

# 第二章 系统的数学模型

2-1 模型总论

2-2 微分方程的建立

2-3 传递函数模型

2-4 框图模型

2-5 信号流图模型

2-6 模型总结

# 第三讲：系统的数学模型

（ 2-1、 2-2 单元， 2 学时）

2-1 模型总论

2-2 微分方程的建立

## 2-1 模型总论---概述

- 1、实施恰当的控制，首先要对受控对象了如指掌，才能随心所欲。分析了解受控对象和控制系统的定量的**工具和平台**就是数学模型。对分析和设计自动控制系统而言，只是定性地了解系统的工作原理和大致的运动过程是远远不够的。
- 2、控制系统的输入和输出之间动态关系的数学表达式即为数学模型。数学模型是分析和设计自动控制系统的基础。

## 2-1 模型总论---概述

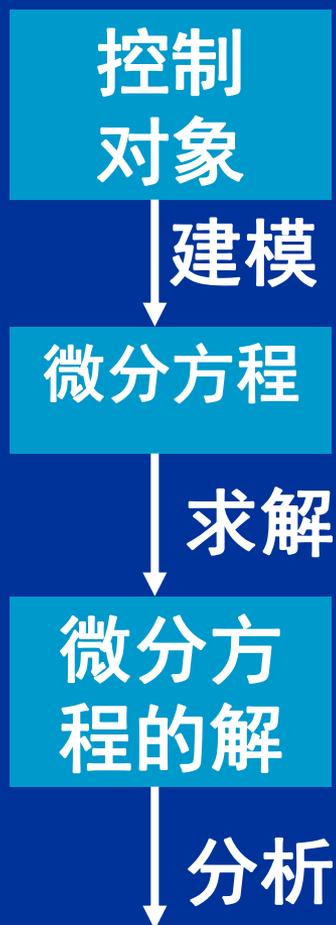


图2.1 系统分析的基本流程

## 2-1 模型总论---概述

3、许多表面上看来似乎毫无共同之处的控制系统，其运动规律可能完全一样，可以用一个运动方程来表示。有了这个数学模型，我们可以不去过多地研究具体系统，而只分析其数学表达式，就可以知道其变量间的关系。

比如，弹簧振荡系统和RLC电路就可以用同一个数学表达式分析，具有相同的数学模型。



这在工程实践中好处多多？

**相似系统！**

## 2-1 模型总论---概述

### 4、模型的近似性与合理性

寻求



实际控制系统的数学模型往往是很复杂的，在一般情况下，常常可以忽略一些影响较小的因素来简化，但这就出现了一对矛盾，**简化与准确性**。不能过于简化，而使数学模型变得不准确，也不能过分追求准确性，使系统的数学模型过于复杂，这带来另一对矛盾，**复杂与可操作性**。

## 2-1 模型总论---概述

严格地说，实际物理系统都存在非线性，从模型的准确性的角度考虑，应该用非线性方程来描述系统。这又增加了模型的复杂性，因此，建模中的一个重要问题是模型的**线性化**。

