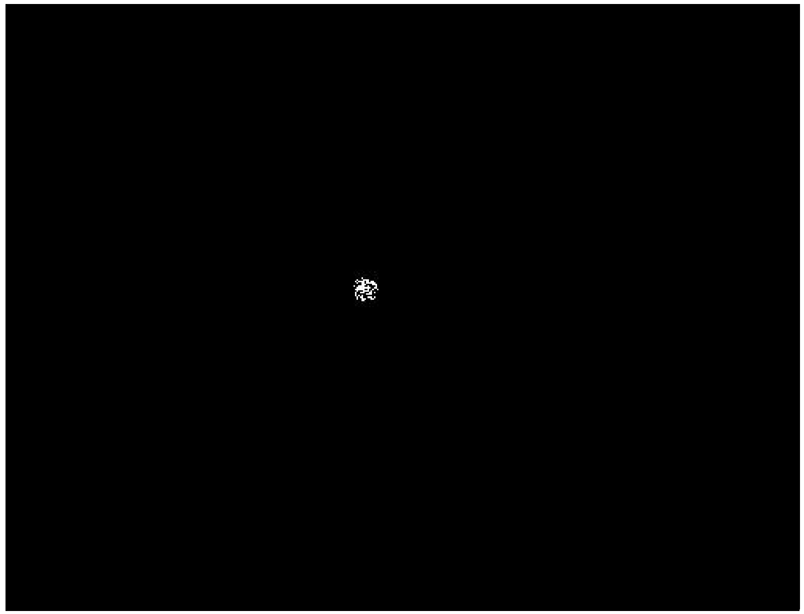
动量守恒定律

law of conservation momentum

质 心

Center of mass



质心是与质点系的质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表质点系的质量分布中心。

n个质点组成的质点系的质心位置为

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m}$$

质点系质心的直角坐标分量式为

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$$

若质量是连续分布，质心分量式为

$$x_C = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad z_C = \frac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

注意

1. 质量分布均匀、形状对称的物体，质心位于其几何中心处；

2. 外力作用线过物体质心时，物体只做平动；

3. 质心与重心的区别和联系是什么？

不受重力时，重心的概念失去意义，但物体质心依然存在

4. 质心可处于质点系或刚体的质量分布区域之外。

质心运动定理

由质点系动量定理的微分形式得

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}_\mathrm{C}$$

式中 $\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t^2}=\vec{a}_\mathrm{C}$ 为质心加速度

所以有 $$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=m\vec{a}_\mathrm{C}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\vec{a}_C$$

此式表示，质点系质心的运动与这样一个质点的运动具有相同的规律，该质点的质量等于质点系的总质量，作用于该质点的力等于作用于质点系的外力的矢量和。这个结论称为质心运动定律。

质心运动定理是确定质点系整体平动的动力学规律。

整体的运动＝质心的平动＋相对质心的运动

注意

1. 在 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\vec{a}_C$ 中，外力的作用线需要过质心吗？

2. 质心运动定理 $$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\,\vec{a}_c = \frac{d\vec{p}_c}{dt}$$

是

质点系动量定理 $$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{\,\mathrm{ex}}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0}$$

的微分形式

质点系动量定理 $\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}}\,\mathrm{d}t=\sum_i \vec{p}_i-\sum_i \vec{p}_{i0}$

动量守恒定律

若质点系所受的外力的矢量和为零 $\vec{F}^{\text{ex}}=\sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}}=0$

