

Chapter.6

散 射

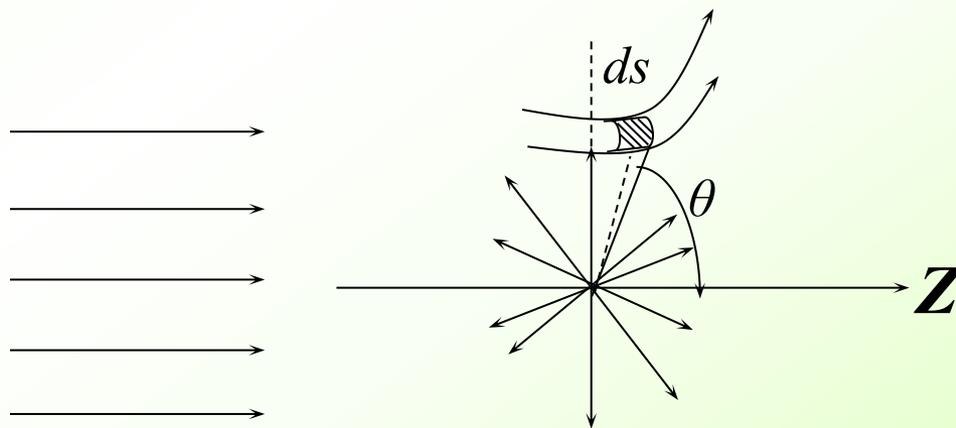
scattering

一 散射截面

散射过程：

方向准直的均匀单能粒子由远处沿Z轴方向射向靶粒子，由于受到靶粒子的作用，朝各方向散射开去，此过程称为**散射过程**。散射后的粒子可用探测器测量。

靶粒子的处在位置称为散射中心。



一 散射截面 (续1)

散射角：入射粒子受靶粒子势场的作用，其运动方向偏离入射方向的角度。

弹性散射：若在散射过程中，入射粒子和靶粒子的内部状态都不发生变化，则称弹性散射，否则称为非弹性散射。

入射粒子流密度 N ：单位时间内通过与入射粒子运动方向垂直的单位面积的入射粒子数，用于描述入射粒子流强度的物理量，故又称为入射粒子流强度。

散射截面：

一 散射截面 (续2)

设单位时间内散射到 (θ, φ) 方向面积元 ds 上 (立体角 $d\Omega$ 内) 的粒子数为 dn , 显然

$$dn \propto \frac{ds}{r^2} = d\Omega \quad dn \propto N$$

综合之, 则有: $dn \propto Nd\Omega$

或 $dn = q(\theta, \varphi)Nd\Omega$ (1)

比例系数 $q(\theta, \varphi)$ 的性质:

$q(\theta, \varphi)$ 与入射粒子和靶粒子 (散射场) 的性质, 它们之间的相互作用, 以及入射粒子的动能有关, 是 θ, φ 的函数

一 散射截面 (续3)

$q(\theta, \varphi)$ 具有面积的量

纲

$$[q] = \left[\frac{dn}{Nd\Omega} \right] = L^2$$

故称 $q(\theta, \varphi)$ 为微分散射截面，简称为截面或角分布

如果在垂直于入射粒子流的入射方向取截面面积 $q(\theta, \varphi)$ ，则单位时间内通过此截面的粒子数恰好散射到 (θ, φ) 方向的单位立体角内。

$$q(\theta, \varphi)N = \frac{dn}{d\Omega} \quad (2)$$

一 散射截面 (续4)

总散射截面：

$$Q = \int q(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} q(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi$$

[注]

由 (2) 式知，由于 N 、 $dn/d\Omega$ 可通过实验测定，故而求得 $q(\theta, \varphi)$ 。

量子力学的任务是从理论上计算出 $q(\theta, \varphi)$ ，以便于同实验比较，从而反过来研究粒子间的相互作用以及其它问题。

二、散射振幅

现在考虑量子力学对散射体系的描述。设靶粒子的质量远大于散射粒子的质量，在碰撞过程中，靶粒子可视为静止。

取散射中心A为坐标原点，散射粒子体系的定态Schrödinger方程

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + U(\vec{r})\psi = E\psi \quad (4)$$

令 $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$ $V(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}U(r)$

方程 (4) 改写为

二、散射振幅 (续1)

$$\nabla^2 \psi + [k^2 - V(\vec{r})]\psi = 0 \quad (5)$$

由于实验观测是在远离靶的地方进行的，从微观角度看，可以认为 $r \rightarrow \infty$ ，因此，在计算 $\psi(\theta, \varphi)$ 时，

仅需考虑 $r \rightarrow \infty$ 处的散射粒子的行为，即仅需考虑 $r \rightarrow \infty$ 处的散射体系的波函数。设 $r \rightarrow \infty$ 时， $V(\vec{r}) \rightarrow 0$ ，方程 (5) 变为

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (6)$$

令
$$\psi = \frac{\phi}{r} \quad (7)$$

二、散射振幅 (续2)

将 (6) 式写成
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left(k^2 - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right) \phi = 0$$

在 $r \rightarrow \infty$ 的情形下，此方程简化为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + k^2 \phi = 0 \quad (8)$$

此方程类似一维波动方程。我们知道，对于一维势垒或势阱的散射情况

$$\psi_k \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\psi_k \xrightarrow{x \rightarrow \infty} c e^{ikx}$$

二、散射振幅 (续3)

式中 e^{ikx} 为入射波或透射波， e^{-ikx} 为散射波，波只沿一方向散射。

对于三维情形，波可沿各方向散射。三维散射时，在 $r \rightarrow \infty$ 处的粒子的波函数应为入射波和散射波之和。

方程 (8) 有两个特解

$$\phi(r, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)e^{ikr}$$

$$\phi'(r, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)e^{-ikr}$$

二、散射振幅 (续4)

因此
$$\psi_2(r, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\psi_2'(r, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikr}}{r}$$

ψ_2 代表由散射中心向外传播的球面散射波，
 ψ_2' 代表向散射中心会聚的球面波，不是散射波，应略去。

在 $r \rightarrow \infty$ 处，散射粒子的波函数是入射平面波 $\psi_1 = e^{ikz}$ 和球面散射波 ψ_2 之和。即

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} Ae^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (9)$$

二、散射振幅 (续5)

为方便起见，取入射平面波 e^{ikx} 的系数 $A=1$ ，这表明 $|\psi_1|^2=1$ ，入射粒子束单位体积中的粒子数为1。

入射波几率密度 (即入射粒子流密度)

