3-1 解题过程：

（1）三角形式的傅立叶级数（Fourier Series，以下简称 FS）

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\right]$$

式中 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$，$n$ 为正整数，T_1 为信号周期

（a）直流分量 $$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)dt$$

（b）余弦分量的幅度 $$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$$

（c）正弦分量的幅度 $$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$$

（2）指数形式的傅立叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$$

其中复数频谱 $F_n=F(n\omega_1)=\dfrac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

$F_n=\dfrac{1}{2}(a_n-jb_n)\qquad F_{-n}=\dfrac{1}{2}(a_n+jb_n)$

由图 3-1 可知，$f(t)$ 为奇函数，因而 $a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\omega_1 t)dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{E}{2}\sin(n\omega_1 t)dt=\frac{-2E}{n\omega_1 t}\cos(n\omega_1 t)\bigg|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{E}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2,4,\cdots\\ \dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,\cdots\end{cases}$$

所以，三角形式的 FS 为

$$f(t)=\frac{2E}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t)+\cdots\right]\qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

指数形式的 FS 的系数为

$$F_n=-\frac{1}{2}jb_n=\begin{cases}0 & n=0,\pm2,\pm4,\cdots\\ -\dfrac{jE}{n\pi} & n=0,\pm1,\pm3,\cdots\end{cases}$$

所以，指数形式的 FS 为

$$f(t)=-\frac{jE}{\pi}e^{j\omega_1 t}+\frac{jE}{\pi}e^{-j\omega_1 t}-\frac{jE}{3\pi}e^{j3\omega_1 t}+\frac{jE}{3\pi}e^{-j3\omega_1 t}+\cdots \qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

3-15 分析：半波余弦脉冲的表达式 $f(t)=E\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$

求 $f(t)$ 的傅立叶变换有如下两种方法。

解题过程：

方法一：用定义

$$F(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{E}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)t}+e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)t}\right]dt$$

$$=\frac{E}{2j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)\frac{\tau}{2}}-e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)\frac{\tau}{2}}\right]-\frac{E}{2j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)}\left[e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)\frac{\tau}{2}}-e^{j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)\frac{\tau}{2}}\right]$$

$$=\frac{E\cos\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}{\frac{\pi}{\tau}-\omega}+\frac{E\cos\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}{\frac{\pi}{\tau}+\omega}$$

$$=\frac{2E\tau\cos\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\pi\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

方法二：用 FT 的性质和典型的 FT 对

$$f(t)=E\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$F(\omega)=\frac{E}{2\pi}\mathscr{F}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right]*\mathscr{F}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

其中 $\mathscr{F}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right]=\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]$，

$\mathscr{F}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]=\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

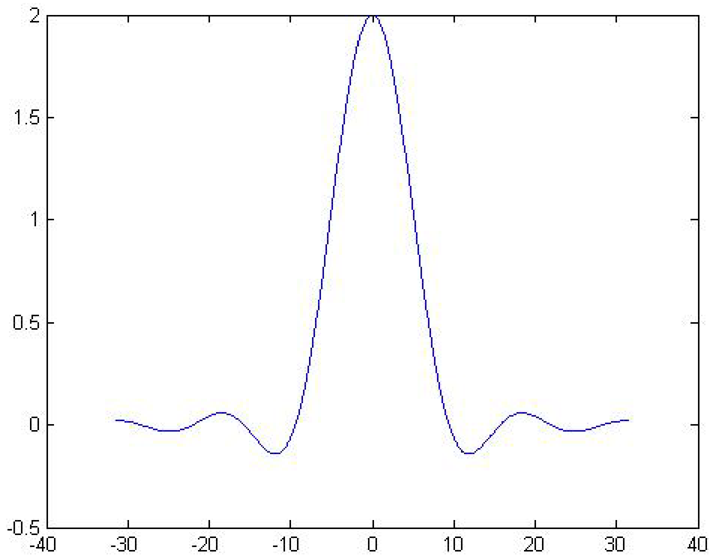
代入 $F(\omega)=\frac{E}{2\pi}\mathscr{F}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right]*\mathscr{F}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$ 得

$$F(\omega)=\frac{E}{2\pi}\cdot\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]*\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$=E\left\{\frac{\sin\left[\frac{\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\tau}{2}\right]}{\omega+\frac{\pi}{\tau}}+\frac{\sin\left[\frac{\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\tau}{2}\right]}{\omega-\frac{\pi}{\tau}}\right\}$$

$$=\frac{2E\tau\cos\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\pi\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

