中国科学院
2013年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

1.求下面$n+1$阶行列式的值

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

其中，$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$。

【解答】

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n & x \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 & x^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_n^3 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \lambda_3^n & \cdots & \lambda_n^n & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} & 0 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{pmatrix}$$