

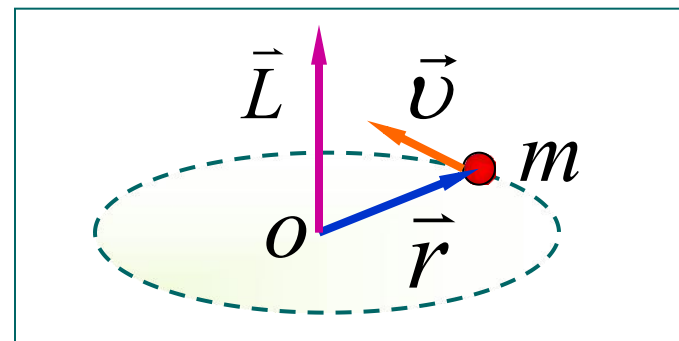
角动量守恒定律

law of conservation angular momentum



1 质点的角动量

质量为 m 的质点以速度 \vec{v} 做圆周运动，某时刻相对点 O 的位矢为 \vec{r} ，定义质点相对于点 O 的角动量为：



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小 $L = rmv$

\vec{L} 的方向符合右手法则。

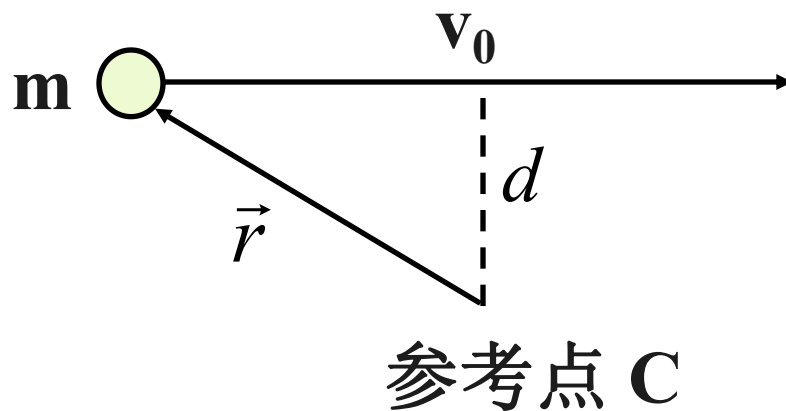
一般的转动中， \vec{r} 与 \vec{v} 的夹角 θ 不为 90° ，这时

大小 $L = rmv \sin\theta$



注意

1. 作圆周运动的质点的角动量 $L = rmv$;
2. 角动量是描述转动状态的物理量;
3. 质点的角动量又称为动量矩。
4. 作直线运动的物体有没有角动量?



角动量是普适概念（如量子物理）



必须指明是对谁的角动量

角动量与参考点有关吗？

对O点：

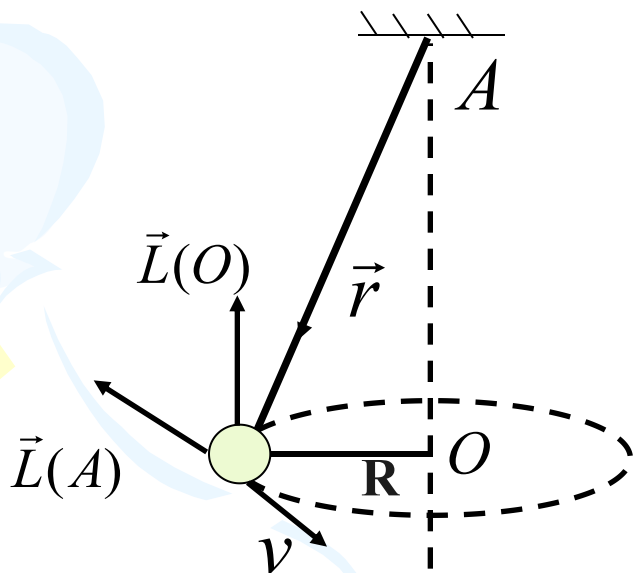
$$L(O) = Rmv$$

对A点：

$$\vec{L}(A) = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$L(A) = rmv$$

方向与 \mathbf{r} 和 \mathbf{v} 的平面垂直



所以，角动量与参考点有关

力的时间累积效应 \Rightarrow 动量、动量定理.

力矩的时间累积效应 \Rightarrow 角动量、角动量定理.