这门课只讨论**线性定常（时不变）模型**。

## 2-1模型总论----概述

### 5、模型建立方法

#### a.分析计算法（机理建模法）

根据支配系统运动的内在规律以及系统的结构和参数，推导出输入量和输出量之间的数学表达式，从而建立数学模型-----这适用于简单的系统。

例如，牛顿定律等

## 2-1 模型总论----概述

### b. 工程实验法

利用典型的输入激励，通过系统实际的输入--输出信号来建立数学模型。通常，在对系统内部一无所知（黑箱）的情况下，采用这种建模方法。



实际上，我们对有些系统能有部分的了解。这时称为灰箱，可以综合运用分析计算法与工程实验法，较准确而方便地建立系统的数学模型。

## 2-1 模型总论---线性系统

### 一、线性系统的定义

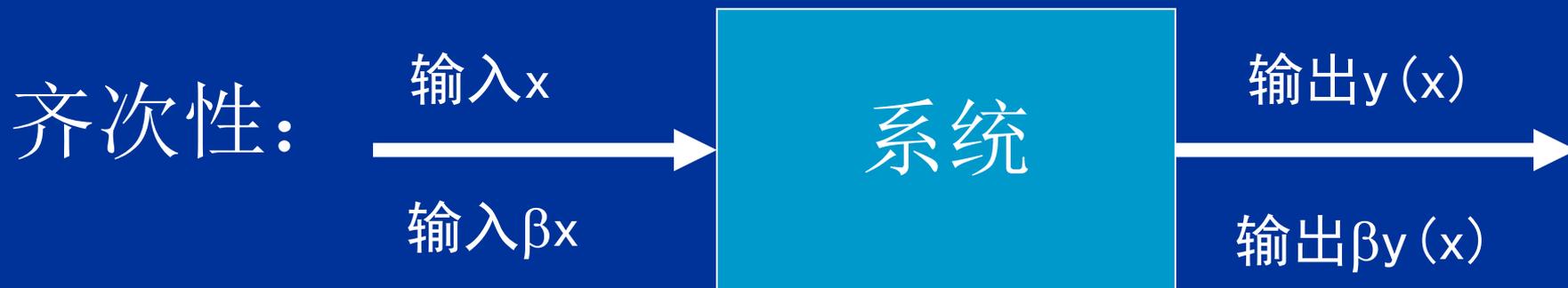
同时满足**叠加性**和**齐次性**的系统称为**线性系统**

叠加性：



若输入为 $x_1(t)$ 时，系统输出为 $y(x_1)$ ；输入为 $x_2(t)$ 时，系统输出为 $y(x_2)$ ，则系统输出满足：

$$Y[x_1(t) + x_2(t)] = y(x_1) + y(x_2)$$



若输入为 $x(t)$ 时，系统输出为 $y(x)$ ，  
则输入为 $\beta x(t)$ 时，系统输出为：

$$Y[\beta x(t)] = \beta y(x)$$