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{i\hbar}{2\mu} \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_1^*}{\partial z} - \psi_1^* \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) = \frac{i\hbar}{2\mu} (-ik\psi_1\psi_1^* - ik\psi_1^*\psi) \\ &= \frac{\hbar k}{\mu} = v = N \end{aligned} \quad (10)$$

散射波的几率流密度

二、散射振幅 (续6)

$$J_r = \frac{i\hbar}{2\mu} \left(\psi_2 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial r} - \psi_2^* \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) = \frac{v}{r^2} |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (11)$$

单位时间内，在沿 (θ, φ) 方向 $d\Omega$ 立体角内出现的粒子数为

$$\begin{aligned} dn &= J_r ds = |f(\theta, \varphi)|^2 \frac{v}{r^2} ds \\ &= |f(\theta, \varphi)|^2 N d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

比较 (1) 式与 (12)，得到

$$q(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (13)$$

二、散射振幅 (续7)

由此可知，若知道了 $f(\theta, \varphi)$ ，即可求得 $q(\theta, \varphi)$ ， $f(\theta, \varphi)$ 称为散射振幅。所以，对于能量给定的入射粒子，速率 v 给定，于是，入射粒子流密度 $N=v$ 给定，只要知道了散射振幅 $f(\theta, \varphi)$ ，也就求出微分散射截面。 $f(\theta, \varphi)$ 的具体形式通过求 Schrödinger 方程 (5) 的解并要求在时具有渐近形式 (9) 而得出。

下面介绍两种求散射振幅或散射截面的方法：分波法，玻恩近似方法。

分波法是准确的求散射理论问题的方法，即准确的散射理论。

三、分波法

讨论粒子在中心力场中的散射。

粒子在势场中的势能为 $U(\vec{r})$ ，状态方程

$$\nabla^2 \psi + [k^2 - V(r)]\psi = 0 \quad (3-1)$$

取沿粒子入射方向并通过散射中心的轴线为极轴z，显然 ψ 与 φ 无关，按照§3.3.的讨论，对于具有确定能量的粒子，方程(3-1)的特解为

$$R_l(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

由于现在 ψ 与 φ 无关 ($m=0$)，所以，方程(1)的特解可写成

三、分波法 (续1)

$$R_l(r)P_l(\cos\theta)$$

方程 (3-1) 的通解为所有特解的线性迭加

$$\psi(r, \theta) = \sum_l R_l(r)P_l(\cos\theta) \quad (3-2)$$

$R_l(r)$ 为待定的径向波函数，每个特解称为一个分波， $R_l(r)P_l(\cos\theta)$ 称为第 l 个分波，通常称 $l=0,1,2,3,\dots$ 的分波分别为 $s, p, d, f\dots$ 分波

(3-2) 代入 (3-1)，得径向方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[k^2 - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = 0 \quad (3-3)$$

三、分波法 (续2)

令 $R_l(r) = \frac{U_l(r)}{r}$ 代入上方程

$$\frac{d^2 U_l}{dr^2} + \left[k^2 - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U_l(r) = 0 \quad (3-4)$$

考虑方程 (3-4) 在 $r \rightarrow \infty$ 情况下的极限解

令 $r \rightarrow \infty$ 方程 (3-4) 的极限形式

$$\frac{d^2 U_l(r)}{dr^2} + k^2 U_l(r) = 0$$

由此求得： $U_l(r) = A_l' \sin(kr + \delta_l')$

$$R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{A_l}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right) \quad (3-5)$$

三、分波法 (续3)

为了后面的方便起见，这里引入了两个新的常数

$$A_l = kA'_l, \quad \delta_l = \frac{l\pi}{2} + \delta'_l$$

将 (3-5) 代入 (3-2)，得到方程 (3-1) 在 $r \rightarrow \infty$ 情形下通解的渐近形式

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right) P_l(\cos\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{2ikr} \left[e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l)} \right] P_l(\cos\theta) \end{aligned} \quad (3-6)$$

三、分波法 (续4)

另一方面，按上节的讨论，在远离散射中心处，粒子的波函数

$$\psi(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3-7)$$

将平面波 e^{ikz} 按球面波展开

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (3-8)$$

式中 $j_l(kr)$ 是球贝塞尔函数

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2ikr} \left[e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} \right] \quad (3-9)$$

三、分波法 (续5)

利用 (3-8) 、 (3-9) ， 可将 (3-7) 写成

$$\psi(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)i^l}{2ikr} \left[e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} \right] P_L(\cos\theta) \quad (3-10)$$

(3-6) 和 (3-10) 两式右边应相等， 即

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{2ikr} \left[e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l)} \right] P_l(\cos\theta) \\ &= f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)i^l}{2ikr} \left[e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} \right] P_L \cos\theta \end{aligned}$$

分别比较等式两边 e^{ikr} 和 e^{-ikr} 前边的系数， 得

三、分波法 (续6)

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l e^{i(\delta_l - \frac{1}{2}l\pi)} P_l(\cos\theta) = 2ikf(\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{-i\frac{1}{2}l\pi} P_l(\cos\theta) \quad (3-11)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l e^{-i(\delta_l - \frac{1}{2}l\pi)} P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{i\frac{1}{2}l\pi} P_l(\cos\theta) \quad (3-12)$$

用 $P_{l'}(\cos\theta)$ 乘以 (12) 式，再对 θ 从 $0 \rightarrow \pi$ 积分，并利用 Legendre 多项式的正交性

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

可以得到 $A_l e^{-i(\delta_l - \frac{1}{2}l\pi)} = (2l+1) i^l e^{i\frac{1}{2}l\pi}$

三、分波法 (续7)

$$\text{即 } A_l = (2l+1)i^l e^{i\delta_l} = (2l+1)e^{\frac{i(-l\pi+\delta_l)}{2}} \quad (3-13)$$

将此结果代入 (3-11) 式

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)e^{i2\delta_l} P_l(\cos\theta) = 2ikf(\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(\cos\theta)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)(e^{i2\delta_l} - 1)P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2ik} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)e^{i\delta_l} (e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l})P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)e^{i\delta_l} \sin \delta_l \cdot P_l(\cos\theta) \quad (3-14)$$

三、分波法 (续8)

可见，求散射振幅 $f(\theta)$ 的问题归结为求 δ_l ，求 δ_l 的具体值关键是解径向波函数 $R(r)$ 的方程 (3-3)