2 质点的角动量守恒定理

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = ?$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$$\because \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \vec{v} \times \vec{p} = 0 \quad \therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

质点的角动量定理

$$\vec{M} = 0, \quad \vec{L} = \text{恒矢量}$$

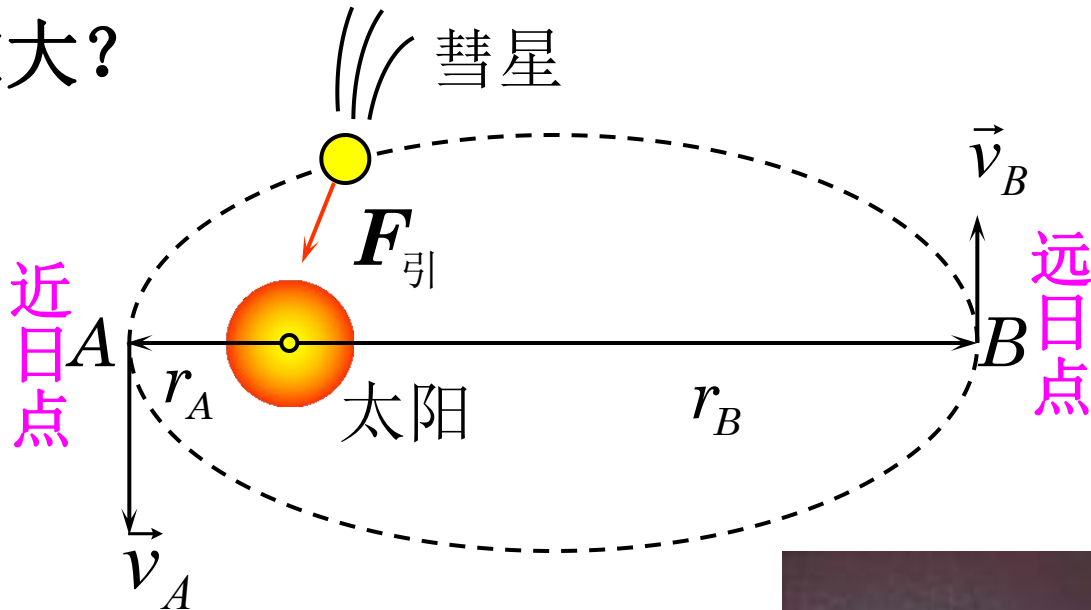
质点所受对参考点 O 的合力矩为零时，质点对该参考点 O 的角动量为—恒矢量。

质点的角动量守恒定理



例：彗星绕太阳作椭圆轨道运动，太阳位于椭圆轨道的一个焦点上，问系统的角动量是否守恒？近日点与远日点的速度谁大？

