

中国科学院—中国科技大学
2001 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：量子力学（理论型）

（选作五题，每题 20 分）

一、（20 分）一个质量为 μ 的粒子在势阱 $V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, x > 2a \\ A\delta(x-a), & 0 < x < 2a \end{cases}$ 中运动。其中 $A > 0$ 为常数，求系统第三激发态的能量本征值。

二、（20 分）粒子被一维势垒 $V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > a \\ V_0, & 0 < x < a \end{cases}$ 散射。当粒子能量 $E = V_0$ 时，有一半粒子被反射回去，求粒子的质量所满足的方程。

三、（20 分）在粒子表象中，谐振子的基态 $|0\rangle$ 满足性质： $a|0\rangle = 0$ ，其中 a 为吸收算符， $a = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}} \left(x + i \frac{\hat{p}}{\mu\omega} \right)$ ，试用此性质求出基态在动量表象中的波函数显示式 $\langle p|0\rangle$ 。

四、（20 分）基态 $|\psi\rangle$ 是角动量 \hat{L}^2 和 \hat{L}_z 的本征态： $\hat{L}^2|\psi\rangle = l(l+1)\hbar^2|\psi\rangle$ ， $\hat{L}_z|\psi\rangle = m\hbar|\psi\rangle$ ，在此态下计算平均值 $\langle \hat{L}_x \rangle$ 和 $\langle \hat{L}_x^2 \rangle$ 。

五、（20 分）一电子在势阱 $V(x) = kx^2/2$ 中作一维运动，同时受到 x 沿方向一均匀电场的微扰作用。电场强度为 E 。确定该系统由于电场存在所引起的能级移动。

六、（20 分）考虑一个二维谐振子， $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ，已知其最低三个能量本征态为

$$\psi_{00} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad \psi_{01} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad \psi_{10} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} y e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

设有一微扰 $V(x) = \varepsilon xy(x^2 + y^2)/2$ ， $(|\varepsilon| \ll 1)$ 。试对上述态计算由 V 引起的一级微扰修正。

中国科学院—中国科技大学
2001 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称： **量子力学（实验型）**

一、（10 分）设质量为 m 的粒子在一维无限深势阱 $V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, x > a \\ 0, & 0 < x < a \end{cases}$ 中运动。试用 de Broglie 的驻波条件，求粒子能量的可能取值。

二、（10 分）一个质量为 m 的粒子束沿正方向以能量 E 向 $x=0$ 处的势垒运动，

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{3}{4}E, & x > 0 \end{cases};$$

试用量子力学观点回答：在 $x=0$ 处被反射的反射系数 R 是多少？

三、（20 分）

- (1) 在坐标表象中写出一维量子体系的坐标算符 \hat{q} 和动量算符 \hat{p} ，并推导出其间的对易关系。
- (2) 在动量表象中做(1)所要求做的问题。

四、（20 分）一个微观粒子在球对称的中心势场 $V(x)$ 中运动，且处于一个能量和轨道角动量的共同本征态。

- (1) 在球坐标系中写出能量本征函数的基本形式。写出势能 $V(x)$ 在此态中平均值 $\langle V \rangle$ 的表示式，并最后表示成径向积分的形式。
- (2) 设 $V(x)$ 为 r 的单调上升函数（即对任意 r , $\frac{dV(r)}{dr} > 0$ ）。试证明：对任意给定的 r_0 ，

均有 $\int_0^{r_0} [V(r) - \langle V \rangle] |R(r)|^2 r^2 dr < 0$ ，其中 $R(r)$ 的径向波函数。

五、（20 分）设一个质量为 m 的微观粒子的哈密顿量不显含时间，试证明：在能量表象

中有
$$\sum_n (E_n - E_m) |x_{nm}|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}$$

其中 E 为能量， x 为坐标。

六、（20 分）设一微观体系的哈密顿量 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ ，其中 \hat{H}' 为微扰，在由一组正交归一函数作为基的表象中，

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}' = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

其中 c 为常数。

- (1) 求 \hat{H} 的精确本征值。
- (2) 求 \hat{H} 的准确到微扰的二级修正的本征值。
- (3) 比较(1)和(2)的结果，指出期间的关系。