δ_l 的物理意义：

由 (3-8)，(3-9) 知， $\left(kr - \frac{1}{2}l\pi\right)$ 是入射平面波的第 l 个分波的位相；由 (3-6) 知， $\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right)$ 是散射波第 l 个分波的位相。所以， δ_l 是入射波经散射后第 l 个分波的位相移动（相移）。

三、分波法 (续9)

微分散射截面

$$q(\theta) = |f(\theta)|^2 = \left| \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \right|^2 \quad (3-15)$$

总散射截面

$$\begin{aligned} Q &= \int q(\theta) d\Omega = 2\pi \int q(\theta) \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} \sin\delta_l \sin\delta_{l'} \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} \sin\delta_l \sin\delta_{l'} \cdot \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \end{aligned}$$

三、分波法 (续10)

$$\text{即} \quad Q = \sum_{l=0}^{\infty} Q_l \quad (3-16)$$

$$\text{式中} \quad Q_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (3-17)$$

是第 l 个分波的散射截面。

由上述看们看出：求散射振幅 $f(\theta)$ 的问题归结为求相移 δ_l ，而 δ_l 的获得，需要根据 $U(r)$ 的具体情况解径向方程 (3-3) 求 $R_l(r)$ ，然后取其渐近解，并写为

$$R_l(r) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right)$$

三、分波法 (续11)

即可得到第 l 个分波的相移，由于每个分波都将产生相移 δ_l ，所以，必须寻找各个分波的相移来计算散射截面，这种方法称为分波法。

光学定理

$$Q = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)$$

(证明见后)

三、分波法 (续12)

分波法的适用范围

分波法求散射截面是一个无穷级数的问题。从原则上讲，分波法是散射问题的普遍方法。但实际上，依次计算级数中的各项是相当复杂的，有时也是不可能的，所以只能在一定的条件下计算级数中的前几项，达到一定精确度即可。

散射主要发生在势场的作用范围内，若以散射中心为心，以 a 为半径的球表示这个范围，则 $r > a$ 时，散射效果就可以忽略不计了。

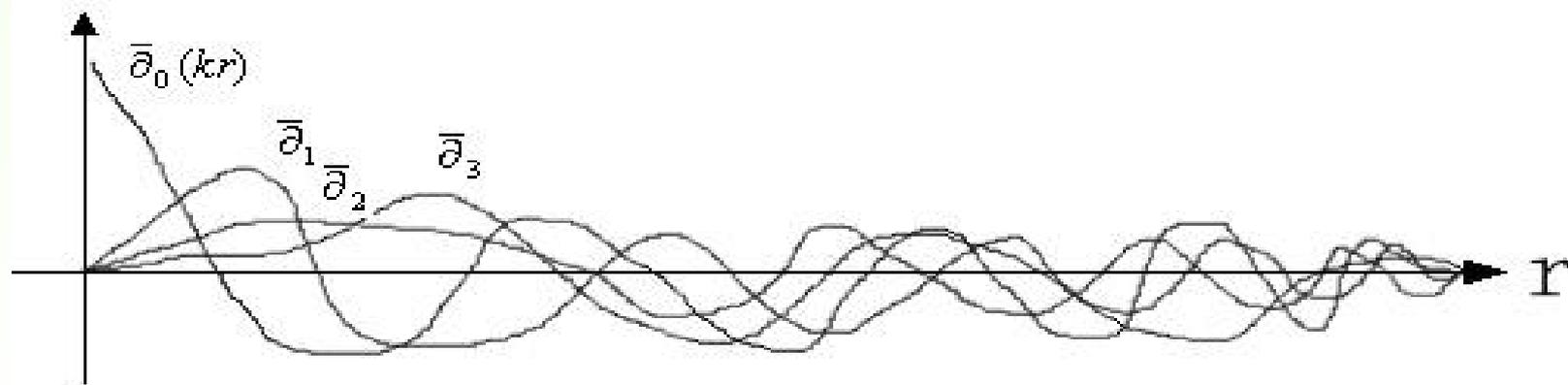
三、分波法 (续13)

由于入射波的第 l 个分波的径向函数 $j_l(kr)$ 的第一极大值位于 $r = \frac{l}{k}$ 附近，当 r 较大时， l 愈大， $j_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

愈快，如果 $j_l(kr)$ 的第一极大值位于 $r = \frac{l}{k} > 0$ ，即 $l > ka$ 时，在 $r \leq a$ 内， $j_l(kr)$ 的值很小。亦即第 l 个分波受势场的影响很小，散射影响可以忽略，只有第 l 个分波之前的各分波必须考虑。所以，我们把分波法适用的条件

三、分波法 (续14)

写成 $l \leq ka$ ，而 $l \geq ka$ 的分波不必考虑， ka 愈小，则需计算的项数愈小，当 $ka \ll 1$ 时， $l \sim 0$ ，这时仅需计算一个相移 δ_0 即足够了， ka 足够小，意味着入射粒子的动能较低，所以分波法适用于低能散射， $l \geq ka$ 的分波散射截面可以略去。



三、分波法 (续15)

说 明

已知 $U(r)$ 时，可用分波法求出低能散射的相移和散射截面，在原子核及基本粒子问题中，作用力不清楚，也即不知道 $U(r)$ 的具体形式，这时，我们可先由实验测定散射截面和相移，然后确定势场和力的形式和性质，这是研究原子核及基本粒子常用的一种方法。

三、分波法 (续16)

思考题：什么是分波法？

分波法是说入射平面波 e^{ikz} 按球面波展开

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

展开式中的每一项称为一个分波，每个分波在中心力场的影响下，各自产生一个相移 δ_l 。而 δ_l 的获得需根据 $U(r)$ 的具体形式解径向方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{2\mu U(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0$$

三、分波法 (续17)

求出 $R_l(r)$ ，然后取其渐近解，并写成

$$R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right)$$

即可得到第 l 个分波的相移，由于每个分波都将产生相移 δ_l ，所以，计算散射截面时须寻找各个分波的相移，这种方法称为分波法。

三、分波法 (续18)

分波法应用举例**ex. 球方势阱和球方势垒的低能散射。**

粒子的势能：
$$U(r) = \begin{cases} U_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

U_0 是势阱或势垒的深度或高度。设入射粒子能量很小，其德布罗意波长比势场作用范围大很多（质子和中子的低能散射可以近似地归结为这种情况），求粒子的散射截面。

Solve: 粒子的径向方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR_l(r)}{dr} \right] + \left[k^2 - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = 0 \quad (1)$$

三、分波法 (续19)

其中 $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$, $V(r) = \frac{2\mu U(r)}{\hbar^2}$

