# 第二章　系统的数学模型

# 第五讲：系统的数学模型

（ 2-5、 2-6 单元， 2 学时）

2-5 信号流图模型

2-6 模型总结

# 2-5 信号流图模型

## 一 概念

（1）信号流图是一组联立线性代数方程变量间关系的表示图。

传输及增益

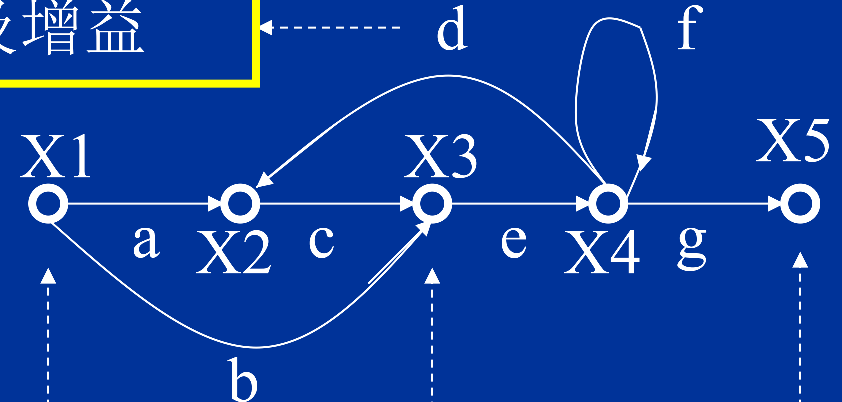
$X1=X1$

$X2=aX1+dX4$

$X3=bX1+cX2$

$X4=eX3+fX4$

$X5=gX4$




**输入节点**
只有输出

**混合节点**
既有输入，
又有输出

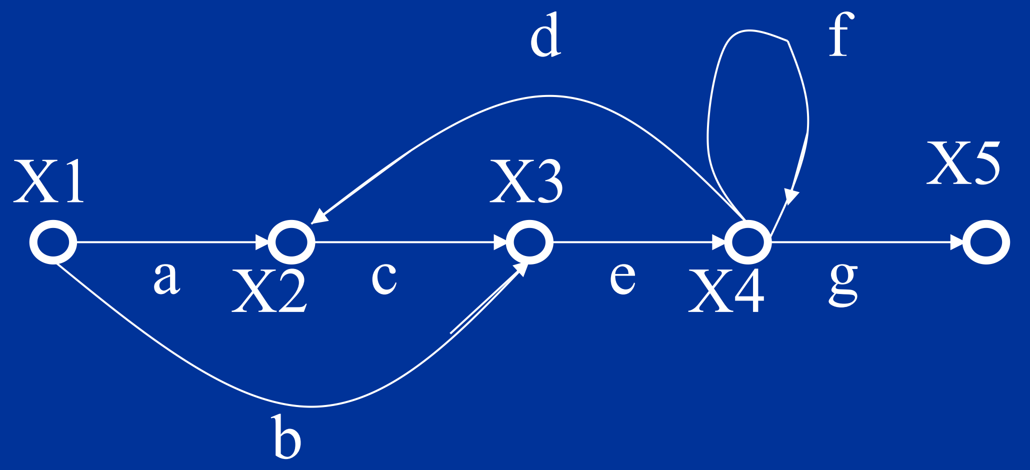
**输出节点**
只有输入

（2）节点：输入节点、输出节点、混合节点

（3）传输:用连接两个节点的有向弧表示，标注有传输增益；

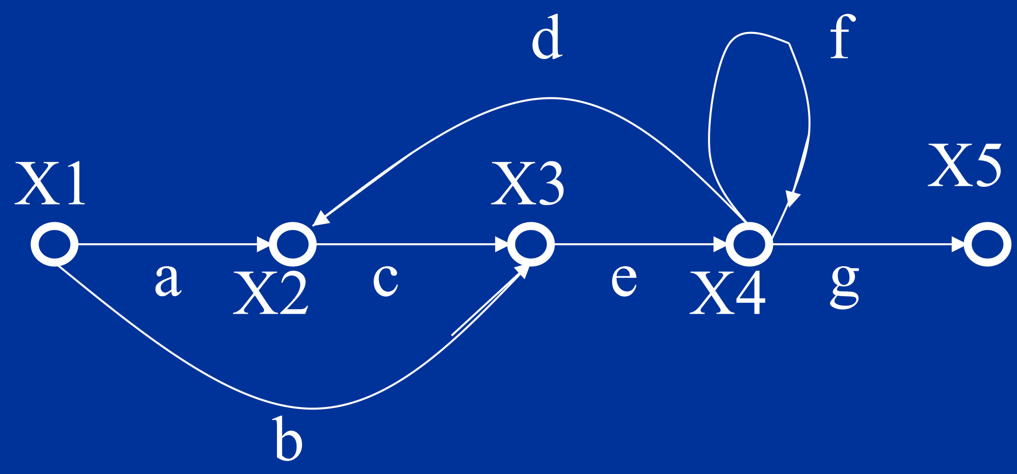
（4）前向通路：信号从**输入节点**到**输出节点**传递时，每个节点至多只**通过一次**的通路。

