

中国科学院

2009年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：高等代数

1. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x+y & x & \dots & 0 \\ y & x+y & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & x \\ 0 & 0 & y & x+y \end{vmatrix}$$

【解答】

$$D_1 = x+y, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x+y & x \\ y & x+y \end{vmatrix} = x^2 + xy + y^2, \quad D_n = (x+y)D_{n-1} - xyD_{n-2}, \quad n > 2$$

其特征方程为 $r^2 = (x+y)r - xy$ ，其两根为 x, y 。

若 $x \neq y$ ，则 $D_n = c_1 x^{n-1} + c_2 y^{n-1}$ 。代入初始值，得到
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x + y \\ xc_1 + yc_2 = x^2 + xy + y^2 \end{cases}$$

求解，得到 $c_1 = \frac{x^2}{x-y}$ ， $c_2 = \frac{y^2}{y-x}$ ，故