E 为粒子的能量, $U(r)$ 为粒子在靶粒子中心力场中的势能。

对于球方势阱 $U_0 < 0$

$$V(r) = \frac{2\mu U(r)}{\hbar^2} = \begin{cases} -\frac{2\mu |U_0|}{\hbar^2} = -k_0^2 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (2)$$

因粒子波长 $\lambda \gg a \xrightarrow{\frac{h}{\lambda} = k\hbar} \frac{1}{k} \gg a \Rightarrow ka \ll 1$

所以仅需讨论s波的散射 ($l=0$)，据此及 (2) 式，可将方程 (1) 写成

三、分波法 (续20)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR_0(r)}{dr} \right] + k'^2 R_0(r) = 0 \quad r \leq a \quad (3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR_0(r)}{dr} \right] + k^2 R_0(r) = 0 \quad r > a \quad (4)$$

其中 $k'^2 = k^2 + k_0^2$

令 $R_0(r) = \frac{u_0(r)}{r}$

则 (3), (4) 可写成

$$\frac{d^2 u_0(r)}{dr^2} + k'^2 u_0(r) = 0 \quad (5)$$

三、分波法 (续21)

$$\frac{d^2 u_0(r)}{dr^2} + k^2 u_0(r) = 0 \quad (6)$$

其解为 $u_0(r) = A \sin(k'r + \delta'_0) \quad r \leq a \quad (7)$

$$u_0(r) = B \sin(kr + \delta_0) \quad r > a \quad (8)$$

于是 $\begin{cases} R_0(r) = \frac{A}{r} \sin(k'r + \delta'_0) & r \leq a \\ R_0(r) = \frac{B}{r} \sin(kr + \delta_0) & r > a \end{cases} \quad (9)$

$$\begin{cases} R_0(r) = \frac{A}{r} \sin(k'r + \delta'_0) & r \leq a \\ R_0(r) = \frac{B}{r} \sin(kr + \delta_0) & r > a \end{cases} \quad (10)$$

因 $R_0(r) = \frac{u_0(r)}{r}$ **在** $r = 0$ **处有限，必须有** $u_0(0) = 0$

所以 $\delta'_0 = 0$

三、分波法 (续22)

在 $r=a$ 处, $R_0(r)$ 及 $dR_0(r)/dr$ 连续, 因此, $u_0(r)$ 及 $du_0(r)/dr$ 在 $r=a$ 处连续。由 (7), (8) 式得

$$\frac{1}{k} \operatorname{tg}(ka + \delta_0) = \frac{1}{k'} \operatorname{tg}k'a$$

由此求得相移 $\delta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k'} \operatorname{tg}k'a\right) - ka$ (11)

总散射截面 $Q = \sum_l Q_l \approx Q_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0$

即 $Q = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k'} \operatorname{tg}k'a\right) - ka \right]$ (12)

三、分波法 (续23)

在粒子能量很低 ($k \rightarrow 0$) 的情况下, $k' \approx k_0$ 。

利用 $x \ll 1$ 时, $\arctg x \approx x$, 有

$$\delta_0 \approx \frac{k}{k'} \operatorname{tg} k' a - ka = ka \left(\frac{\operatorname{tg} k_0 a}{k_0 a} - 1 \right) \ll 1 \quad (13)$$

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{4\pi}{k^2} \delta_0^2 = 4\pi a^2 \left(\frac{\operatorname{tg} k_0 a}{k_0 a} - 1 \right)^2 \quad (14)$$

对于球方势垒 $U_0 > 0$ 。

这时, 用 ik_0 代替以上讨论中的 k_0 , 在粒子能量很低 ($k \rightarrow 0$) 的情况下, (13) 变为

$$\delta_0 = ka \left(\frac{\operatorname{th} k_0 a}{k_0 a} - 1 \right) \quad (15)$$

三、分波法 (续24)

$$(14) \text{ 写为 } Q = 4\pi a^2 \left(\frac{thk_0 a}{k_0 a} - 1 \right)^2 \quad (16)$$

当 $U_0 \rightarrow \infty$ 时 $k_0 \rightarrow \infty$ ，由于

$$thk_0 a = \frac{e^{k_0 a} - e^{-k_0 a}}{e^{k_0 a} + e^{-k_0 a}} \rightarrow 1$$

代入 (16) 式，得 $Q = 4\pi a^2$

低能粒子经无限高势垒场的散射，其散射截面等于半径为 a 的球面面积，它与经典情况不同，在经典情况下，总散射截面就是作为散射中心的半径为 a 的硬球的最大截面面积 (πa^2)，它是量子力学计算的结果的 $1/4$ 。

四. 玻恩近似

分波法仅适用于讨论低能粒子的散射问题，当入射粒子的能量很高时，采用分波法计算散射截面就不恰当了，对于高能入射粒子而言，势能 $U(\vec{r})$ 可看作是微扰，体系的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

其中， $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu}$ 是粒子的动能（自由粒子的哈密顿量），其本征函数取箱归一化的动量本

征函数

$$\psi_{\vec{k}} = L^{-3/2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \left(\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\mu}, \text{波矢量} \right)$$

四. 玻恩近似 (续1)

粒子与散射力场的相互作用能： $\hat{H}' = U(\vec{r})$

这里，采用箱归一化意味着体积 L^3 内只有一个粒子。于是，入射粒子流密度

$$N = \nu L^{-3}$$

单位时间内，散射到 (θ, φ) 方向立体角 $d\Omega$ 内的粒子数

$$dn = q(\theta, \varphi) N d\Omega = q(\theta, \varphi) \nu L^{-3} d\Omega \quad (1)$$

另一方面，入射粒子由于受到靶粒子力场的微扰作用，从动量为 $\hbar\vec{k}$ 的初态 $\psi_k(\vec{r})$ 跃迁到动量 $\hbar\vec{k}'$ 的末态 $\psi_{k'}(\vec{r})$ ，即

四. 玻恩近似 (续2)

$$\psi_k(\vec{r}) \longrightarrow \psi_{k'}(\vec{r})$$

对于弹性散射，动能守恒

$$|\vec{k}'| = |\vec{k}| = k$$

**单位时间内，粒子从初态 $\psi_k(\vec{r})$ 跃迁到动量大
小为 $p = \hbar k$ ，方向为 (θ, φ) 的立体角 $d\Omega$ 内所有末
态上的几率，即跃迁几率**

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{k'k}|^2 \rho(m) d\Omega \quad (2)$$

