

中国科学院—中国科技大学
1995 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：量子力学（理论型）

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、一个质量为 μ 的粒子在势阱 $V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, x > a \\ \alpha\delta(x-a/2), & 0 < x < a \end{cases}$ 中运动，其中 a 为常数，试求第一激发态的能量。

二、质量为 μ 电荷为 q 的粒子在均匀定常的磁场中运动，取不对称规范：

$$A_x = -By, \quad A_y = A_z = 0,$$

B 为磁场大小，可知 $y_0 = -c\hat{p}_x/qB$ 是守恒量。证明 $x_0 = c\hat{p}_y/qB + x$ 也是守恒量，请问它与 y_0 是否可以同时被观察？

三、两个相互耦合的一维谐振子由哈密顿算符

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2\mu} + \frac{\hat{p}_2^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2[(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \lambda(x_1 - x_2)^2]$$

描写， $\lambda > 1/2$ 。请求出此体系的能量。

四、算符 b 及其厄密共轭 b^\dagger 满足下面的关系：

$$bb^\dagger + b^\dagger b = 1, \quad (b^\dagger)^2 = 0, \quad b^2 = 0.$$

它们被称为费米子算符，而 $N = b^\dagger b$ 是费米子数算符。

(1) 求 N 的本征值；(2000 年(理论型)第六题)

(2) 在 N 表象中给出 b 与 b^\dagger 的表达式。

五、电子偶素是由正电子和电子构成的类氢体系。考虑处于基态的电子偶素 ($l=0$)。

系统的哈密顿量可写为 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_s$ ，其中 \hat{H}_0 是通常的与自旋无关的库仑力部分，

$\hat{H}_s = A\hat{S}_p \cdot \hat{S}_e$ 是正电子与电子的自旋作用部分。请问在无外磁场存在时，选择怎样的

自旋和角动量的本征态最为方便？对于这些态，计算由于 \hat{H}_s 引起的能量的改变。

中国科学院—中国科技大学 1995 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：量子力学（实验型）

说明：共六道大题，选作五题，每题 20 分。

一、

- (1) 简要说明量子力学的态叠加原理与经典波动力学的态叠加原理有何根本的区别。
- (2) 试证明，在任何状态下，厄密算符的平均值都是实数。
- (3) 下列对称性分别导致什么物理量守恒：空间反射不变性，空间平移不变性，空间转动不变性，时间平移不变性。

二、粒子在一维势场 $V(x)$ 中运动，试证明：属于不同能级的束缚态波函数相互正交。

三、质量为 m ，速度为 v ，能量为 $E = mv^2/2$ 的粒子沿 x 轴方向运动，其位置测量的误差为 Δx ，设 $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ ，试由不确定关系： $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ ，导出能量和时间的不确定关系：

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}.$$

四、一维谐振子的哈密顿量算符为 $\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ 。引入无量纲算符：

$$Q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} \hat{p}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP)$$

- (1) 计算 $[\hat{P}, Q]$, $[a, a^\dagger]$, $[a, a^\dagger a]$, $[a^\dagger, a^\dagger a]$ 。
- (2) 将 \hat{H} 用 a, a^\dagger 表示；设 $|n\rangle$ 是 \hat{H} 的本征值为 E_n 的本征态，求出全部能级 E_n 。
- (3) 证明： $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$, $a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ 。
- (4) 证明能量表象中，计算 a, a^\dagger, Q, \hat{P} 的矩阵元。

五、测量一个电子（处于自由空间）自旋的 z 分量，结果为 $\hbar/2$ 。

- (1) 紧接测量自旋的 x 分量，可能得到什么结果？
- (2) 得到这些结果的几率是多少？
- (3) 如果测量自旋方向的轴与 z 轴成 θ 角，测得各种可能值的几率分别为多少？
- (4) 在(3)中测得的期望值为多少？

六、有一个两能级体系，哈密顿量为 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ 。在 \hat{H}_0 表象， \hat{H}_0 和 \hat{H}' 表示为

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}' = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\hat{H}' 微扰， b 表征微扰强度。试求 \hat{H}_0 的本征值和本征态。（1996 年（理论型）第 4 题）