2010 年 中科院 811 量子力学 真题答案解析

一、

（1）设 $\hat{A},\hat{B}$ 与 Pauli 算符对易，证明：$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

（2）试将 $(\hat{I}+\hat{\sigma}_x+i\hat{\sigma}_y)^{\frac{1}{2}}$ 表示成 $\hat{I},\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z$ 的线性叠加，$\hat{I}$ 为单位算符。

证明：

（1）$\vec{\sigma}=\sigma_x\vec{i}+\sigma_y\vec{j}+\sigma_z\vec{k}\quad \vec{\sigma}\cdot\vec{A}=\sigma_xA_x+\sigma_yA_y+\sigma_zA_z\quad \vec{\sigma}\cdot\vec{B}=\sigma_xB_x+\sigma_yB_y+\sigma_zA_z$

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})&=(\sigma_xA_x+\sigma_yA_y+\sigma_zA_z)(\sigma_xB_x+\sigma_yB_y+\sigma_zB_z)\\&=\sigma_xA_x\sigma_xB_x+\sigma_xA_x\sigma_yB_y+\sigma_xA_x\sigma_zB_z+\sigma_yA_y\sigma_xB_x\\&\quad+\sigma_yA_y\sigma_yB_y+\sigma_yA_y\sigma_zB_z+\sigma_zA_z\sigma_xB_x+\sigma_zA_z\sigma_yB_y+\sigma_zA_z\sigma_zB_z\end{aligned}$$

由 $\hat{A},\hat{B}$ 与 Pauli 算符对易和 Pauli 算符关系 $\sigma_\alpha^2=1,\sigma_\alpha\sigma_\beta=i\sigma_\gamma$，有：

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})&=A_xB_x+i\sigma_zA_xB_y-i\sigma_yA_xB_z-i\sigma_zA_yB_x+A_yB_y+i\sigma_xA_yB_z\\&\quad+i\sigma_yA_zB_x-i\sigma_yA_zB_y+A_zB_z\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_y+i\sigma_x(A_yB_z-A_zB_y)+i\sigma_y(A_zB_x-A_xB_z)\\&\quad+i\sigma_z(A_xB_y-A_yB_x)\\&=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\end{aligned}$$

（2）$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,I$ 构成 2 阶复矩阵的完备基。说明了，任何一个 2 阶复矩阵（当然包括实矩阵）都可以由这四个矩阵表示出来[6]，有：

$$\sqrt{I+\sigma_x+i\sigma_y}=C_0I+C_1\sigma_x+C_2\sigma_y+C_3\sigma_z$$