解：在彗星绕太阳轨道运转过程中，只受万有引力作用，万有引力不产生力矩，系统角动量守恒。



$$M = 0 \quad L_A = L_B$$

由质点的角动量定义： $L = r m v \sin \theta$

$$\text{即 } r_A m v_A \sin \theta_A = r_B m v_B \sin \theta_B$$

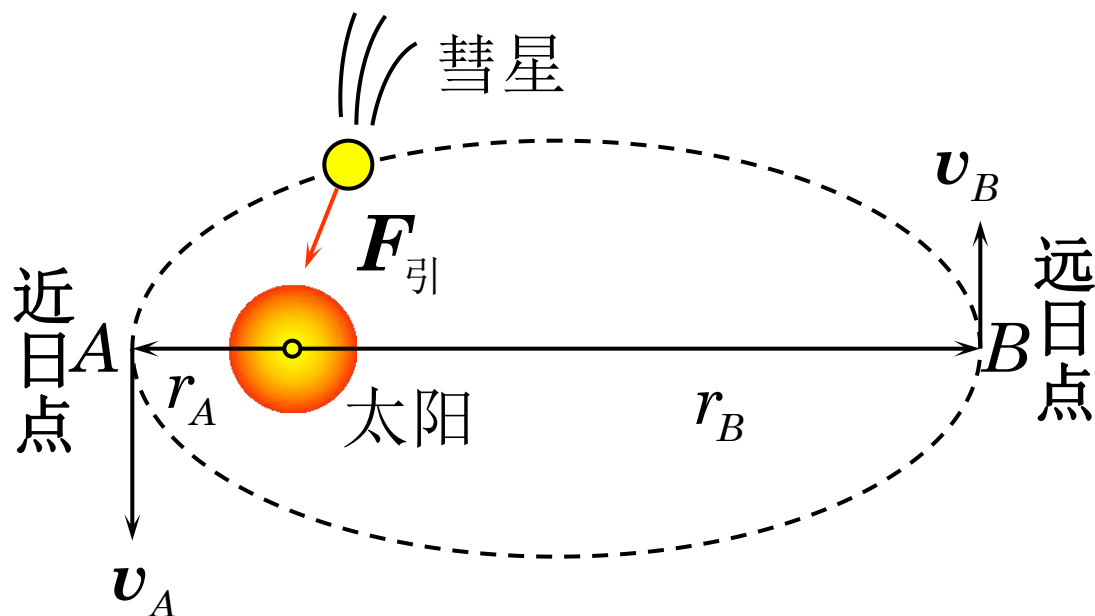


$$\theta_A = \theta_B = 90^\circ$$

$$r_A v_A = r_B v_B$$

即 $rv = C$

$$v \propto \frac{1}{r}$$

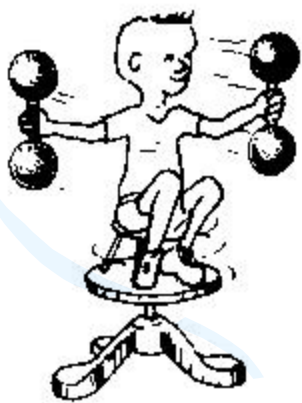


近日点 r 小 v 大，远日点 r 大 v 小， $v_A > v_B$

这就是为什么彗星运转周期为几十年，而经过太阳时只有很短的几周时间。彗星接近太阳时势能转换成动能，而远离太阳时，动能转换成势能。

有许多现象都可以用角动量守恒来说明。

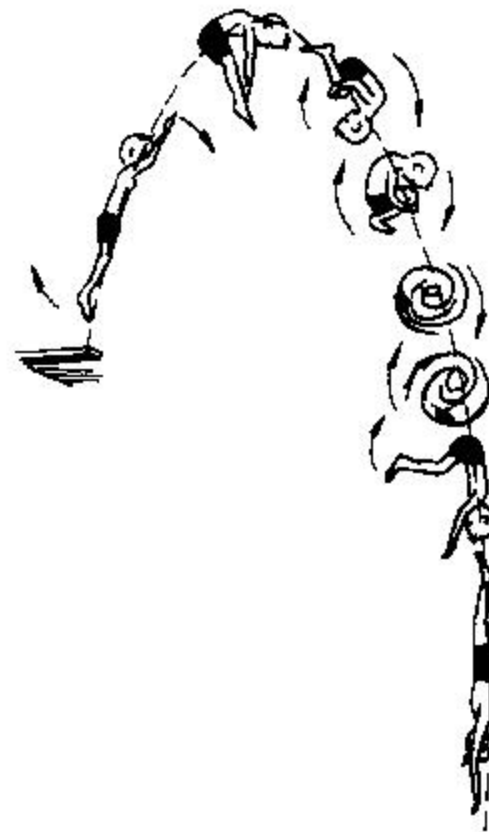