跃迁矩阵元

$$H'_{k'k} = \int \psi_{k'}^* U(\vec{r}) \psi_k(\vec{r}) d\tau$$

$$= L^{-3} \int U(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} d\tau \quad (3)$$

四. 玻恩近似 (续3)

$\rho(m)$ 为动量大小为 $\hbar k$ 方向角为 (θ, ϕ) 的末态数目 (态密度)

$$\rho(m) = \left(\frac{L}{2\pi \hbar} \right)^3 \mu \hbar k \quad (4)$$

将 (3)、(4) 代入 (2) 式, 得出

$$\omega = \nu L^3 \frac{\mu k}{4\pi^2 \hbar^3 \nu} \left| \int U(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} d\tau \right|^2 d\Omega \quad (5)$$

此式在数量上即表示单位时间内跃迁到立体角 $d\Omega$ 内的粒子数

$$dn = \nu L^3 \frac{\mu k}{4\pi^2 \hbar^3 \nu} \left| \int U(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \cdot d\tau \right|^2 d\Omega \quad (6)$$

四. 玻恩近似 (续4)

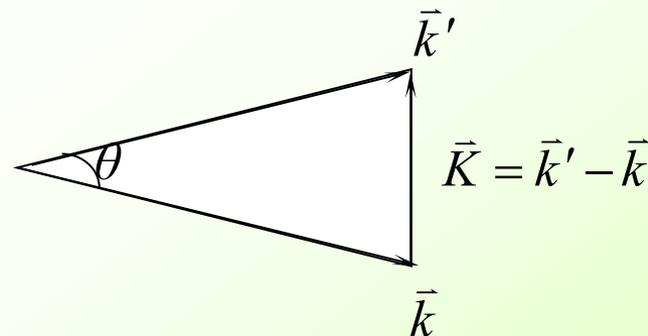
比较 (1) , (6) 式, 并注意到 $\mu v = \hbar k$, 立即可得

$$q(\theta, \varphi) = \frac{\mu^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| - \int U(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} d\tau \right|^2 \quad (7)$$

式中绝对值内保留负号是因为用格林函数法算出的散射振幅 $f(\theta, \varphi)$ 有一负号。引入矢量

$$\vec{K} = \vec{k}' - \vec{k}$$

$$K = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$



其中 θ 是散射角, $\hbar \vec{K}$ 是散射引起动量的变化, 于是

$$\int U(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \cdot d\tau = \int U(r) e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} d\tau \quad (8)$$

四. 玻恩近似 (续5)

$$\begin{aligned} \int U(\vec{r}) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}} d\tau &= \int_0^\infty U(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{-iK r \cos\theta'} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \\ &= \frac{4\pi}{K} \int_0^\infty r U(r) \sin(Kr) dr \end{aligned} \quad (9)$$

取 \vec{K} 的方向为球坐标的极轴方向, θ', ϕ' 为方位角, 则可简化积分

$$\text{因而} \quad q(\theta, \varphi) = \frac{4\mu^2}{K^2 \hbar^4} \left| \int_0^\infty r U(r) \sin(Kr) dr \right|^2 \quad (10)$$

此式即为玻恩近似表达式, 若势能 $U(r)$ 已知, 计算积分后就可以求出微分散射截面, 所以, 应用玻恩近似法计算微分散射截面时, 主要难点在于给出 $U(r)$ 的具体形式后, 如何计算积分 $\int_0^\infty r U(r) \sin Kr dr$ 。

四. 玻恩近似 (续6)

下面给出几种常见的较复杂的作用势能及对应的积分公式。

$$U(r) \left\{ \begin{array}{l} U_0 e^{-ar} \dots \int_0^{\infty} r e^{-ar} \sin(Kr) dr = \frac{2aK}{(a^2 + k^2)^2} \\ U_0 e^{-a^2 r^2} \dots \int_0^{\infty} r e^{-a^2 r^2} \sin(Kr) dr = \frac{\sqrt{\pi} K e^{-\frac{K^2}{4a^2}}}{4a^3} \\ U_0 \frac{e^{-ar}}{r} \dots \int_0^{\infty} e^{-ar} \sin(Kr) dr = \frac{K}{a^2 + K^2} \\ \frac{U_0}{r^2} \dots \int_0^{\infty} \frac{\sin Kr}{r} dr = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

玻恩近似法应用举例

玻恩近似法的适用范围：

玻恩近似法只适用于粒子的高能散射，它与分波法（适用于低能散射）相互补充，作为解决散射问题的两种主要方法。

Ex.1 计算高速带电粒子 $Z'e$ ，被中性原子内部屏蔽库仑场 $U(r) = \frac{ZZ'e_s^2}{r} e^{-r/a}$ 散射，求散射截面。

Solve: 高速带电粒子属高能粒子，故

$$q(\theta) = \frac{4\mu^2}{K^2 \hbar^4} \left| \int_0^\infty r U(r) \sin(Kr) dr \right|^2$$

四. 玻恩近似 (续8)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\mu^2 Z^2 Z'^2 e_s^4}{K^2 \hbar^4} \left| \int_0^\infty e^{-\frac{r}{a}} \sin(Kr) dr \right|^2 = \frac{4\mu^2 Z^2 Z'^2 e_s^4}{K^2 \hbar^4} \left(\frac{K}{K^2 + \frac{1}{a^2}} \right)^2 \\
 &= \frac{4\mu^2 Z^2 Z'^2 e_s^4}{\hbar^4} \frac{a^4}{(1 + a^2 K^2)^2} \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中 $K = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ (2)

当入射粒子的能量很大，散射角 θ 较大时

$$Ka = 2ka \sin \frac{\theta}{2} \gg 1 \quad (3)$$

所以上式可近似写成

四. 玻恩近似 (续9)

$$\begin{aligned}
 q(\theta) &\approx \frac{4\mu^2 Z^2 Z'^2 e_s^4}{\hbar^4} \frac{a^4}{(Ka)^4} = \frac{4\mu^2 Z^2 Z'^2 e_s^4}{\hbar^4} \frac{1}{16 k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{Z^2 Z'^2 e_s^4}{4\mu^2 v^4} \operatorname{csc}^4 \frac{\theta}{2} \quad (4)
 \end{aligned}$$

此式称为**Rutherford散射公式**。首先由卢瑟福用经典方法计算库仑散射（不考虑屏蔽作用）得出。这说明式（3）是经典力学方法可以适用的条件。式（4）表明要求散射角比较大，能量比较大，这时散射要在原子核附近发生，即入射粒子深入到原子内部，因而核外电子不起屏蔽作用。当 θ 角很小时，条件（3）不能满足，Rutherford公式不能成立，此时需用（1）式。

