

中国科学院

2012年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：高等代数

1.(15分) 证明多项式

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

没有重根。

【解答】

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$(f(x), f'(x)) = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \frac{x^n}{n!}\right) = 1$$

因此， $f(x)$ 没有重根。

2.(20分) 设多项式 $g(x) = p^k(x)g_1(x)$ ($k \geq 1$)，多项式 $p(x)$ 与 $g_1(x)$ 互素。证明：对

任意多项式 $f(x)$ 有