

中国科学院数学与系统科学研究院 2006 年高等代数真题解析

1.(16分) 已知  $\alpha, \beta, \gamma$  为实数，求  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \\ \gamma & \alpha & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ & & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的行列式的值。

【解答】

将  $|A|$  记作  $D_n$ ，则  $D_1 = \alpha$ ， $D_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma$ ， $D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}$ ，

$n > 2$ ，其特征方程为  $r^2 = \alpha r - \beta\gamma$ ，其两根为

$$a = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2}, \quad b = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\gamma}}{2}$$

若  $a \neq b$ ，则  $D_n = c_1 a^{n-1} + c_2 b^{n-1}$ ，代入初始值，得到