四. 玻恩近似 (续10)

EX.2 粒子受到势能为 $U(r) = \frac{a}{r^2}$ 的场的散射，求s分波的微分散射截面。

Solve 为一般起见，先考虑 l 分波的相移，再取特殊情况 $l=0$ 分波的相移。

根据边界条件

$$R_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{A_l}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right) \quad (1)$$

解径向函数 $R_l(r)$ 满足的径向方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R(r) \right) + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{2\mu U(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) = 0$$

令 $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad V_0 = \frac{2\mu a}{\hbar^2}$

四. 波恩近似 (续11)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) + \left(k^2 - \frac{V_0}{r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) = 0$$

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R(r) + 2r \frac{d}{dr} R + (k^2 r^2 - l(l+1) - V_0) R(r) = 0 \quad (2)$$

又令 $\rho = kr$ $R(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} u(kr) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} u(\rho)$

所以 (2) 式可以写成

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} u(\rho) + \rho \frac{du(\rho)}{d\rho} + \left\{ \rho^2 - \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + V_0 \right] \right\} u(\rho) = 0 \quad (3)$$

令 $v^2 = \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + V_0$

于是 (3) 式又可写成

四. 波恩近似 (续12)

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} u(\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} u(\rho) + (\rho^2 - \nu^2) u(\rho) = 0 \quad (4)$$

上式是 ν 阶贝塞尔方程，其解为 $J_{\pm\nu}(\rho)$ ，因此

$$R_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\pm\nu}$$

但当 $r \rightarrow 0$ 时， $J_{-\nu}(kr) \rightarrow \infty$

所以在 $r=0$ 附近

$$R_\nu(r) \sim \frac{1}{\sqrt{kr}} J_\nu(kr)$$

由 $r \rightarrow \infty$ $J_\nu(kr) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

四. 玻恩近似 (续13)

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{1}{2}v\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{1}{2}v\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$R(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}v\pi + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5)$$

比较 (1) 式和 (5) 式, 则有

$$\delta_l = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(l - v) = \frac{\pi}{4}(2l + 1) - \frac{1}{2}v\pi$$

$$= \frac{\pi}{4}(2l + 1) - \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + V_0}$$

$$= \frac{\pi}{4}(2l + 1) - \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\mu a}{\hbar^2}}$$

四. 玻恩近似 (续14)

$$\text{令 } l=0 \quad \delta_0 = \frac{\pi}{4} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\mu a}{\hbar^2}} \right)$$

将 δ_0 值代入微分散射截面的表达式

$$q(\theta) = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \right|^2$$

立即可得到s分波的微分散射截面

$$q_0(\theta) = \frac{1}{k^2} \left| P_0(\cos\theta) e^{i\delta_0} \sin\delta_0 \right|^2 = \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0$$

$$= \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\pi}{4} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\mu a}{\hbar^2}} \right)$$

s分波散射截面 $Q_l = \int q_0(\theta) d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \frac{\pi}{4} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\mu a}{\hbar^2}} \right)$

四. 玻恩近似 (续15)

EX.3 慢速粒子受到势能为 $U(r) = \begin{cases} U_0 & \text{当 } r < a \\ 0 & \text{当 } r > a \end{cases}$ 的场的散射，

若 $E < U_0$, $U_0 > 0$ ，求散射截面。

Solve: 由于是慢速粒子散射，对于低能散射只需考虑 S 分波。

由径向波函数 $R_l(r)$ 所满足的径向方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{2\mu U(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) = 0$$

当 $l=0$ 时

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{2\mu U(r)}{\hbar^2} \right) R(r) = 0 \quad (1)$$

令 $R(r) = \frac{u(r)}{r} \quad (2)$

四. 玻恩近似 (续16)

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - U(r)] u(r) = 0 \quad (3)$$

将 $U(r) = \begin{cases} U_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$ 代入以上方程

并令 $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad k'^2 = \frac{2\mu(U_0 - E)}{\hbar^2}$ (4)

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} - k'^2 u(r) = 0 \quad r < a \quad (5)$$

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + k^2 u(r) = 0 \quad r > a \quad (6)$$

$$u(r) = A'e^{k'r} + B'e^{-k'r} \quad r < a$$

$$u(r) = C \sin(kr + \delta_0) \quad r > a$$

四. 波恩近似 (续17)

$$R(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{1}{r} (A'e^{k'r} + B'e^{-k'r}) \quad r < a$$

$$R(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{C}{r} \sin(kr + \delta_0) \quad r > a$$

当 $r \rightarrow 0$, $R(r)$ 应有限, 则要求

$$A' + B' = 0$$

$$R(r) = \frac{A'}{r} (e^{k'r} - e^{-k'r}) = \frac{A}{r} \operatorname{sh}k'r \quad r < a$$

在 $r=0$ 处, $R(r)$ 和 $\frac{dR(r)}{dr}$ 连续

$$C \sin(ka + \delta_0) = A \operatorname{sh}k'a$$

$$C k \cos(ka + \delta_0) = A k' \operatorname{ch}k'a$$

两式相除, 得

$$\operatorname{tg}(ka + \delta_0) = \frac{k}{k'} \operatorname{th}k'a$$

四. 玻恩近似 (续18)

$$\delta_0 = -ka + \operatorname{arctg} \left[\frac{k}{k'} thk'a \right] \quad (7)$$

总散射截面

$$Q \approx Q_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \left[-ka + \operatorname{arctg} \left(\frac{k}{k'} thk'a \right) \right]$$

讨论：当粒子的能量 $E \ll U_0$ 时，

$$k' = \frac{2\mu(U_0 - E)}{\hbar^2} \approx \frac{2\mu U_0}{\hbar^2} = k_0$$

$$\frac{k}{k'} \ll 1$$

$$\delta_0 \approx -ka + \frac{k}{k'} thk'a = -ka + \frac{k}{k_0} thk_0 a = ka \left[\frac{thk_0 a}{k_0 a} - 1 \right]$$

如果粒子能量很低 ($k \rightarrow 0$) 的情况下

四. 玻恩近似 (续19)

$$\delta_0 = ka \left[\frac{thk_0 a}{k_0 a} - 1 \right] \ll 1$$

$$Q \approx Q_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{4\pi}{k^2} \delta_0^2 = 4\pi a^2 \left(\frac{thk_0 a}{k_0 a} - 1 \right)^2$$