前向通路上各传输弧增益之**乘积**为该条前向通路的**总增益**，一般用$P_k$表示。如：aceg，beg。



（5）回路：起点和终点在同一个节点，而且信号通过任一节点不多于一次的闭合通路。回路中，所有支路增益之乘积叫回路增益，一般用L表示。例如：ced，f（自回路）

（6）不接触回路：不同回路之间没有公共节点时，它们彼此称为不接触回路 。




框图模型与信号流图之间有什么联系？

# 梅逊公式介绍 R-Y：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$$

△称为系统特征式

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \ldots$$

其中： $\sum L_a$ —所有单独回路增益之和

$\sum L_b L_c$—所有两两互不接触回路增益乘积之和

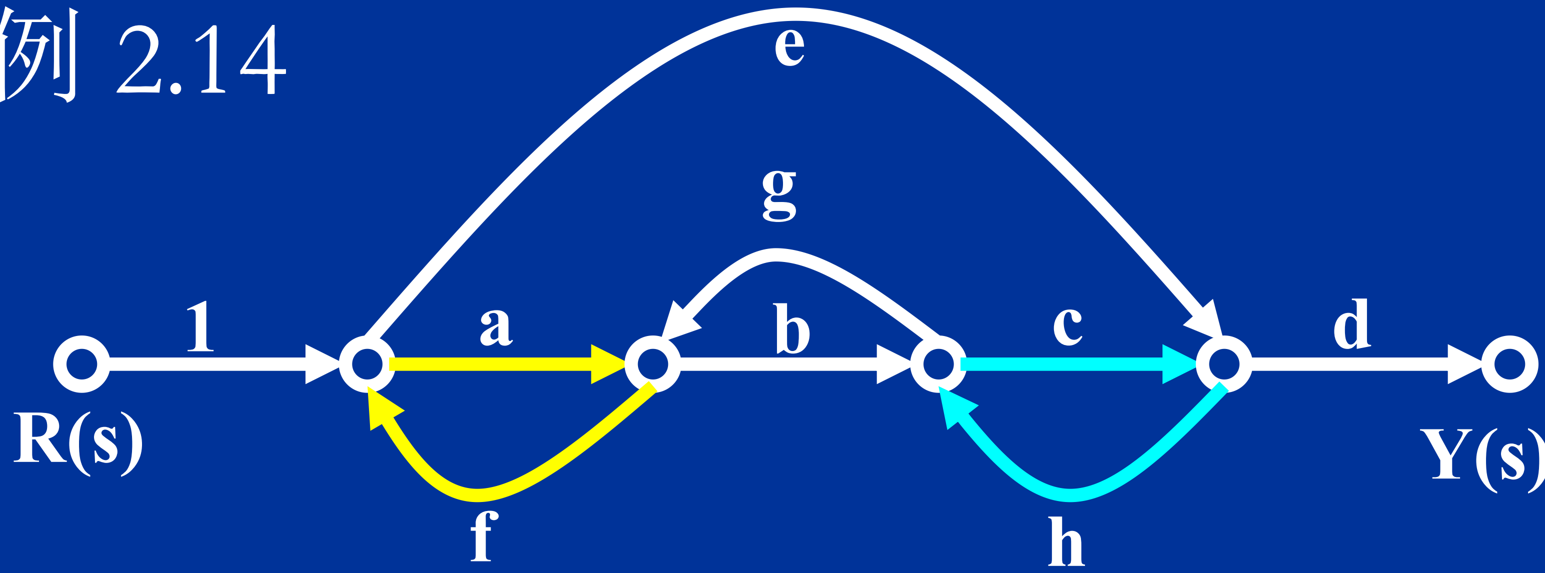
$\sum L_d L_e L_f$—所有三个互不接触回路增益乘积之和

$P_k$—从R(s)到Y(s)的第k条前向通路传递函数

$\Delta_k$称为第k条前向通路的余子式

求法： 去掉△中，涉及到第k条前向通路相接触的回路的各项

# 例 2.14

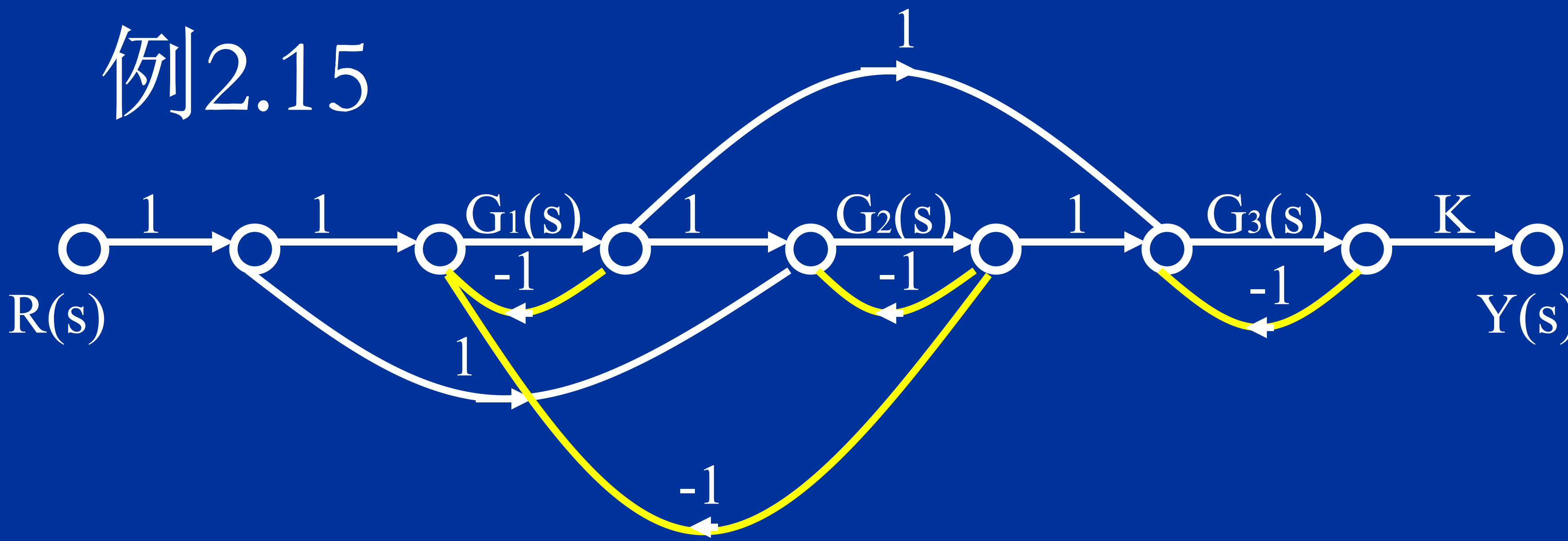



**4 个单独回路，2 个回路互不接触**

**前向通路两条**

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{abcd+ed(1-bg)}{1-af-bg-ch-ehgf+afch}$$