则系统的总动量守恒，即 $\vec{p}=\sum_i \vec{p}_i$ 保持不变．

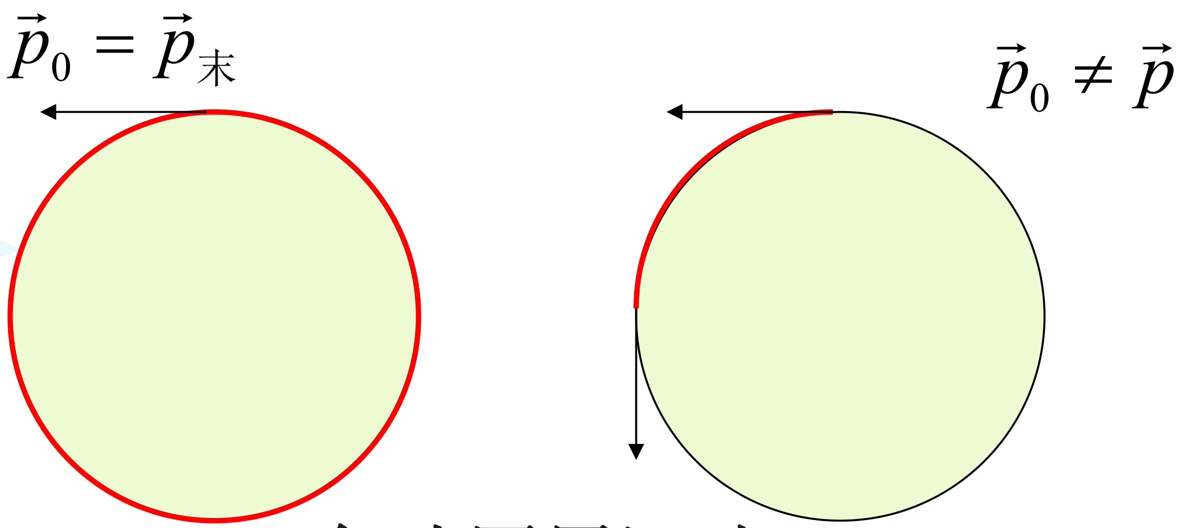
推论： 若某一方向合外力为零，则此方向动量守恒．

$$\begin{cases} F_x^{\text{ex}}=0, & p_x=\sum m_i v_{ix}=C_x \\ F_y^{\text{ex}}=0, & p_y=\sum m_i v_{iy}=C_y \\ F_z^{\text{ex}}=0, & p_z=\sum m_i v_{iz}=C_z \end{cases}$$

讨论

1） **瞬时性：** 力的瞬时作用规律

$$\vec{F}^{\mathrm{ex}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{F}^{\mathrm{ex}} = 0, \quad \vec{P} = \vec{C}$$



匀速圆周运动

2）守恒条件 外力的矢量和为零 $\vec{F}^{\mathrm{ex}}=\sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ex}}=0$

当 $\vec{F}^{\mathrm{ex}} \ll \vec{F}^{\mathrm{in}}$ 时，可略去外力的作用，近似地认为系统动量守恒．例如在碰撞，打击，爆炸等问题中．

3）系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的，各物体的动量必相对于**同一惯性参考系**．

4） 动量守恒定律只在**惯性参考系**中成立，是自然界最普遍，最基本的定律之一．

思考

1. 在地面的上空停着一气球，气球下面吊着软梯，梯上站着一个人，当这个人沿软梯上爬时，气球是否运动？

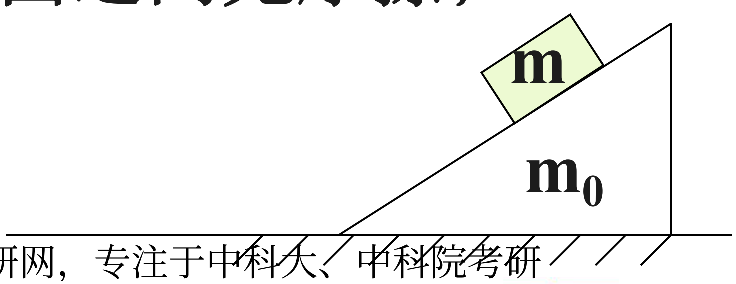
2. 如图，把m和m_0看成一个系统，问下列何种情况下，系统的水平方向分动量是守恒的？

A. m与m_0之间无摩擦，m_0与地面之间有摩擦；

★B. m与m_0之间有摩擦，m_0与地面之间无摩擦；

★C. 两处都没有摩擦；

D. 两处都有摩擦。

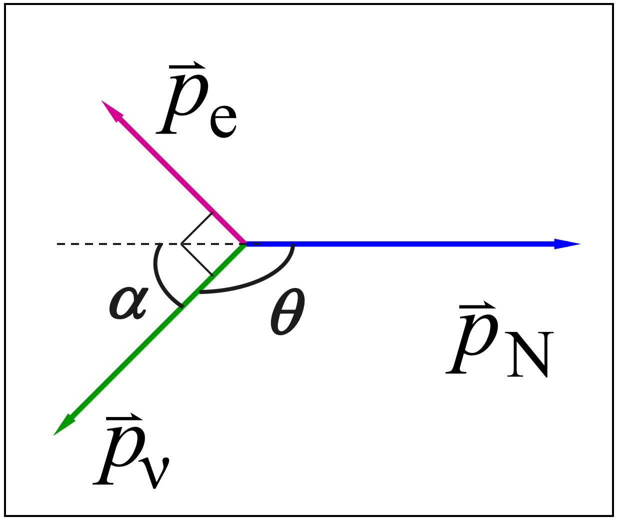


例 1 设有一静止的原子核,衰变辐射出一个电子和一个中微子后成为一个新的原子核. 已知电子和中微子的运动方向互相垂直,且电子动量为$1.2\times10^{-22}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$,中微子的动量为$6.4\times10^{-23}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$. 问新的原子核的动量的值和方向如何?