如果 $U_0 \rightarrow \infty$ 时, $k_0 \rightarrow \infty$, 于是有

$$thk_0 a = \frac{e^{k_0 a} - e^{-k_0 a}}{e^{k_0 a} + e^{-k_0 a}} \rightarrow 1$$

$$Q \approx 4\pi a^2$$

在这种情况下, 总散射截面等于半径为 a 的球面面积。它与经典情况不同, 在经典情况下

$$Q = \pi a^2$$

EX.4 只考虑s分波，求慢速粒子受到势场 $U(r) = \frac{a}{r^4}$ 的场散射时的散射截面

Solve: 根据边界条件

$$R_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{A_l}{kr} \sin\left(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l\right)$$

解径向方程：

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} R_l(r) \right] + \left[\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{2\mu U(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = 0$$

令 $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$ $V(r) = \frac{2\mu U(r)}{\hbar^2} = \frac{2\mu a}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{V_0}{r^4}$

则上方程简写为：

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} R_l(r) \right] + \left[k^2 - \frac{V_0}{r^4} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) = 0$$

四. 波恩近似 (续21)

$$\text{令 } \rho = kr \quad R_l(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} u_l(\rho)$$

代入上方程，有

$$\rho^2 \frac{d^2 u_l(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{du_l(\rho)}{d\rho} + \left[\rho^2 - \frac{V_0}{r^2} - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] u_l(\rho) = 0$$

只考虑s分波， $l = 0$ ，由于 $r \rightarrow \infty$ ， $\frac{V_0}{r^2} \rightarrow 0$ ，

上方程在 $r \rightarrow \infty$ 时的渐近形式为

$$\rho^2 \frac{d^2 u_l(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{du_l(\rho)}{d\rho} + \left[\rho^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] u_l(\rho) = 0$$

此为 $\frac{1}{2}$ 阶贝塞尔方程，其解为 $J_{\pm \frac{1}{2}}(\rho)$

四. 玻恩近似 (续22)

由于 $\rho \rightarrow 0$, $J_{\frac{1}{2}}(\rho) \rightarrow \infty$, 所以有限解为 $J_{\frac{1}{2}}(\rho)$

于是

$$R_0(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\frac{1}{2}}(kr)$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi kr} \cos\left(kr - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi kr} \sin kr$$

比较 (1) 和 (2) 两式, 并注意取 (1) 式中的 l 等于 0, 则 $\delta_0 = 0$

$$Q_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 0$$

EX.5 用玻恩近似法求粒子在势能场 $U(r) = U_0 e^{-a^2 r^2}$ 中散射的散射截面

Solve: 根据微分散射截面公式

$$q(\theta, \varphi) = \frac{4\mu^2}{K^2 \hbar^4} \left| \int_0^\infty r U(r) \sin Rr dr \right|^2$$

于是将 $U(r) = U_0 e^{-a^2 r^2}$ 代入上式，积分

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r U(r) \sin Kr dr &= U_0 \int_0^\infty r e^{-a^2 r^2} \sin Kr dr \\ &= -\frac{U_0}{2a^2} e^{-a^2 r^2} \sin Kr \Big|_0^\infty + \frac{KU_0}{2a^2} \int_0^\infty e^{-a^2 r^2} \cos Kr dr \\ &= \frac{KU_0}{2a^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} e^{-\frac{K^2}{4a^2}} = \frac{KU_0}{4a^3} \sqrt{\pi} e^{-\frac{K^2}{4a^2}} \end{aligned}$$

四. 玻恩近似 (续24)

$$q(\theta, \varphi) = \frac{\pi U_0^2 \mu^2}{4a^6 \hbar^4} e^{-\frac{K^2}{2a^2}} \quad \left(K = 2k \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$q(\theta, \varphi) = \frac{\pi U_0^2 \mu^2}{4a^6 \hbar^4} \exp \left\{ -\frac{2k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{a^2} \right\}$$

$$= \frac{\pi U_0^2 \mu^2}{4a^6 \hbar^4} \exp \left\{ -\frac{k^2}{a^2} (1 - \cos \theta) \right\}$$

$$Q = \int q(\theta, \varphi) d\Omega$$

四. 玻恩近似 (续25)

$$= \frac{\pi U_0^2 \mu^2}{4a^6 \hbar^4} e^{-\frac{k^2}{a^2}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{k^2}{a^2} \cos\theta\right\} \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

$$= -\frac{\pi^2 U_0^2 \mu^2}{2a^4 \hbar^4 k^2} e^{-\frac{k^2}{a^2}} \exp\left\{\frac{k^2}{a^2} \cos\theta\right\} \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{\pi^2 U_0^2 \mu^2}{2a^4 \hbar^4 k^2} e^{-\frac{k^2}{a^2}} \left(e^{\frac{k^2}{a^2}} - e^{-\frac{k^2}{a^2}} \right)$$

$$= \frac{\pi^2 U_0^2}{a^4 \hbar^2 v^2} e^{-\frac{k^2}{a^2}} \operatorname{sh} \frac{k^2}{a^2}$$

EX.6 用玻恩近似法求粒子在势能场

$$U(r) = \begin{cases} \frac{ze_s^2}{r} - \frac{r}{b} & \text{当 } r < a \\ 0 & \text{当 } r > a \end{cases}$$

中散射的微分散射截面，式中 $b = \frac{a^2}{ze_s^2}$ 。

Solve:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty rU(r)\sin Krdr &= \int_0^a \left(ze_s^2 - \frac{r^2}{b} \right) \sin Krdr \\ &= -\frac{1}{K} \left(ze_s^2 - \frac{r^2}{b} \right) \cos Kr \Big|_0^a - \frac{2}{Kb} \int_0^a r \cos Krdr \\ &= \frac{1}{K} \left[ze_s^2 - \left(ze_s^2 - \frac{a^2}{b} \right) \cos Ka \right] - \frac{2}{K^2 b} r \sin Kr \Big|_0^a + \frac{2}{K^2 b} \int_0^a \sin Krdr \end{aligned}$$

四. 玻恩近似 (续27)

$$= \frac{1}{K} \left[z e_s^2 - \left(z e_s^2 - \frac{a^2}{b} \right) \cos Ka \right] - \frac{2a}{K^2 b} \sin Ka + \frac{2}{K^3 b} (1 - \cos Ka)$$

$$= \frac{1}{K} \left[z e_s^2 + \frac{2}{K^2 b} - \left(z e_s^2 - \frac{a^2}{b} + \frac{2}{K^2 b} \right) \cos Ka - \frac{2a}{K b} \sin Ka \right]$$

$$q(\theta, \varphi) = \frac{4\mu^2}{K^2 \hbar^4} \left| \int_0^\infty r U(r) \sin Kr dr \right|^2$$

$$= \frac{4\mu^2}{K^4 \hbar^4} \left| z e_s^2 + \frac{2}{K^2 b} - \left(z e_s^2 - \frac{a^2}{b} + \frac{2}{K^2 b} \right) \cos Ka - \frac{2a}{K b} \sin Ka \right|^2$$