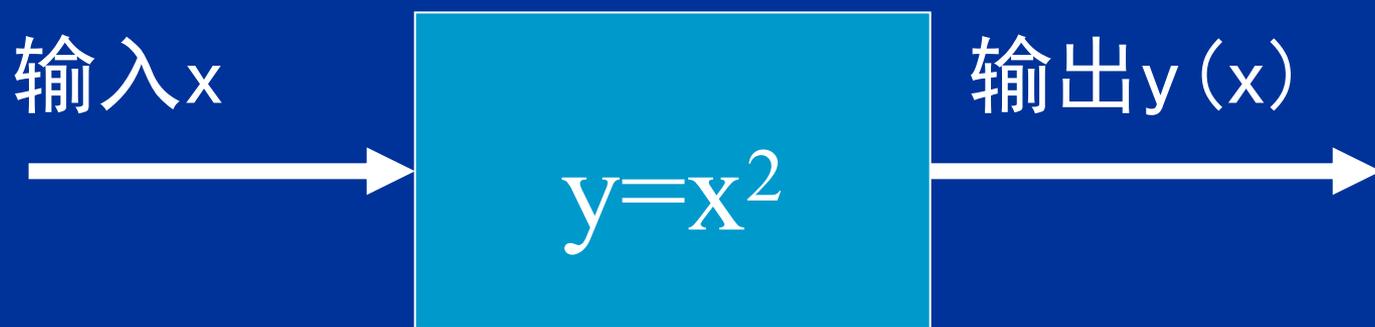
## 重要特点：

线性系统的叠加性和齐次性，为研究带来了极大的方便。

这样，我们可以采用典型激励（单位阶跃、单位脉冲、单位斜坡等）对系统进行分析，而将复杂激励分解为典型激励的线性组合——这就简化了问题。

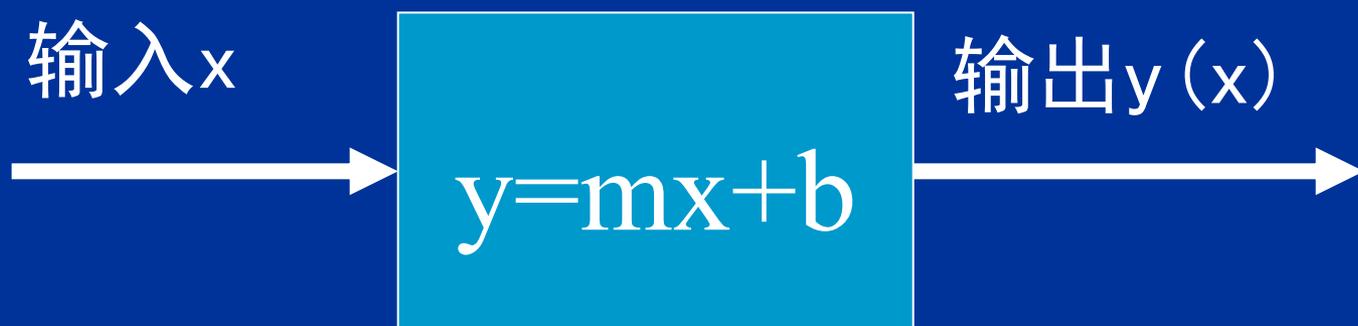
## 2-1模型总论---线性系统

### 例2.1：线性系统判别



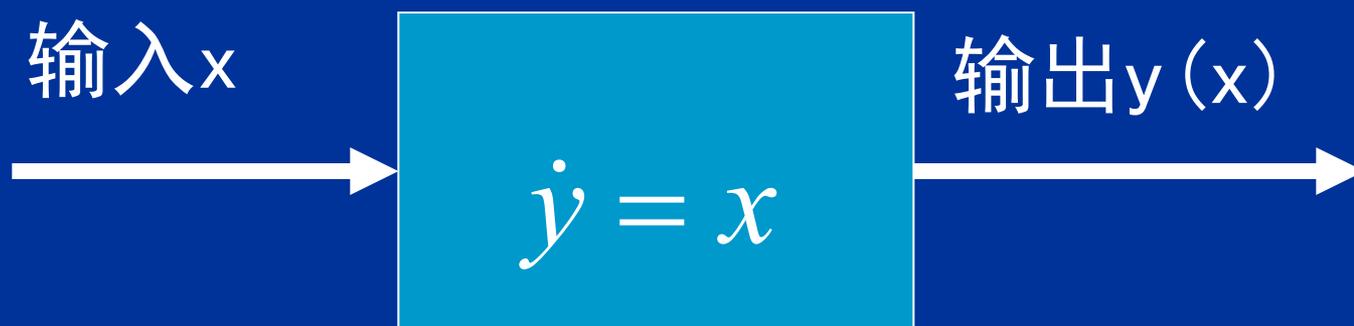
## 2-1模型总论---线性系统

### 例2.2：线性系统判别



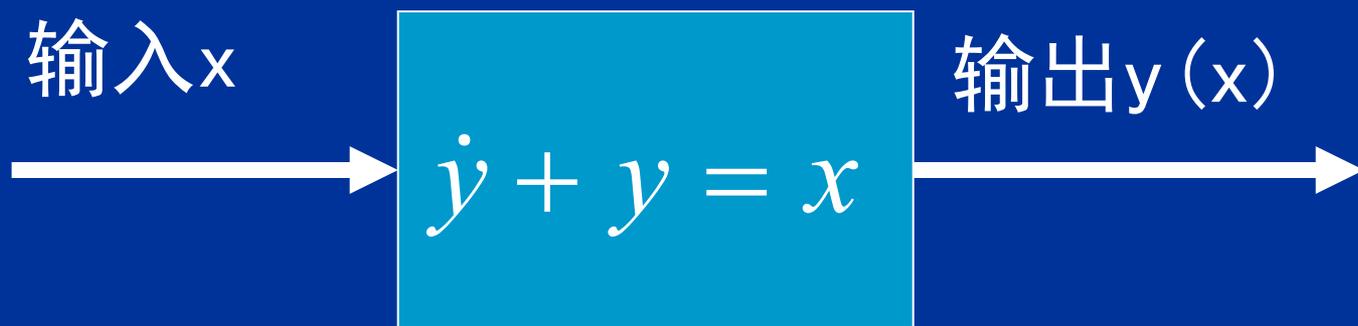
## 2-1模型总论---线性系统

### 例2.3：线性系统判别



## 2-1模型总论---线性系统

### 例2.4：线性系统判别



# 2-1模型总论---线性系统

## 二、非线性元件的线性化

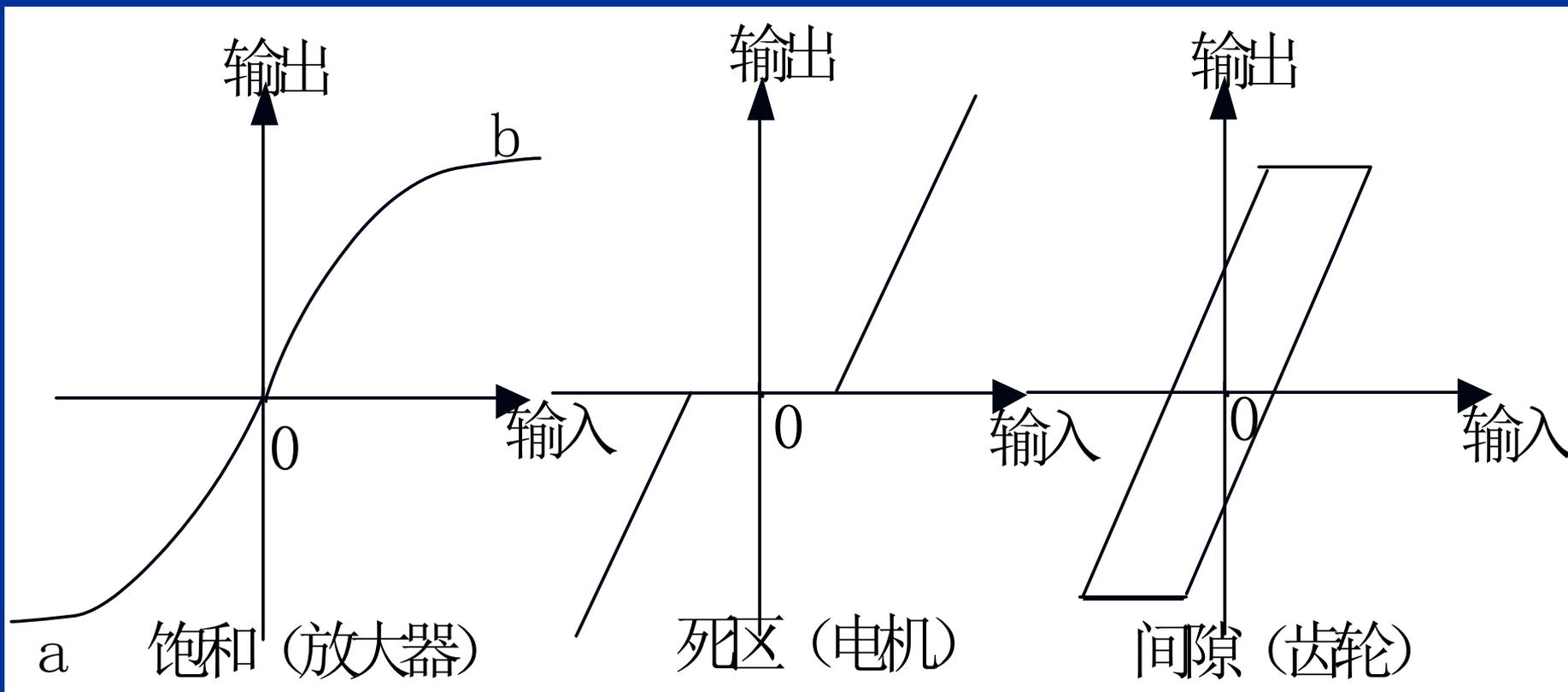


图2.2 几种常见的非线性

## 2-1 模型总论---线性系统

非线性微分方程的求解很困难。在一定条件下，将模型近似地转化为线性微分方程，可以简化系统的动态特性分析。实践证明，这样做能够圆满地解决许多工程问题。线性化的方法有：

