

2009 年中科院量子力学试题 (811)

(满分150分, 时间 180 分钟)

1、(30分) 已知在 L^2 表象中, $l_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 求:

(1) l_x 的本征值和相应的本征函数;

(2) l_x 的矩阵表示。

2、(30分) 已知一粒子处在一维谐振子势场中运动, 势能为

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (k > 0), \text{ 求:}$$

(1) 粒子的基态本征函数 $\psi_0(x)$;

(2) 若势场突然变为 $V(x) = kx^2$, 则粒子仍处于基态的概率。

(提示: 用湮灭算符 $a = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}(x + \frac{i}{\mu\omega}\hat{p})$, $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{2} = \dots$)

3、(30分) 若已知 $[a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0$, $[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$ 其中 $i, j = 1, 2$ 。设

$$J_x = \frac{1}{2}(a_1^+ a_2 + a_2^+ a_1), \quad J_y = \frac{1}{2i}(a_1^+ a_2 - a_2^+ a_1), \quad J_z = \frac{1}{2}(a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1)$$

求: (1) J_x, J_y, J_z 的关系式;

(2) $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$, 试用 a_1^+, a_1, a_2^+, a_2 表示 J^2 。

4、(30分) 已知两种中微子的本征态为 $|v_1\rangle$ 和 $|v_2\rangle$, 能量本征值为

$$E_i = pc + \frac{m_i^2 c^4}{2pc} \quad (\text{其中 } i=1, 2), \text{ 电子中微子的本征态为}$$

$$|v_e\rangle = \cos\theta|v_1\rangle + \sin\theta|v_2\rangle, \quad \mu\text{子中微子的本征态为 } |v_\mu\rangle = -\sin\theta|v_1\rangle + \cos\theta|v_2\rangle,$$