# 例2.15




$P_1=G_1G_2G_3K$; $P_2=G_2G_3K$; $P_3=G_1G_3K$

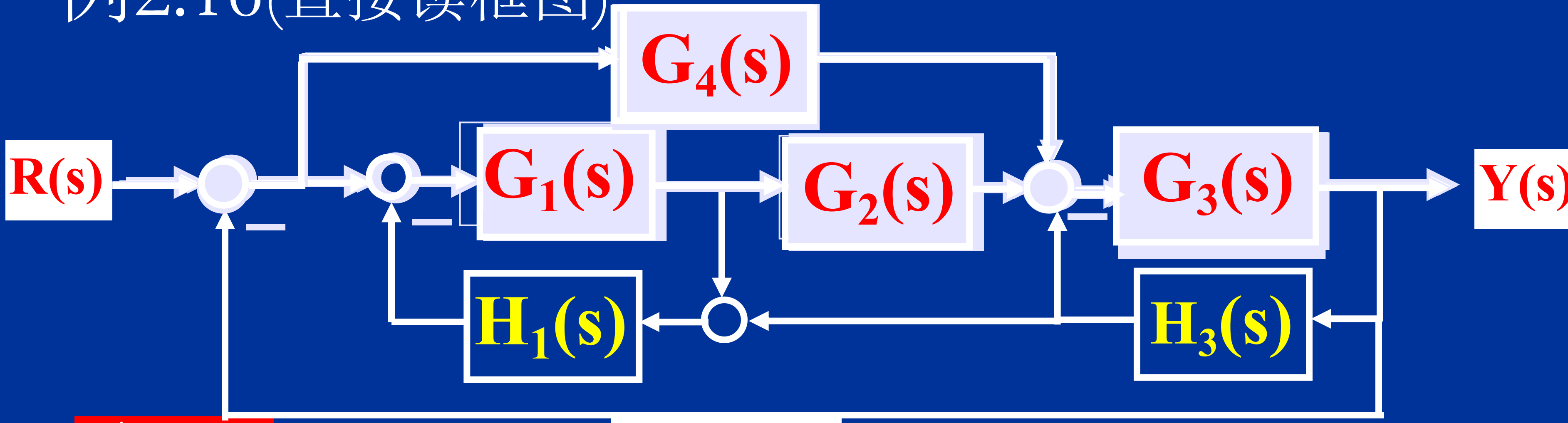
$$\sum L_a=-G_1-G_2-G_3-G_1G_2 \qquad \sum L_bL_c=G_1G_2+G_1G_3+G_2G_3+G_1G_2G_3$$

$$\sum L_dL_eL_f=-G_1G_2G_3 \quad \Delta=1+G_1+G_2+G_3+2G_1G_2+G_1G_3+G_2G_3+2G_1G_2G_3$$

$$\Delta_1=1,\Delta_2=1+G_1,\Delta_3=1+G_2$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{(1+2G_1)G_2G_3K+(1+G_2)G_1G_3K}{\Delta}$$