1、**忽略弱非线性环节**（如果元件的非线性因素较弱，或者工作在线性范围以内，则它们对系统的影响很小，可以忽略其非线性。）

例如，电位器，弹簧

## 2、微偏法（小偏差信号法，切线法，增量线性化法）

微偏法基于一种假设，就是在控制系统的整个调节过程中，各个元件的输入量和输出量只是在平衡点附近作微小变化。这一假设是符合许多控制系统实际工作情况的，因为对闭环控制系统而言，一有偏差就产生控制作用，来减小或消除偏差，所以各元件主要工作在平衡点附近。

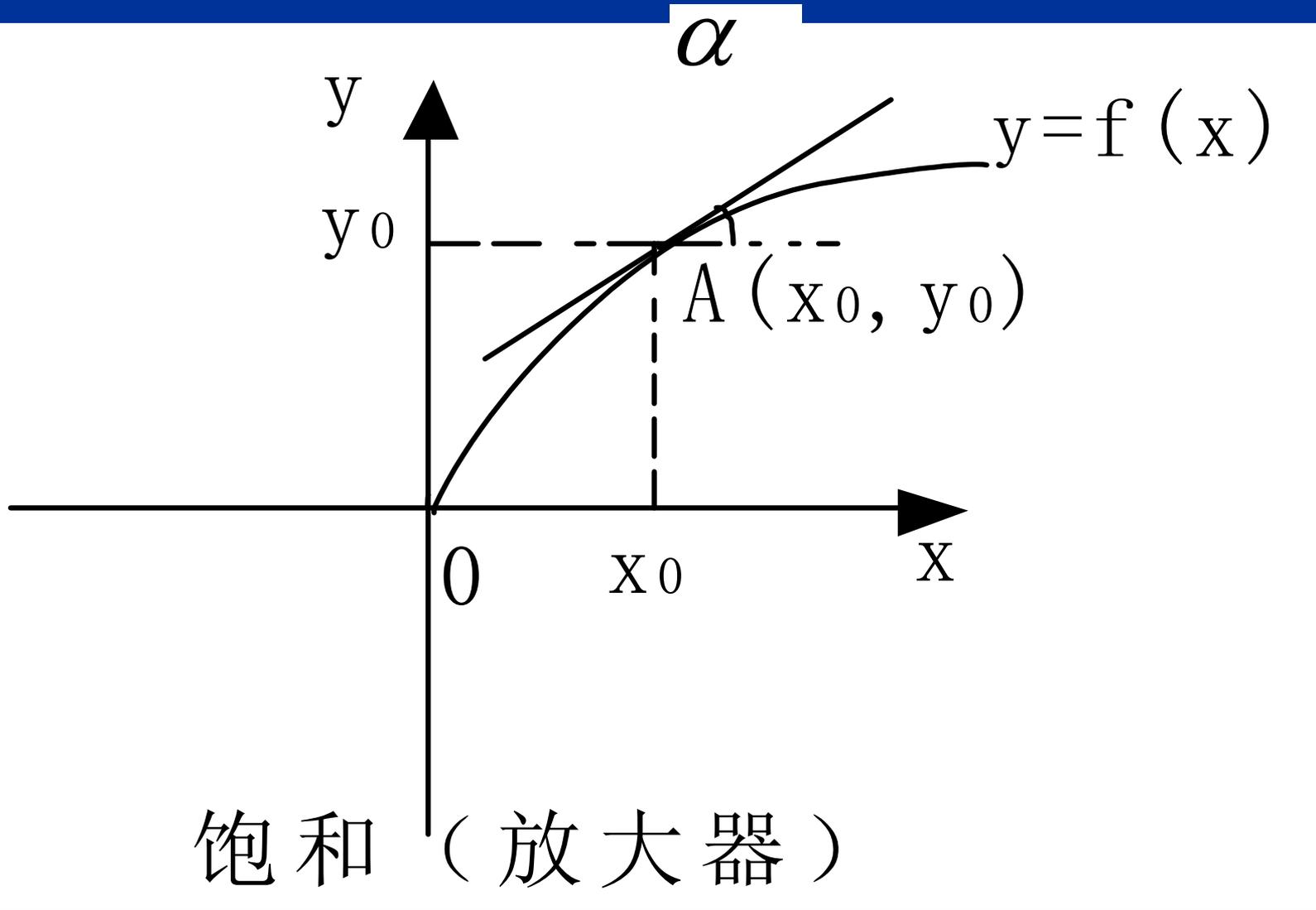


图2.3 非线性系统的工作点

设 $A(x_0, y_0)$ 为平衡点，函数在平衡点处连续可微，则可将函数在平衡点附近展开成泰勒级数

$$y = f(x) = y_0 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

忽略二次以上的各项，上式可以写成

$$\Delta y = k \Delta x$$

其中：

$$\Delta y = y - y_0 \quad \Delta x = x - x_0 \quad k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}$$