- ▶ 跳水运动员跳水
- ▶ 花样滑冰



a



b

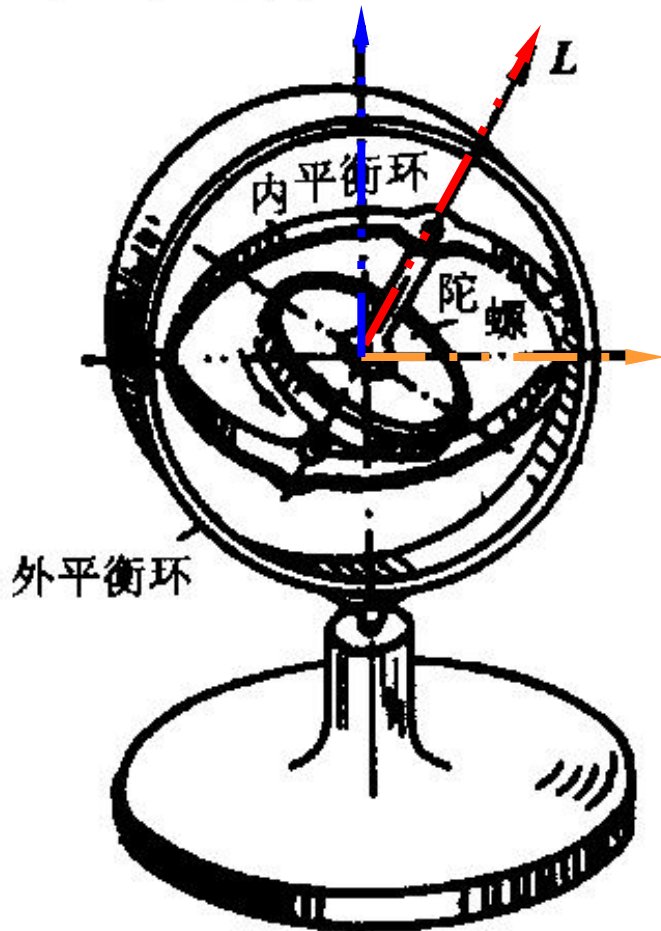


茹可夫斯基凳

完整版，请访问www.kaoyancas.net 科大科院考研网，专注于中科大、中科院考研



角动量守恒定律在技术中的应用



惯性导航仪（陀螺）



被中香炉

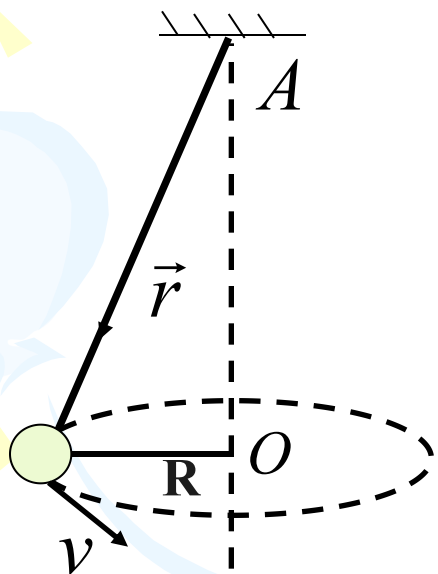
讨论

1. 对O点，角动量守恒吗？

合力过O点，合力矩为0

对A点，角动量守恒吗？

合力矩不为0，所以不守恒



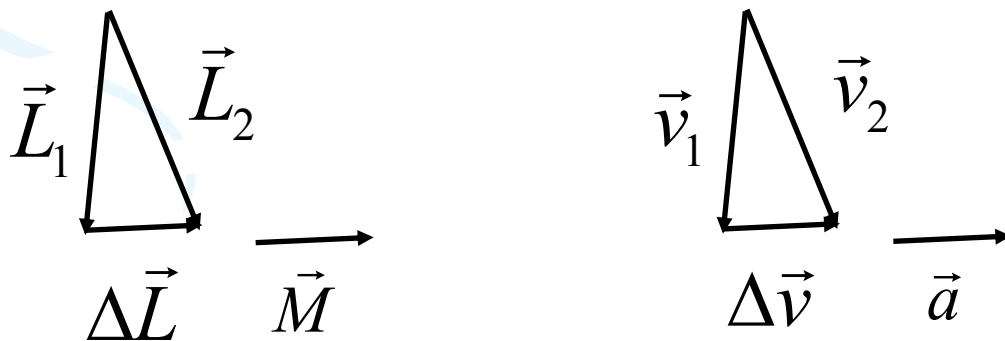
角动量守恒与参考点有关



2. 合力矩的方向与角动量的方向一致吗？

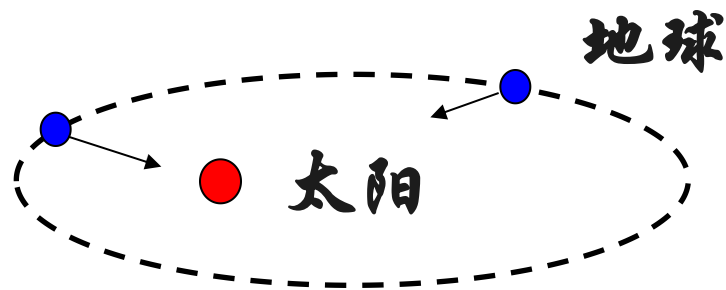
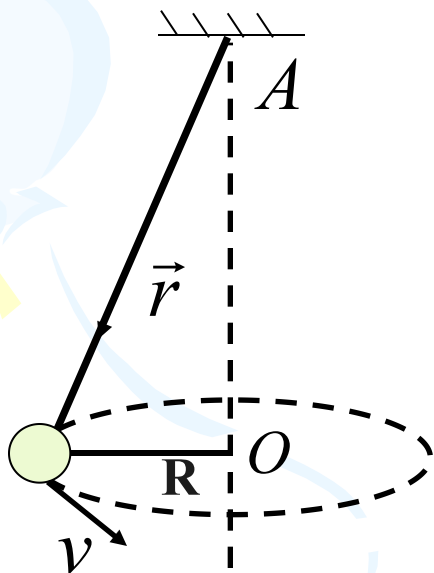
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