解 $\because \sum \vec{F}_i^{\,\mathrm{ex}} \ll \sum \vec{F}_i^{\,\mathrm{in}}$

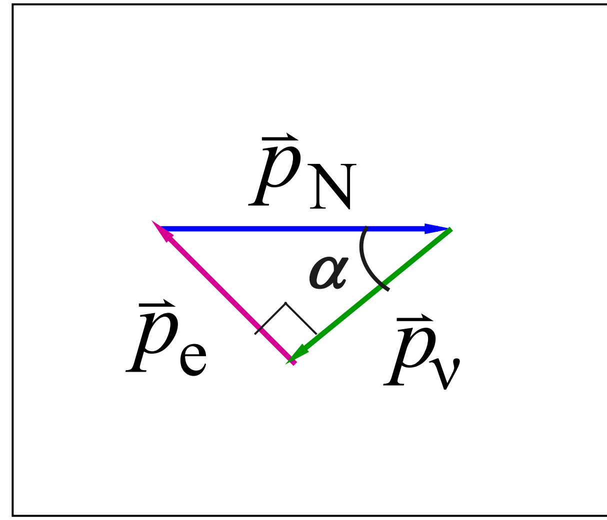
$$\therefore\ \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{恒矢量}$$

即 $\vec{p}_{\mathrm{e}} + \vec{p}_{\nu} + \vec{p}_{\mathrm{N}} = 0$



系统动量守恒，即

$$\vec{p}_e + \vec{p}_v + \vec{p}_N = 0$$



又因为 $\vec{p}_e \perp \vec{p}_v$

$$\therefore p_N = (p_e^2 + p_v^2)^{1/2}$$

代入数据计算得 $p_N = 1.36 \times 10^{-22}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$

$$\alpha = \arctan \frac{p_e}{p_v} = 61.9°$$

质心

质心的运动定律

动量守恒定律

碰撞

机械能守恒定律

理解动量、冲量概念；

掌握动量定理和动量守恒定律；

了解完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞的特点．

碰撞 两物体互相接触时间极短而互作用力较大的相互作用．

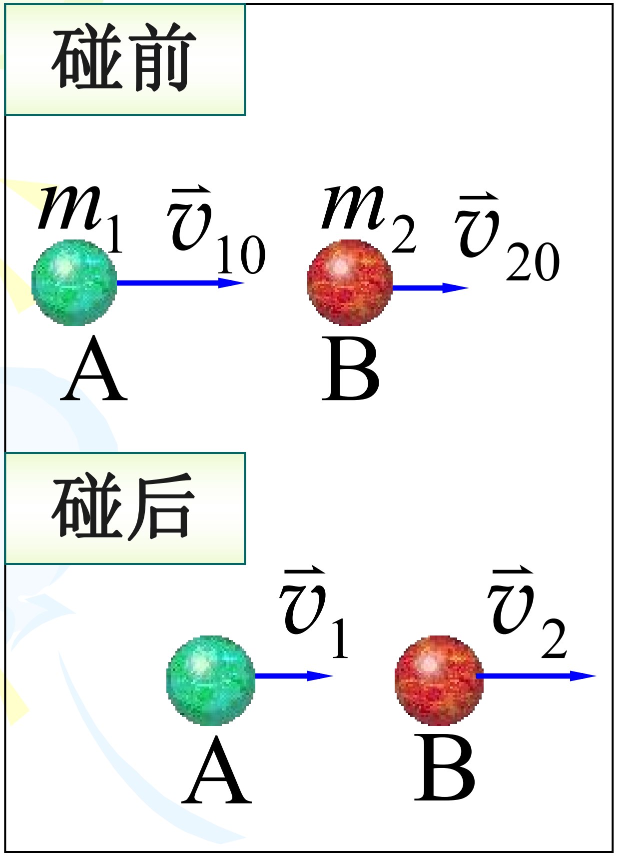
$$\because \vec{F}^{\mathrm{ex}} \ll \vec{F}^{\mathrm{in}} \quad \therefore \sum_i \vec{p}_i = \vec{C}$$

