

## 中国科学院 2003 年高等代数真题解析

1.(30 分) 已知如下三阶矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ c & d & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求  $\det(A)$ ；(2) 求  $\text{tr}(A)$ ；(3) 证明： $\text{rank}(A) \geq 2$ ；(4) 为使  $\text{rank}(A) = 2$ ，求  $a, b, c$  和  $d$  应满足的条件。

**【解答】**

(1)  $\det(A) = 1 - bd - ac$ ；

(2)  $\text{tr}(A) = 1 + 1 + 1 = 3$ ；

(3)  $A$  有二阶非零子式  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ ，故  $\text{rank}(A) \geq 2$ ；

(4) 由(1)和(3)， $\text{rank}(A) = 2$  当且仅当  $\det(A) = 0$  且  $ac - bd \neq 1$ 。