中国科学院
2011年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

一. $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 为整系数多项式，$\frac{p}{q}$ 为既约分数，$f(\frac{p}{q})=0$。证明

(1) $p\,|\,a_0$；$q\,|\,a_n$。

(2) 对任意整数 m，$qm-p\,|\,f(m)$。

【解答】

(1) $f(\frac{p}{q})=0$，即 $a_n(\frac{p}{q})^n+\cdots+a_1(\frac{p}{q})+a_0=0$，即

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

因此，

$$q(a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1})=-a_np^n\text{，}\quad q\,|\,a_np^n$$

$$p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1})=-a_0q^n\text{，}\quad p\,|\,a_0q^n$$

$(p,q)=1$，因此，$p\,|\,a_0$；$q\,|\,a_n$。