其频谱图如下图所示：



3-19 分析：本题意在说明：对于两频域信号，如果其幅频特性相同，但是相频特性不同则它们对应的时域信号是不一样的。

解题过程：

（a）$|F(\omega)|=A[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)]$，$\varphi(\omega)=\omega t_0[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)]$

所以，$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=Ae^{j\omega t_0}[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)]$

先求 $F_1(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$ 的 FT：$f_1(t)$

由 $\mathscr{F}[Sa(\omega_c t)]=\frac{\pi}{\omega_c}[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)]$

可知 $\mathscr{F}^{-1}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]=\frac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)$

再由FT的平移性质：$f(t)=\mathscr{F}\left\{Ae^{j\omega t_0}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]\right\}=\frac{A\omega_0}{\pi}Sa\left[\omega_0(t+t_0)\right]$

（b）$\left|F(\omega)\right|=A\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right]+\frac{\pi}{2}\left[u(\omega)-u(\omega-\omega_0)\right]$$

所以，$F(\omega)=\left|F(\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}=Ae^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right]+Ae^{j\frac{\pi}{2}}\left[u(\omega)-u(\omega-\omega_0)\right]$

$$=-jA\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right]+jA\left[u(\omega)-u(\omega-\omega_0)\right]$$

欲求$F(\omega)$的反变换，可利用 FT 的频域微分性质：

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=-jA\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega)\right]+jA\left[\delta(\omega)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

另 $f_1(t)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{d}{d\omega}F(\omega)\right\}=-\frac{jA}{2\pi}\left[e^{-j\omega_0 t}-1\right]+\frac{jA}{2\pi}\left[1-e^{j\omega_0 t}\right]$

$$=\frac{jA}{2\pi}\left(2-e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)=\frac{jA}{\pi}\left(1-\cos\omega_0 t\right)$$

由 FT 的频域微分性质，有 $f(t)=f_1(t)=\frac{A}{\pi t}\left(\cos\omega_0 t-1\right)=\frac{-2A}{\pi t}\sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$

3-22 分析：FT 的时域对称性：若$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]$，则$\mathscr{F}\left[F(t)\right]=2\pi f(-\omega)$

（1）$\because\delta(t)\leftrightarrow 1$，$\delta(t+\omega_0)\leftrightarrow e^{j\omega_0\omega}$

$\therefore$由 FT 的时频对称性，有$e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega+\omega_0)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\therefore F(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$的时间函数 $f(t)=\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$

（2）$\because u(t+\omega_0)-u(t-\omega_0)\leftrightarrow 2\omega_0 Sa(\omega_0\omega)$

$\therefore$由 FT 的时频对称性，有

$$2\omega_0 Sa(\omega_0 t)\leftrightarrow 2\pi\left[u(-\omega+\omega_0)-u(-\omega-\omega_0)\right]=2\pi\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$$

即$\frac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)\leftrightarrow u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$

$\therefore F(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$的时间函数 $f(t)=\frac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)$

（3）$F(\omega)=\begin{cases}\frac{\omega_0}{\pi} & \left(\left|\omega\right|\le\omega_0\right)\\ 0 & others\end{cases}=\frac{\omega_0}{\pi}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

利用（2）的结论，$F(\omega)$ 的时间函数 $f(t)=\frac{\omega_0^2}{\pi^2}Sa(\omega_0 t)$

3-32 解题过程：利用性质：$\mathscr{F}\left(x(t)\cdot y(t)\right)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left[x(t)\right]*\mathscr{F}\left[y(t)\right]$

$$\mathscr{F}\left[\sin(\omega_0 t)u(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left[\sin(\omega_0 t)\right]*\mathscr{F}\left[u(t)\right]$$

单边正弦函数的 FT：$=\frac{1}{2\pi}\cdot j\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]*\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$