四. 玻恩近似 (续28)

EX.7 设 $V(x) = -V_0 / (1 + e^{x/a})$, 求反射系数

Solve:
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

令
$$\xi = -e^{-x/a}$$

则
$$V = -V_0 / \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) = \frac{V_0\xi}{1-\xi} \quad (2)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{1}{a} \xi \frac{d\psi}{d\xi} \quad (3)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\psi}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{a^2} \xi \left(\xi \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{d\psi}{d\xi} \right) \quad (4)$$

将 (2)—(4) 代入方程 (1) , 则有

四. 玻恩近似 (续29)

$$\xi^2 \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \xi \frac{d\psi}{d\xi} - \frac{2\mu V_0 \xi a^2}{(1-\xi)\hbar^2} \psi(\xi) = -k^2 a^2 \psi(\xi) \quad (5)$$

其中 $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$

当 $r \rightarrow \infty$ 时，方程 (1) 的渐近形式

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 \psi(x)$$

此方程有平面波解 $\psi(x) \sim e^{ikx} = \xi^{-ika}$

令 $\psi(\xi) = \xi^{-ika} \varphi(\xi) \quad (6)$

当 $x \rightarrow \infty$ 时， $\xi \rightarrow 0$ ， $\varphi(\xi)$ 趋于常数

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \xi^{-ika} \frac{d\varphi}{d\xi} - ika \xi^{-ika-1} \varphi$$

四. 玻恩近似 (续30)

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \xi^{-ika} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - 2ika \xi^{-ika-1} \frac{d\varphi}{d\xi} + ika(ika+1)\xi^{-ika-2}\varphi \quad (7)$$

利用这些关系式，方程 (5) 可写成

$$(1-\xi)\xi \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (1-2ika)(1-\xi) \frac{d\varphi}{d\xi} - k_0^2 a^2 \varphi = 0 \quad (8)$$

其中 $k_0 = \sqrt{2\mu V_0}/\hbar = \sqrt{k_1^2 - K^2}$ ($k_1 = \sqrt{2\mu(V_0 + E)}/\hbar$)

将 (8) 写成

$$(1-\xi)\xi \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (1-2ika)(1-\xi) \frac{d\varphi}{d\xi} - (k_1^2 - k^2)a^2 \varphi = 0 \quad (9)$$

再令 $c = (1-2ika)$, $\alpha = i(k_1 - k)a$, $\beta = -i(k_1 + k)a$

四. 玻恩近似 (续31)

显然 $\alpha + \beta + 1 = c$

于是，方程 (9) 变为

$$(1-\xi)\xi \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + [c - (\alpha + \beta + 1)\xi] \frac{d\varphi}{d\xi} - \alpha\beta\varphi(\xi) = 0 \quad (10)$$

方程 (10) 为超几何方程，其满足 $\xi \rightarrow 0$
(即 $x \rightarrow \infty$)， $\varphi(\xi)$ 有限的解为

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = F(\alpha, \beta, c; \xi) = & 1 + \frac{\alpha\beta\xi}{c} \frac{1}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\xi^2}{c(c+1)} \frac{1}{2!} \\ & + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)\xi^3}{c(c+1)(c+2)} \frac{1}{3!} + \dots \quad (11) \end{aligned}$$

四. 玻恩近似 (续32)

满足 $\xi \rightarrow -\infty$ 即 $(x \rightarrow -\infty)$ ， $\varphi(\xi)$ 有限的解为

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(c-\alpha)} (-\xi)^{-\alpha} \Gamma\left(\alpha, \alpha-c+1, \alpha-\beta+1; \frac{1}{\xi}\right) \\ & + \frac{\Gamma(c)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(c-\beta)} (-\xi)^{-\beta} \Gamma\left(\beta, \beta-c+1, \beta-\alpha+1; \frac{1}{\xi}\right) \quad (12) \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow -\infty$ ，即 $\xi \rightarrow -\infty$ 时

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) & \longrightarrow e^{-ika} \left\{ c_1 (-\xi)^{-i(k_1-k)a} + c_2 (-\xi)^{i(k_1+k)a} \right\} \\ & = e^{-i2ka} \left(c_1 e^{ik_1 x} + c_2 e^{-ik_1 x} \right) \end{aligned}$$

四. 玻恩近似 (续33)

$$c_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(c - \alpha)} \quad c_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(c - \beta)}$$

反射系数：

$$R = \frac{|c_2|^2}{|c_1|^2} = \frac{|\Gamma(\beta)\Gamma(c - \alpha)\Gamma(\alpha - \beta)|^2}{|\Gamma(\alpha)\Gamma(c - \beta)\Gamma(\beta - \alpha)|^2} \quad (13)$$

利用 $\Gamma^*(x) = \Gamma(x^*)$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin\pi x$

$$c - \alpha = 1 - i(k_1 + k)a$$

$$c - \beta = 1 + i(k_1 - k)a$$

$$\alpha - \beta = i2k_1 a$$

四. 玻恩近似 (续34)

可得：

$$\begin{aligned}
 |\Gamma(\beta)\Gamma(c-\alpha)|^2 &= \Gamma(\beta)\Gamma(\beta^*)\Gamma(c-\alpha)\Gamma[(c-\alpha)^*] \\
 &= \Gamma[-i(k_1+k)a] \Gamma[i(k_1+k)a] \Gamma[1-i(k_1+k)a] \Gamma[1+i(k_1+k)a] \\
 &= \frac{\pi}{\sin[i(k_1+k)a\pi]} \cdot \frac{\pi}{\sin[-i(k_1+k)a\pi]} \\
 &= \frac{\pi^2}{[sh(k_1+k)a\pi]^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\Gamma(\alpha)\Gamma(c-\beta)|^2 &= \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha^*)\Gamma(c-\beta)\Gamma[(c-\beta)^*] \\
 &= \Gamma[i(k_1-k)a] \Gamma[-i(k_1-k)a] \Gamma[1+i(k_1-k)a] \Gamma[1-i(k_1-k)a]
 \end{aligned}$$