这就是非线性元件的线性化数学模型

## 例2.5 摆振荡模型 (P35)

扭矩： $T = mgL \sin \alpha$

$$T = T_0 + mgL \left. \frac{d \sin \alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} (\alpha - 0)$$
$$= mgLa$$

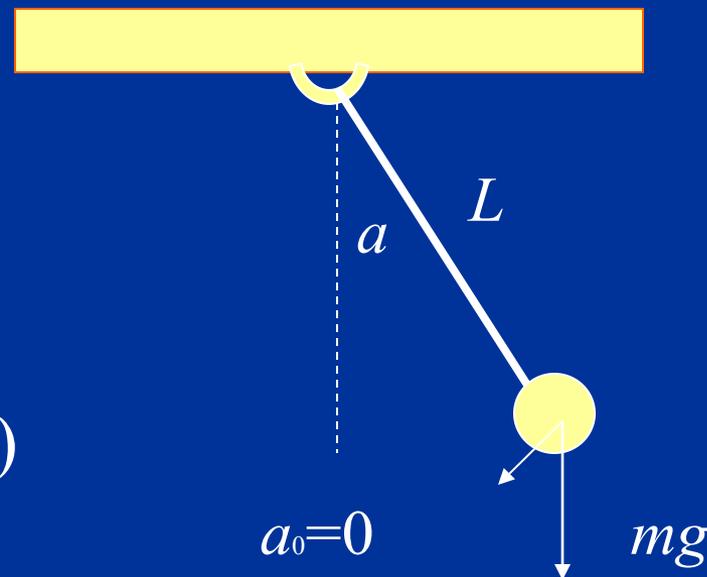


图2.4 振荡摆

在30度的变化范围内，摆的线性模型误差小于2%

### 3、平均斜率法

如果某非线性元件输入输出关系如图所示。此时不能用微偏法，可用平均斜率法得线性化方程为

$$y = kx$$

$$k = \frac{y_1}{x_1}$$