# 例2.16(直接读框图)




$\triangle_1=1$

$\triangle_2=1+G_1H_1$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=?$$

$P_1=G_1G_2G_3$

$P_2= G_4G_3$

$L_1= -G_1 H_1$

$L_2= - G_3 H_3$

$L_3= - G_1G_2G_3H_3H_1$

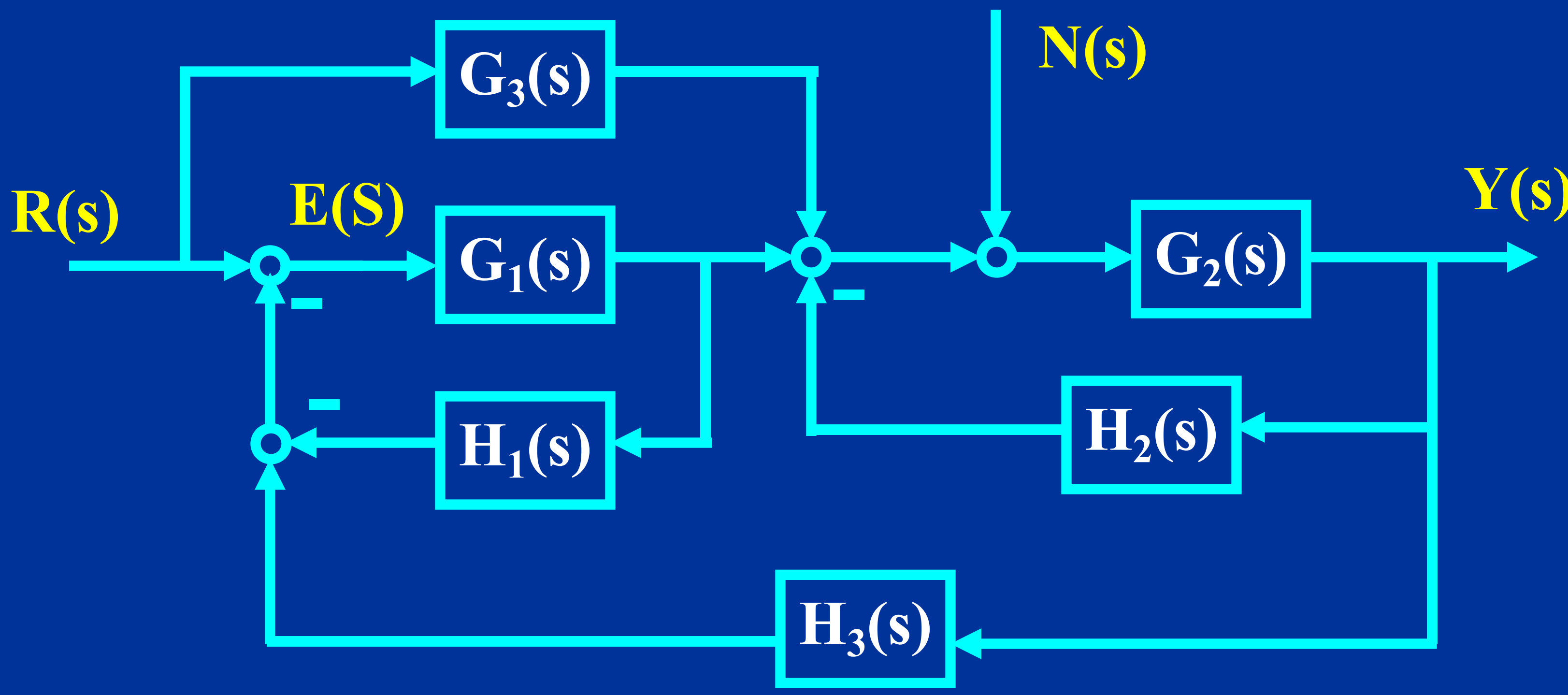
$L_4= - G_4G_3$