合力矩的方向与角动量的方向不一致，而与角动量的时间变化率一致。



3. 在有心力场中，角动量一定守恒。

有心力场一质点所受力的作用线始终通过某个点



万有引力

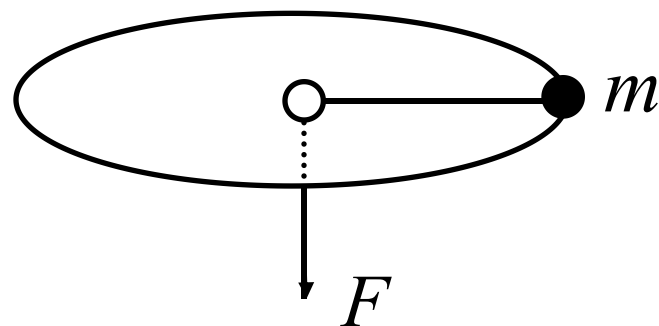
库仑力等



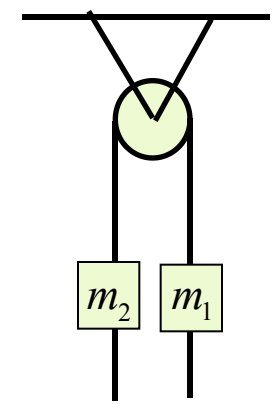
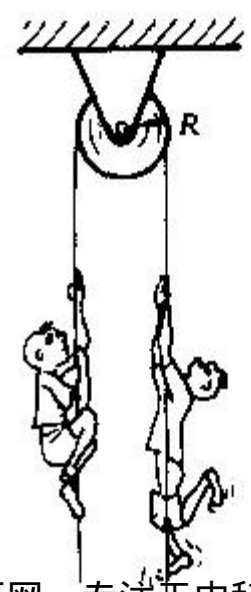
例题

质量为 m 的物体置于光滑的圆盘上，系在一根穿过圆盘中心光滑小孔的绳子上。开始时物体在离中心 O 点距离为 r_0 处，并以角速度 ω_0 转动。然后匀速向下拉绳子，使 m 的径向距离减小，当 m 离中心 O 点的距离为 $r_0/2$ 时，则物体的角速度 $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$ ，拉力所做的功 $W = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$4\omega_0 \quad \frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2$$



例：两个同样重的小孩，各抓住跨过滑轮绳子的两端。开始时小孩都保持静止，现在一个孩子用力向上爬，另一个则抓住绳子不动。若滑轮的质量和轴上的摩擦都可忽略，哪一个小孩先到达滑轮？又：两个小孩重量不等时情况又如何？



把每个小孩看成一个质点，以滑轮的轴为参考点，把两个孩子和滑轮绳子看成我们的系统，则此系统的总角动量 $L = mR(v_1 - v_2)$ ，其中 m 为每个小孩的质量， R 滑轮的半径， v_1 和 v_2 分别为左右两个小孩向上的速度，角动量和力矩都以顺时针方向为正。

由于此系统所受的外力矩只有两个小孩所受重力的力矩，二者大小相等，方向相反，故整个系统角动量守恒，初始时两个小孩都不动，则 $L = 0$ ，尔后虽然 v_1 、 v_2 都不为0，但 L 继续为0，即 v_1 、 v_2 随时保持相等，所以他们将同时到达滑轮。



若两小孩质量不等，设 $m_1 > m_2$ ，

则外力矩 $M = (m_1 - m_2)gR$

角动量 $L = (m_2v_2 - m_1v_1)R$

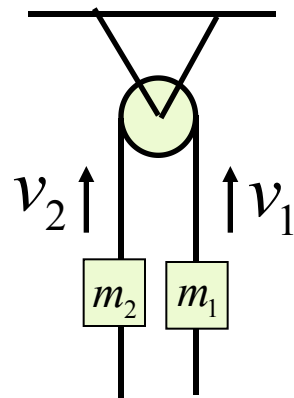
由
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

知
$$\frac{dL}{dt} = M = (m_1 - m_2)gR > 0$$

根据初始条件 $t = 0, L = 0$

可知 $t > 0, L > 0$ 即 $m_2v_2 > m_1v_1$

又由 $m_1 > m_2$ ，可知 $v_2 > v_1$ 所以轻的那个先到



质点的角动量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

角动量定理

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

角动量守恒条件

$$\vec{M} = 0$$

角动量守恒定律

$$\vec{L} = \text{恒矢量}$$

理解质点的角动量（动量矩）和角动量守恒定律，并能用它们**分析解决**质点在平面内运动时的简单力学问题。

本章结束

