中国科学院 2005 年高等数学乙真题解析

一.(本题满分 50 分，每小题 5 分)

1.求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$。

【解答】

$$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}\to\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\ge\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\to\frac{1}{2}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$。

2.求不定积分 $\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$。