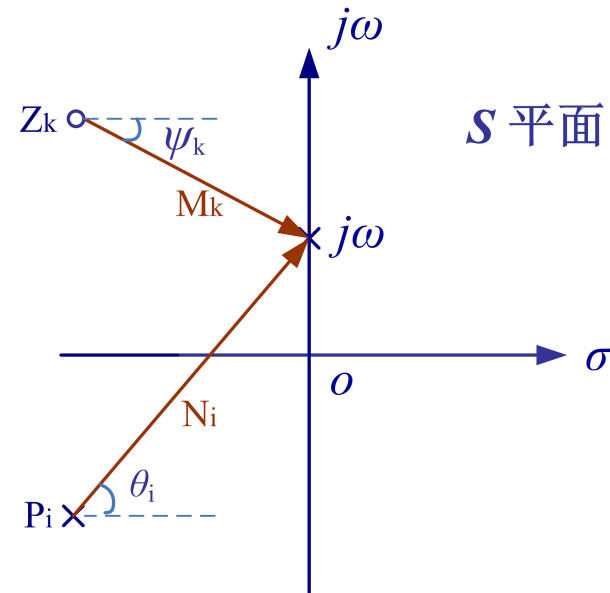
能量有限信号通过**BIBO**稳定系统，输出亦为能量有限信号。

§ 5.7 全通系统/最小相移系统

• 1. 全通系统:

定义: $H(s)$ 为全通系统(函数)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ 系统BIBO稳定} \\ (2) |H(j\omega)| = K < \infty \end{cases}$$

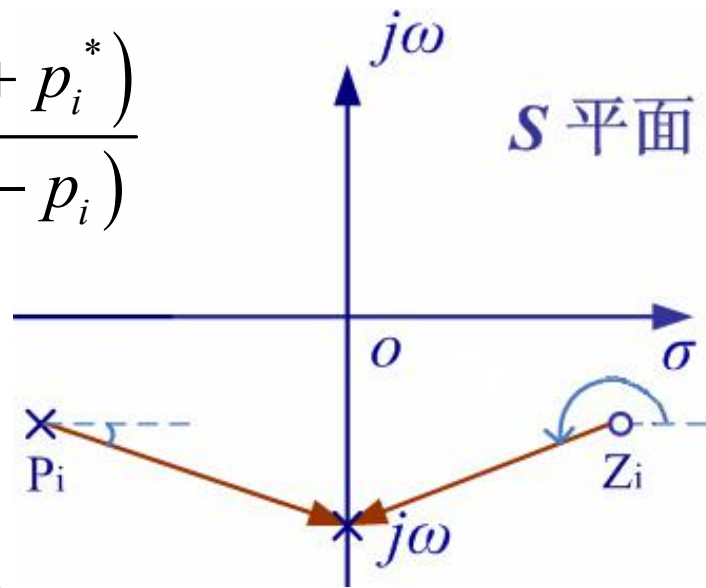


$$H(j\omega) = \frac{K \prod_{k=1}^m (j\omega - z_k)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} = \frac{K \prod_{k=1}^m M_k e^{j \sum_{k=1}^m \psi_k}}{\prod_{i=1}^n N_i e^{j \sum_{i=1}^n \theta_i}} = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

• 注：(1) $|H(j\omega)| = K < \infty$

\Leftrightarrow $\begin{cases} \text{零点与极点(关于虚轴)镜像对称:} \\ \text{极点 } p_i \in \pi_l^-, \text{ 零点 } z_i \in \pi_r^-, z_i = -p_i^* \end{cases}$

$$\text{即: } H(s) = K \prod_{i=1}^m \frac{(s - z_i)}{(s - p_i)} = K \prod_{i=1}^m \frac{(s + p_i^*)}{(s - p_i)}$$



零、极分布有三种情况：

- 1) 实轴上的零、极点；
- 2) 实系数有理分式，共轭零极点；
- 3) 非实系数有理分式，单个零极点。

- (2) 全通系统的 $\phi(\omega)$ 是 ω 的 **单调减** 函数。上页图例子：

| | $\omega = -\infty$ | | $\omega = +\infty$ |
|--------------------|--------------------|---|---------------------|
| 零点 z_i | $\frac{3\pi}{2}$ | → | $\frac{\pi}{2}$ |
| 极点 p_i | $-\frac{\pi}{2}$ | → | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\phi(\omega)$ | $2\pi / 0 / -2\pi$ | → | $0 / -2\pi / -4\pi$ |
| $H(S)$ 有 n 对零、极点 | $2n\pi$ | → | 0 |

注意：一般地，取零点的相位为正，极点相位从负增长到零再到正。

• 2. 最小相移系统：

(1) **定义**： $H(s)$ 为最小相移系统(函数)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) H(s) \text{ 的任意极点在左半开平面 } p_i \in \pi_l^- \\ 2) H(s) \text{ 的任意零点在左半闭平面 } z_i \in \pi_l^+ \end{cases}$$

严格最小相移系统：任意零点 $z_i \in \pi_l^-$ 。

(2) 幅度相同的系统，最小相移系统的相移最小。
相移小，则附加延迟小。

(3) **定理**：任意BIBO稳定的LTI系统可由全通系统与最小相移系统级联而成。

(4) **定理**：在所有幅频特性相同的系统中最小相移

系统的群延迟 $\tau_g \triangleq -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$ 最小。

群延时：反映邻域附近整体的延迟变化 $\tau_g \triangleq -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$

对于线性相位延时 $\phi(\omega) = \omega t_0$ ，在 $\omega = \omega_1$ 处有：

$\phi(\omega_1) = \omega_1 t_0$ ， $t_0 = \frac{\phi(\omega)|_{\omega=\omega_1}}{\omega_1}$ ， t_0 为 $\omega = \omega_1$ 处的相位延时。

End of Chapter 5

Thx~ 4 Ur Attention.