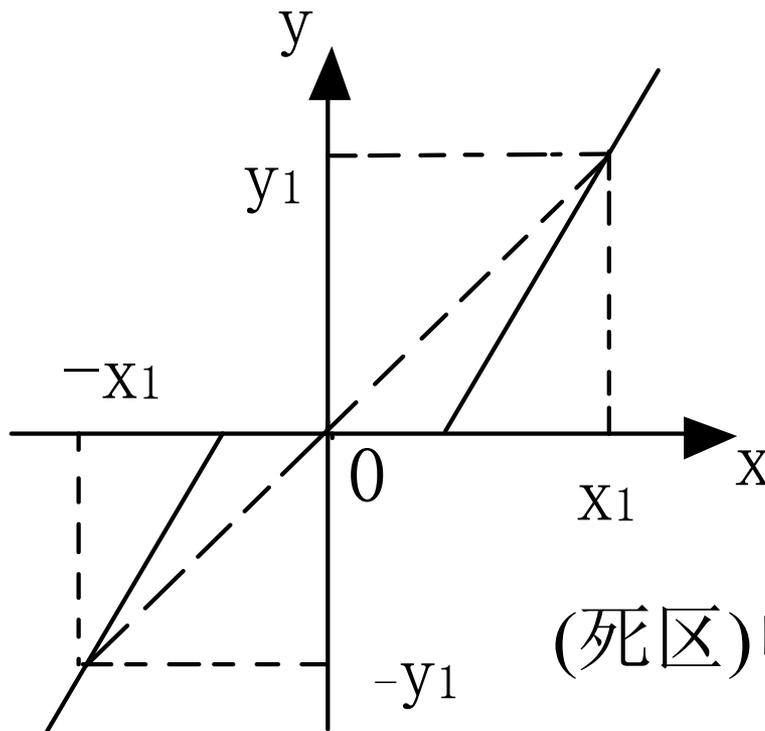


图2.5 不可导的非线性

注意：这几种方法只适用于一些非线性程度较低的系统，对于某些严重的非线性，不能作线性化处理。一般用相平面法及描述函数法进行分析（自动控制原理二讲解）。

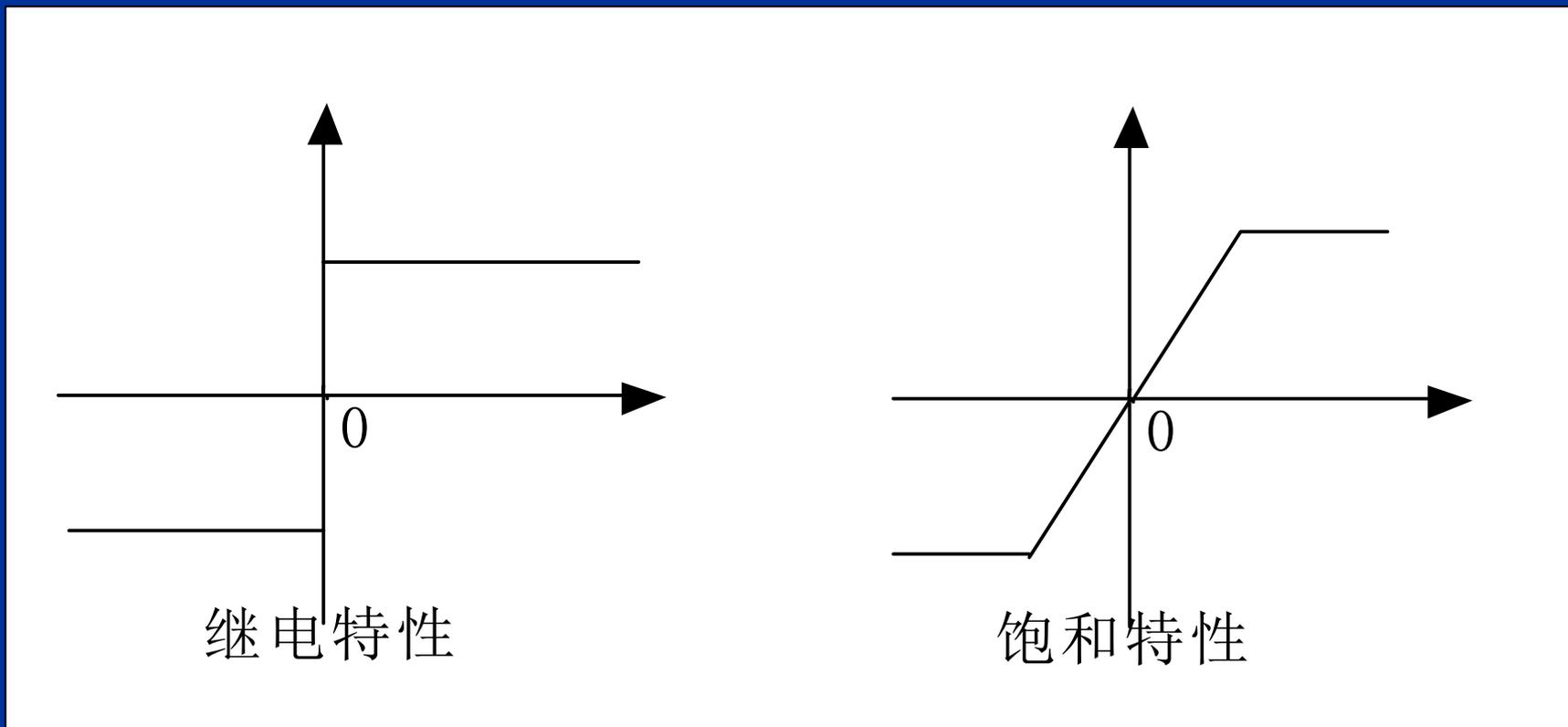


图2.6 严重的非线性

## 2-1 微分方程的建立

线性微分方程是经典控制系统最基本的数学模型。要研究系统的运动，必须列写系统的微分方程。一个控制系统由若干具有不同功能的元件组成，首先要根据各个元件的物理规律，列写各个元件的微分方程，得到一个微分方程组，然后消去中间变量，得到控制系统总的输入和输出的微分方程。

