中国科学院
2015年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

1. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 相异，$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$。

(1) 证明：$[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ 无实根。

(2) $x^{k+1}f'(x) = (s_0x^k + s_1x^{k-1} + \cdots + s_{k-1}x + s_k)f(x) + g(x)$，$g(x)$ 次数小于 n。

【解答】

(1) 令

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + \cdots + (x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

$$= \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}$$

其中 $x \neq x_1, x_2, \cdots, x_n$，因此，$g'(x) = -\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2} - \cdots - \frac{1}{(x-x_n)^2} < 0$。

但另一方面，$g'(x) = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}$，故 $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x) > 0$，