

中国科学院—中国科技大学
1992 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称： 量子力学（理论型）

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、 N 个质量都是 m 的粒子可在—宽为 a 的无限深方势阱中运动，忽略彼此间的相互作用，请求出最低的 4 条能级，并写下相应的简并度。

二、

(1) 写出角动量算符 \hat{L}_x , \hat{L}_y , \hat{L}_z 及算符 \hat{L}^2 之间的一切对易关系；

(2) 设 ψ_{lm} 是 \hat{L}^2 与 \hat{L}_z 的本征态，本征值分别为 $l(l+1)\hbar^2$ 和 $m\hbar$ ，证明 $\varphi = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)\psi_{lm}$ 亦为 \hat{L}^2 与 \hat{L}_z 的本征态，求出本征值；

(3) 证明当 $l=0$ 时，态 ψ_{lm} 也是 \hat{L}_x 与 \hat{L}_y 的本征态。

三、请根据不确定关系估计氢原子基态的能量。

四、有一个定域电子（作为近似模型，可以不考虑轨道运动），受到均匀磁场的作用，

磁场 B 指向正 x 方向，相互作用势为 $\hat{H} = \frac{eB\hbar}{2\mu c} \hat{\sigma}_x = \frac{eB}{\mu c} \hat{S}_x$ 。设 $t=0$ 时电子自旋朝上，

即 $s_z = \hbar/2$ ，求 $t>0$ 时自旋 \hat{S} 的平均值。

五、假定氢原子内的质子是一个半径为 10^{-13} cm 的均匀带电球壳，而不是点电荷，试用一级微扰论计算氢原子 $1s$ 态能量的改变。

六、一束中子射向氢分子而发生弹性碰撞。忽略电子对中子的作用，而两个原子核与中子的作用可用下面的简化势代替：

$$V(\vec{r}) = -V_0 [\delta^{(3)}(\vec{r} + a) + \delta^{(3)}(\vec{r} - a)],$$

其中 V_0 是常数， a 是常矢量（ a 与 $-a$ 分别是两核的位置矢量）。试求高能下的中子散射微分截面，并指出散射截面的一个极大的方向。

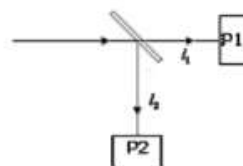
中国科学院—中国科技大学 1992 年招收攻读硕士学位研究生入学试卷

试题名称：量子力学（实验型）

说明：共五道大题，无选择题，计分在题尾标出，满分 100 分。

一、简单回答下列问题：

- (1) 举出一个实验事实说明微观粒子具有波粒二象性。
- (2) 量子力学的波函数与经典的波场有何本质的区别？
- (3) 如图所示，一个光子入射到半透半反镜面 M ， P_1 和 P_2 为光电探测器，试分别按照经典与量子的观点说明 P_1 和 P_2 是否能同时接收到光信号 ($I_1 = I_2$)。



二、若厄密算符 \hat{A} 与 \hat{B} 具有共同本征态函数，即 $\hat{A}\psi_{na} = A_n\psi_{na}$ ， $\hat{B}\psi_{na} = B_n\psi_{na}$ ，而且构成体系状态的完备函数组。试证明 $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ 。

三、在一维谐振子的哈密顿量 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ 中引进

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} x + i \frac{1}{\sqrt{\mu\omega\hbar}} \hat{p} \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} x - i \frac{1}{\sqrt{\mu\omega\hbar}} \hat{p} \right).$$

- (1) 证明 $[a, a^\dagger] = 1$ ；
- (2) 用 a, a^\dagger 写出哈密顿量 \hat{H} ；
- (3) 设 $|n\rangle$ 为 \hat{H} 的本征矢，本征值为 E_n 。证明 $a|n\rangle$ 为 \hat{H} 的本征矢，本征值为 $(E_n - \hbar\omega)$ 。

四、在 \hat{S}_z 的对角表象（用泡利矩阵的形式表示）中，求出自旋算符 $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ 的本征值和本征矢量。

五、在 $t=0$ 时，氢原子的波函数 $\psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}} [2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1}]$

式中波函数的下标分别是量子数 n, l, m 的值，忽略自旋和辐射跃迁。

- (1) 该体系的能量期待值是多少？
- (2) 在 t 时刻体系处在 $l=1, m=1$ 的态的几率是多少？（1997 年(实验型 I)第六题)