实际上，按规律列写线性微分方程模型，本身就忽略弱非线性环节，也是线性化的结果。

## 例2.6 质量-弹簧-阻尼器系统

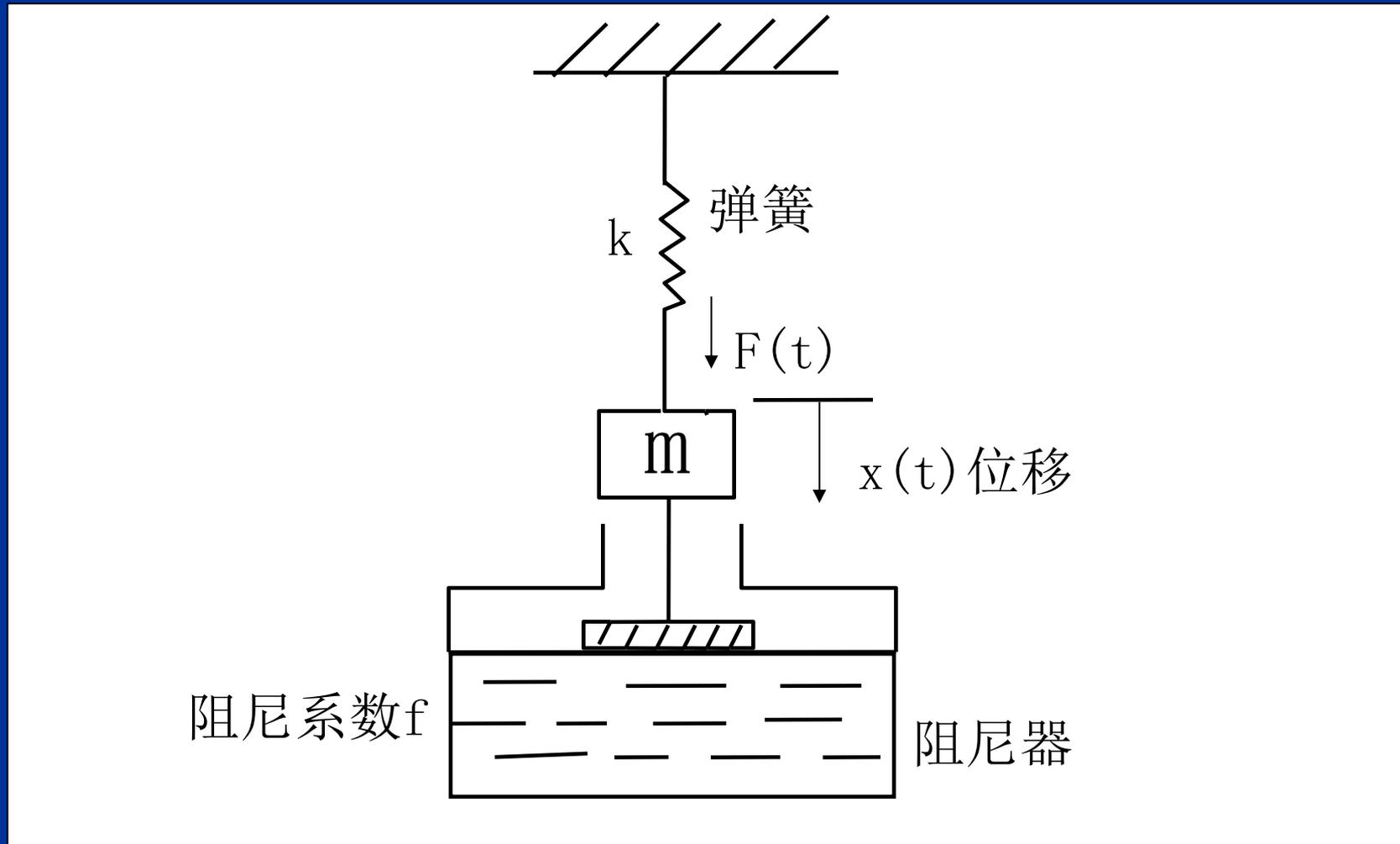
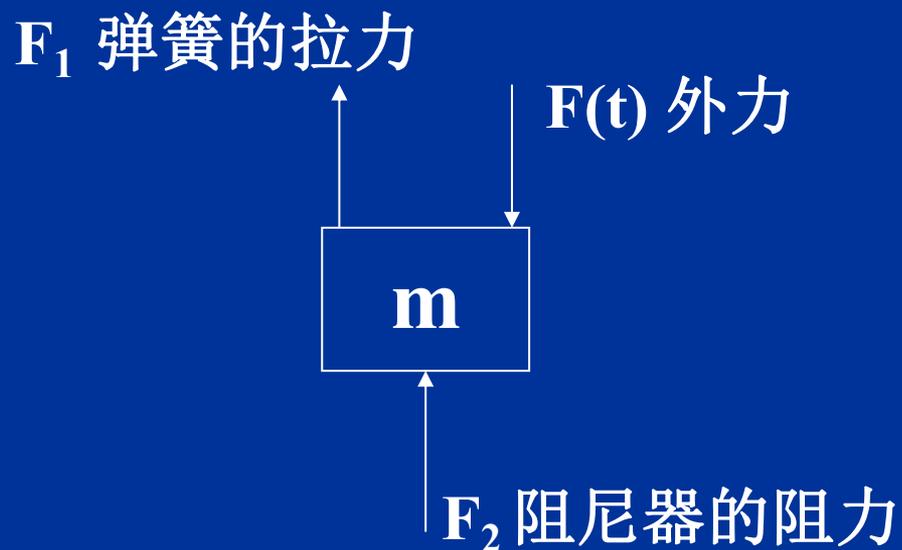


图2.7 质量-弹簧-阻尼器系统

首先确定：输入 $F(t)$ ， 输出 $x(t)$

其次依据：

1. 牛顿第二定律：物体所受的外力合等于物体质量与加速度的乘积
2. 虎克定律： 弹簧弹力等于弹性系数与相对变形位移的乘积
3. 粘性摩擦定律： 粘性摩擦力等于摩擦系数与相对速度的乘积



