中国科学院—中国科技大学
1994 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　　量子力学（理论型）

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、　质量为 m 的单粒子作一维束缚运动，两个能量本征波函数分别为

$$\psi_1(x)=Ae^{-\alpha x^2/2},\quad \psi_2(x)=B\left(x^2+bx+c\right)e^{-\alpha x^2/2},\quad (-\infty<x<\infty)$$

A,B,b,c,α 等均为实常数。试求这两个态的能量间隔，并说明对参数 b,c 有什么限制。

二、　试求在氢原子能量本征态 ψ_{nlm} 中，$\dfrac{1}{r^2}$ 的平均值 $\left\langle\dfrac{1}{r^2}\right\rangle$。

三、　自旋投影算符 $\hat{\vec{S}}\cdot\vec{n}=\dfrac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$，$\vec{\sigma}$ 为泡利矩阵，$\vec{n}$ 为单位方向矢量，$\vec{n}^2=1$。

(1) 对于电子自旋朝上态 χ_+（$\hat{S}_z$ 的本征值为 $\hbar/2$），求 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的可能值及相应几率。

(2) 对 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的本征值为1的本征态，求 σ_y 的可能值及相应的几率。

四、

(1) 已知带电粒子在磁场 $\vec{B}$ 和势场 $V(r)$ 中运动，求带电粒子速度分量算符的对易关系 $\left[\hat{v}_x,\hat{v}_y\right]$，$\left[\hat{v}_y,\hat{v}_z\right]$，$\left[\hat{v}_z,\hat{v}_x\right]$ 的表达式。

(2) 质量为 m 电荷为 e 的粒子在磁场中的哈密顿量为 $\hat{H}=\dfrac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}}-\dfrac{e}{c}\vec{A}\right)^2$。求在什么条件下它可以写成如下形式：　$\hat{H}'=\dfrac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^2-\dfrac{e}{mc}\vec{A}\cdot\hat{\vec{p}}+\dfrac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2$。

(3) 设 $\vec{A}=\vec{A}_0\cos\omega t$（$\vec{A}_0$ 为常矢量），略去上式中的　　项，求与　　相应的薛定谔方程的解。

五、　质量为 m 电荷为 e 的粒子被一个势场 $V(r)$ 散射，此势场是一个球对称电荷分布 $\rho(r)$ 产生的静电势场。设 $\rho(r)$ 随 $r\to\infty$ 很快趋于零，并有 $\int\rho(r)d\tau=0$ 和 $\int r^2\rho(r)d\tau=A$（A 为已知常数）。试用一级玻恩近似计算向前散射微分截面。

中国科学院－中国科技大学
1994 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：　　　　　　　量子力学（实验型）

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、

(1) 自由粒子能量为 $E=\hat{p}^2/2m$，写出物质波的色散关系，并证明物质波包必然扩散。

(2) 写出分立谱和连续谱的正交归一和完备性关系式。

(3) 写出 F 表象（其基矢记为 $|k\rangle$）中的薛定谔方程。

二、证明一维体系的分立本征值总是非简并的。

三、试在动量表象中求解谐振子问题（即求哈密顿算符的本征值和本征函数）。

四、假定一电子状态由波函数 $\psi=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(e^{i\varphi}\sin\theta+\cos\theta\right)g(r)$ 描述，其中 $\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr=1$，$\theta$与$\varphi$分别是方位角和极角。求处于该态电子的轨道角动量 z 分量 L_z 的可能值，相应几率和期望值。

五、试求其哈密顿量为 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+ax^3+bx^4$ 的能谱，式中a和b是小的常数（精确到一级近似）。提示：

$$x^2\psi_n=\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi_n+\frac{1}{2}\sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}\right]$$

六、具有磁矩 $\hat{\vec{M}}=M_0\hat{\vec{S}}$（$\hat{\vec{S}}$ 具有1/2的自旋幅）的粒子放在沿 x 轴方向的一常磁场中。在$t=0$时，发现粒子具有 $S_z=\hbar/2$，求在以后的任意时刻发现具有 $S_y=\pm\hbar/2$ 粒子的几率。