完全弹性碰撞 两物体碰撞之后，它们的动能之和不变．

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} = C$$

非弹性碰撞 由于非保守力的作用，两物体碰撞后，使机械能转换为热能、声能，化学能等其他形式的能量．

完全非弹性碰撞 两物体碰撞后,以同一速度运动．



牛顿发现：碰撞后两球的分离速度与碰撞前两球的接近速度成正比，比值由两球的材料性质决定：

$$e = \left| \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \right|$$

恢复系数

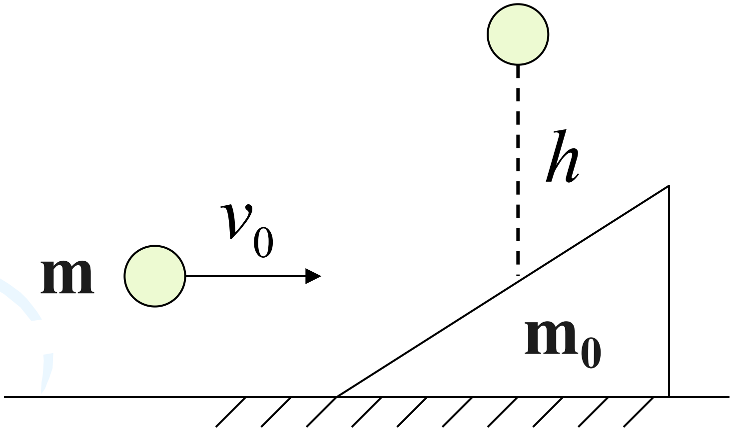
$$e = \begin{cases} 1, & \text{完全弹性碰撞} \\ (0,1), & \text{非弹性碰撞} \\ 0, & \text{完全非弹性碰撞} \end{cases}$$

几种材料的恢复系数

材料	玻璃与玻璃	铝与铝	铁与铅	钢与软木
e 值	*0.93*	*0.20*	*0.12*	*0.55*

例题

1. 如图，质量为m的小球，以水平速度v_0与在光滑桌面上的质量为m_0的静止斜劈作完全弹性碰撞后竖直弹起，则斜劈的运动速度值$v=$______，小球上升高度$h=$______。

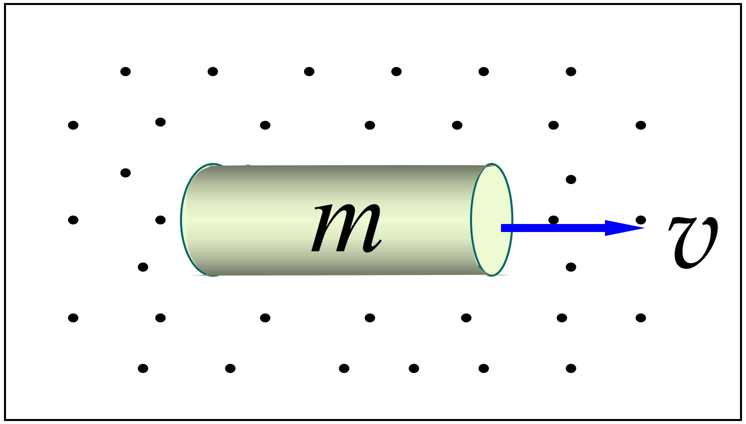


$$v=\frac{m}{m_0}v_0$$

$$h=\frac{m_0-m}{2m_0 g}v_0^2$$

例 2 在宇宙中有密度为 ρ 的尘埃，这些尘埃相对惯性参考系是静止的．有一质量为m_0 的宇宙飞船以初速 v_0 穿过宇宙尘埃，由于尘埃粘贴到飞船上，致使飞船的速度发生改变．求飞船的速度与其在尘埃中飞行时间的关系．(设想飞船的外形是面积为S的圆柱体)

解 尘埃与飞船作完全非弹性碰撞，把它们作为一个系 统， 则动量守恒．

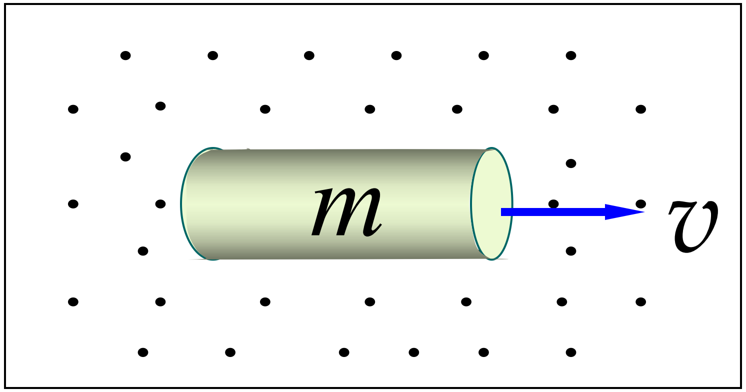


即 $$m_0 v_0 = mv$$

得 $$\mathrm{d}m = -\frac{m_0 v_0}{v^2}\mathrm{d}v = \rho S v \mathrm{d}t$$

已知 m_0，v_0，ρ．

求 v 与 t 的关系．



解 $$\mathrm{d}m = -\frac{m_0 v_0}{v^2}\mathrm{d}v = \rho S v \mathrm{d}t$$

$$-\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^3} = \frac{\rho S}{m_0 v_0}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad v = \left(\frac{m_0}{2\rho S v_0 t + m_0}\right)^{1/2} v_0$$