$$F_1 = kx(t)$$

$$F_2 = fx'(t)$$

$$\text{而 } \sum F = ma$$



列写微分方程时，常习惯于把输出写在方程的左边，输入写在方程右边，而且微分的次数由高到低排列。于是，质量-弹簧-阻尼器的微分方程模型为：

$$mx''(t) + fx'(t) + kx(t) = F(t)$$

例2.7 RLC电路：研究在输入电压 $u_r(t)$ 的作用下，电容上的电压 $u_c(t)$ 的变化。

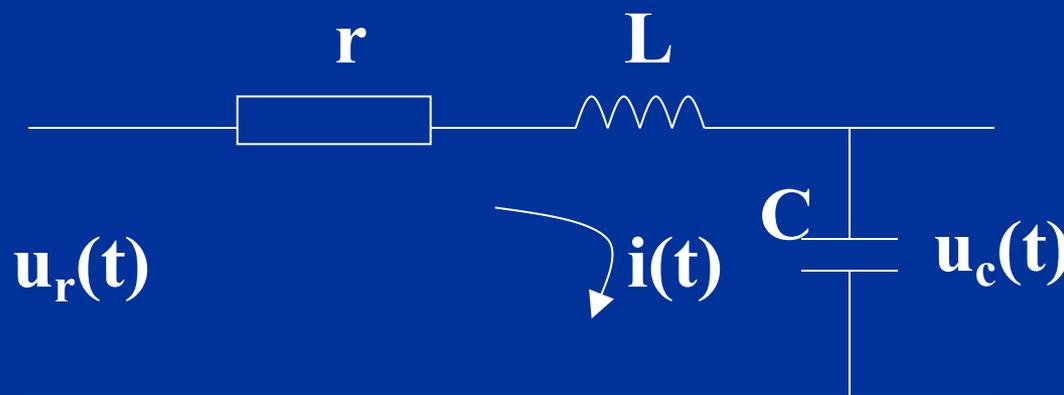
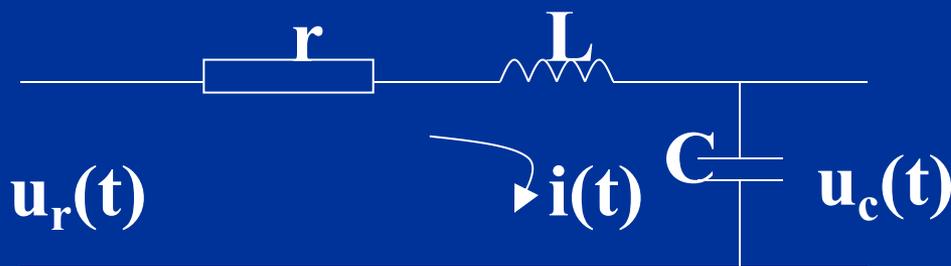


图2.8 RLC电路

依据：电学中的基尔霍夫定律



$$u_r(t) = ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

(两边求导)

$$\therefore i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

消去中间变量 $i(t)$ ，得到：

$$u_r(t) = rC \frac{du_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + u_c(t)$$

整理成规范形式，得到

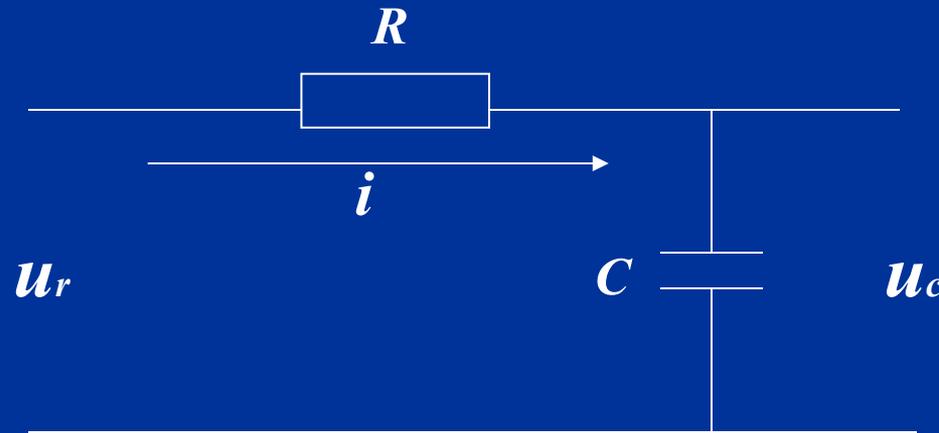
$$LCu''_C(t) + rCu'_C(t) + u_C(t) = u_r(t)$$

这两个式子很相似。这也证明了，看似完全不同的系统，却具有相同的运动规律，可以用相同的数学模型来描述。



被称为相似系统，是工程上的系统仿真方法之一！

## 例2.8 RC滤波电路（低通滤波器）



一阶系统

图2.9 RC低通滤波电路

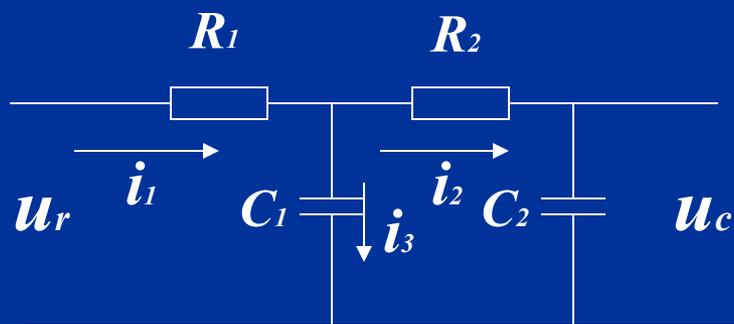


$$RCu'_C(t) + u_C(t) = u_r(t)$$

时间常数

一阶微分方程

## 例2.9 双T网络-----二阶系统



$i_1$ 不等于 $i_2$   
负载效应

图2.9 双T网络

$$T_1 T_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (T_1 + T_2 + T_3) \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$T_1 = R_1 C_1, T_2 = R_2 C_2, T_3 = R_1 C_2$$

# 习题

- 1、推导课件中的RC二阶系统例题的微分方程。
- 2、用拉氏变换解RC一阶系统对脉冲激励的响应，解释时间常数 $T=RC$ 。

E2.1, E2.2, E2.6, E2.14, E2.17, E2.24, P2.1, P2.2, P2.38

## 2.1 物理系统的微分方程模型

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x)$$

$$a = 10$$

$$\frac{dy}{dt} = bx - y - xz$$

$$b = 28$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - cz$$

$$c = 8/3$$