中国科学院—中国科技大学
2000 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　量子力学（理论型）

（选作五题，每题 20 分）

一、（20 分）一个质量为 m 的粒子被限制在一维区域 $0 \le x \le a$ 运动。　时的波函数为

$$\psi(x,\quad t=0)=A\left(1+2\cos\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$$

其中 A 为常数。

(1) 后来某一时刻 t_0 的波函数为什么？

(2) 体系在 $t=0$ 和 $t=t_0$ 时的平均能量是多少？

(3) 在 t_0 时于势阱右半部（即 $a/2 \le x \le a$）发现粒子的几率是多少？

二、（20 分）氢原子的基态能量为 $E_0=-e^2/2a$，其中 $a=\hbar^2/me^2$ 为玻尔半径，m 为折合质量。

(1) 写出电子偶素（氢原子中质子由正电子代替）的基态能量和玻尔半径。

(2) 由于电子有自旋，电子偶素的基态的简并度是多少？写出具有确定总自旋值的可能波函数及相应的本征值。

(3) 电子偶素的基态会发生衰变，湮灭为光子，这个过程中释放的能量和角动量是多少？证明终态至少有两个光子。

三、（20 分）设粒子处于 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 状态，计算角动量的 x 分量和 y 分量的平均平方差 $\langle \Delta L_x^2\rangle$，$\langle \Delta L_y^2\rangle$。

四、（20 分）记 σ_1，σ_2，σ_3 为 Pauli 矩阵，定义 $\sigma_\pm=\sigma_1+i\sigma_2$。

(1) 计算 $[\sigma_+,\sigma_-]$，$[\sigma_3,\sigma_-]$，$[\sigma_3,\sigma_+]$，$(\sigma_+)^2$，$(\sigma_-)^2$。

(2) 证明（ξ 为常数）$e^{\xi\sigma_3}\sigma_\pm=\sigma_\pm e^{\xi\sigma_3}e^{\pm 2\xi}$。

(3) 化简下面二式：$e^{\xi\sigma_3}\sigma_1 e^{-\xi\sigma_3}$，$e^{\xi\sigma_3}\sigma_2 e^{-\xi\sigma_3}$。

五、（20 分）设 $\hat{H}_0$ 为一量子体系的能量算符，其本征态为 $|0\rangle$，$|1\rangle$，$|2\rangle$，…，若体系受到微扰作用，微扰算符为 $\hat{H}'=i\lambda\left[\hat{A},\hat{H}_0\right]$（$\lambda$ 为实数），$\hat{A}$ 为某一厄密算符，$\hat{B}$，$\hat{C}$ 为另外的厄密算符，且 $\hat{C}=i\left[\hat{A},\hat{B}\right]$。如在微扰作用前的基态 $|0\rangle$ 中，$\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ 的平均值为已知的 A_0,B_0,C_0。试对微扰后的基态（非简并）计算厄密算符 $\hat{B}$ 的平均值 $\langle B\rangle$，精确到量级 λ。

六、（20 分）以 $a^\dagger$ 和 a 表示费米子体系的某个单粒子态的产生和湮灭算符，满足基本关系式 $\{a,a^\dagger\}\equiv aa^\dagger+a^\dagger a=1$，$(a^\dagger)^2=0$，$a^2=0$ 以 $N=a^\dagger a$ 表示该单粒子态上的粒子数算符，求 N 的本征值，并计算两个对易式 $\left[N,a^\dagger\right]$，$\left[N,a\right]$。(1995 年(理论型)第四题)

中国科学院－中国科技大学
2000 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称： **量子力学（实验型）**

一、（15 分）在电子的双缝干涉理想实验中，什么结果完全不能用粒子性而必须用波动性来解释？为什么？

二、（20 分）一个质量为 μ 的粒子，在下述一维无穷深势阱中运动

$$V(x)=\begin{cases}0, & (0<x<a)\\ \infty, & (x<0,x>a)\end{cases}$$

设 $t=0$ 时，其归一化波函数为 $\psi(x,0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}(1+\cos\frac{\pi x}{a})\sin\frac{\pi x}{a}$，求：

(1) $t=0$ 时测得其能量所得的几率性的结果（10 分）；

(2) $t_0>0$ 时的含时波函数及 t_0 时测其能量的结果（10 分）。(1991 年(实验型)第二题)

三、（15 分）设一维运动粒子的坐标和动量分别为 q 和 $\hat{p}$ ，c 为常数。求：

(1) 力学量算符 $\hat{p}$ 和 $e^{ic\hat{q}}$ 的对易关系。（8 分）

(2) 若 p_0 是算符 $\hat{p}$ 的本征值，试证明 $p_0+\hbar c$ 也是 $\hat{p}$ 本征值（7 分）。

四、（25 分）对于单个电子的运动：

(1) 证明：轨道角动量算符 $\hat{\vec{L}}$ 和动量平方算符 $\hat{p}^2$ 对易（8 分）。

(2) 论答：运动对于球对称场 $V(r)$ 中束缚定态的力学量完全集合应该是什么（不计自旋）（7 分）？

(3) 设 $V(r)=-e^2/r$，用测不准关系估算其基态能量。（10 分）

五、（25 分）设硼原子（原子序数为 5）受到 $\hat{H}'=f(r)xy$ 的微扰作用。在简并微扰一级近似下：

(1) 论答：其价电子 $2p$ 能级分裂为几个能级（10 分）？

(2) 若已知其中一个能级移动值为 $A>0$，则其余诸能级移动值各为多少（8 分）？

(3) 求出各分裂能级对应的波函数（用原来的诸 $2p$ 波函数表达）（7 分）。

（提示：球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 对 φ 的依赖体现在它所含的因子 $e^{im\varphi}$ 上。）