中国科学院 2000 年高等代数真题解析

一.填空(每空 4 分，共 48 分)

设 R^3 中向量 $\alpha_1=(-1,1,1)^T,\alpha_2=(1,-1,0)^T,\alpha_3=(1,0,-1)^T,\beta_1=(-4,3,4)^T$

$\beta_2=(4,-3,0)^T,\beta_3=(4,1,-4)^T$。

(1) β_1 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 下的坐标分别是________和_________；

(2) 从基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 到基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 的过渡矩阵是__________；

又假设 R^3 中的线性变换 A 使得 $A\alpha_1=\beta_1,A\alpha_2=\beta_2,A\alpha_3=\beta_3$，则

(3) A 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和基 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 和标准基下的矩阵分别是______、_______

和____________

(4) A 的特征多项式是__________，最小多项式是_______，特征值是___________；

(5) A 的不变因子是___________，初等因子是__________，若当标准形是________

【解答】

(1) β_1 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的坐标是

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\beta_1=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&0\\ \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-4\\3\\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\ \end{pmatrix}$$