$L_5 = - G_1G_2G_3$

$L_1L_2= (-G_1H_1) (-G_3H_3) = G_1G_3H_1H_3$

$L_1L_4=(-G_1H_1)(-G_4G_3)=G_1G_3G_4H_1$

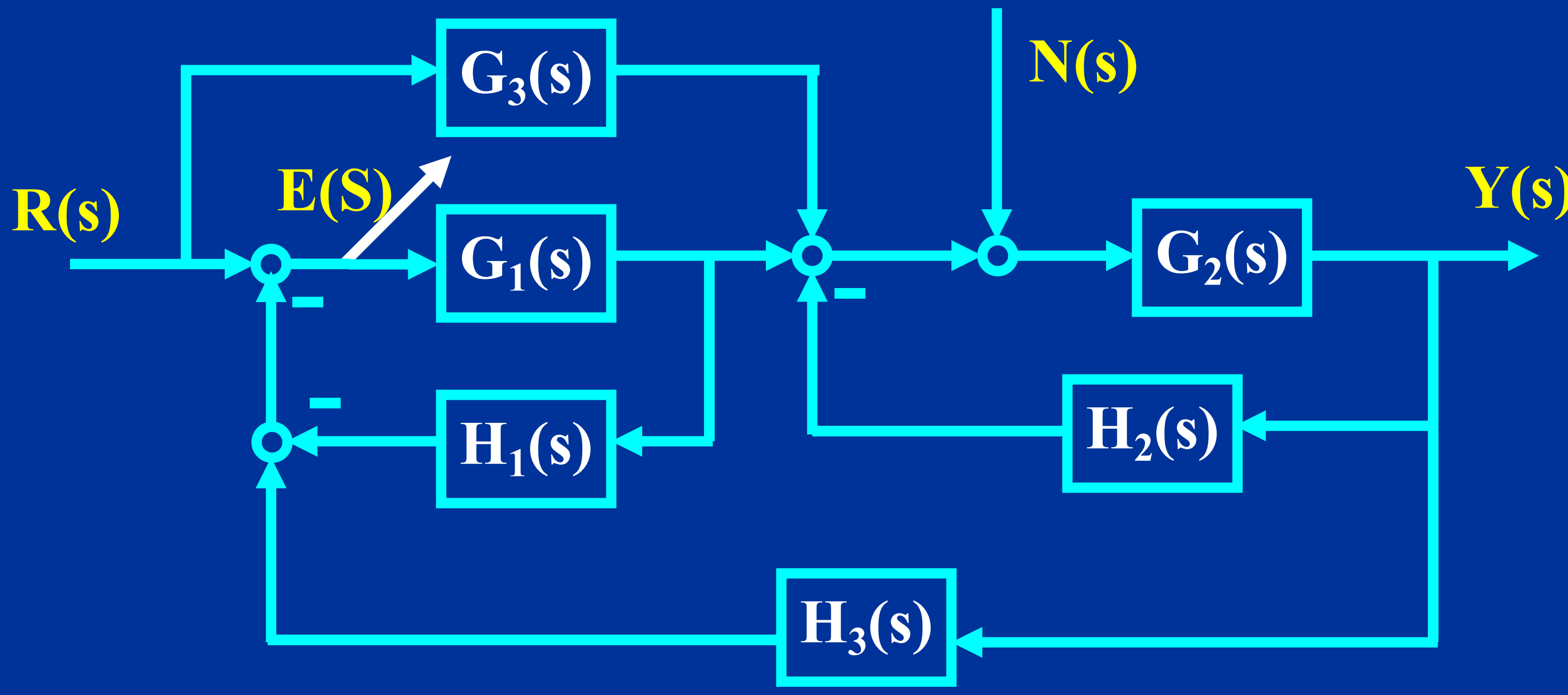
# 例2.17 梅逊公式求Y(s)——双输入系统




$L_1 = G_1H_1$ $L_2 = -G_2H_2$ $L_3 = -G_1G_2H_3$ $L_1L_2 = (G_1H_1)(-G_2H_2)$

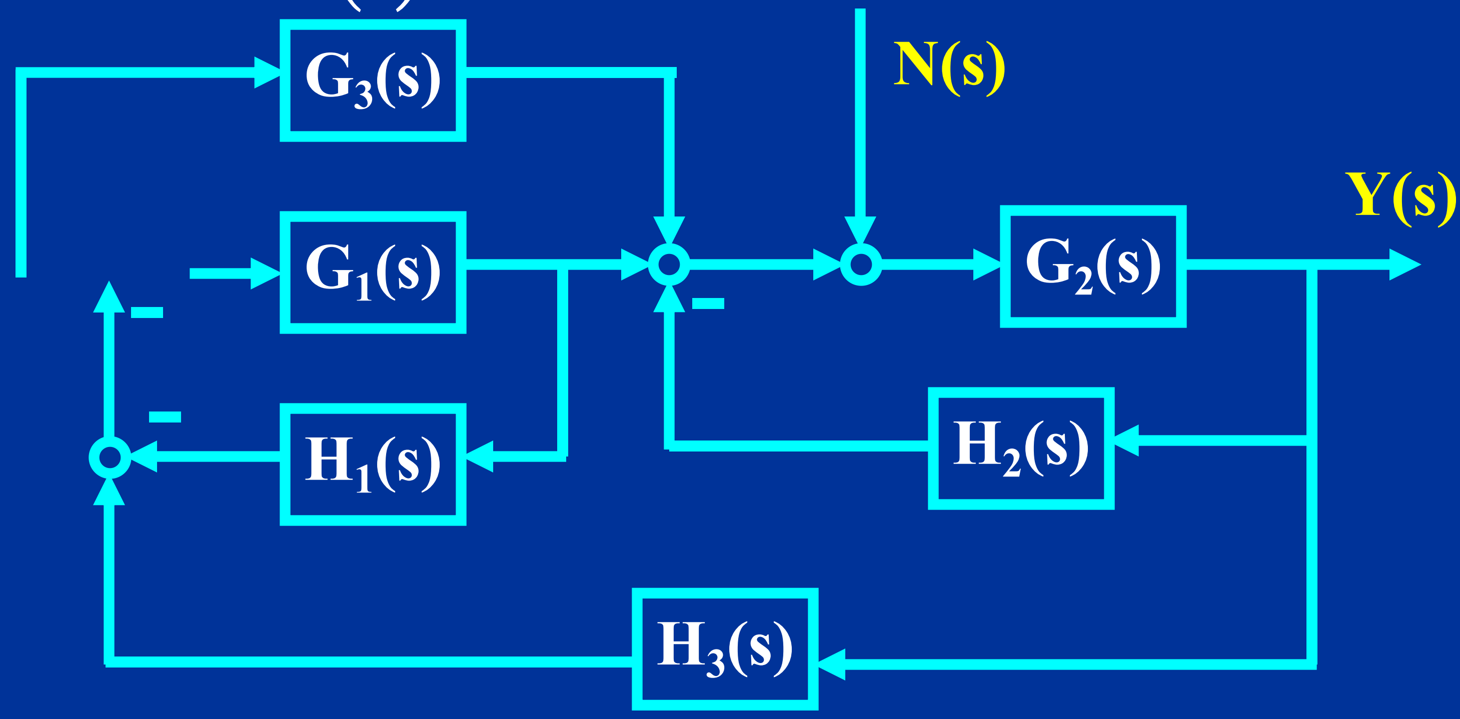
$$Y(s) = \frac{R(s)[G_3G_2(1-G_1H_1) + G_1G_2] + G_2(1-G_1H_1)N(s)}{1-G_1H_1 + G_2H_2 + G_1G_2H_3 - G_1H_1G_2H_2}$$

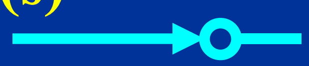
# 例2.18 梅逊公式求E(s)




$$E(s)=\frac{\qquad}{1-G_1H_1+G_2H_2+G_1G_2H_3-G_1H_1G_2H_2}$$

# 梅逊公式求E(s)

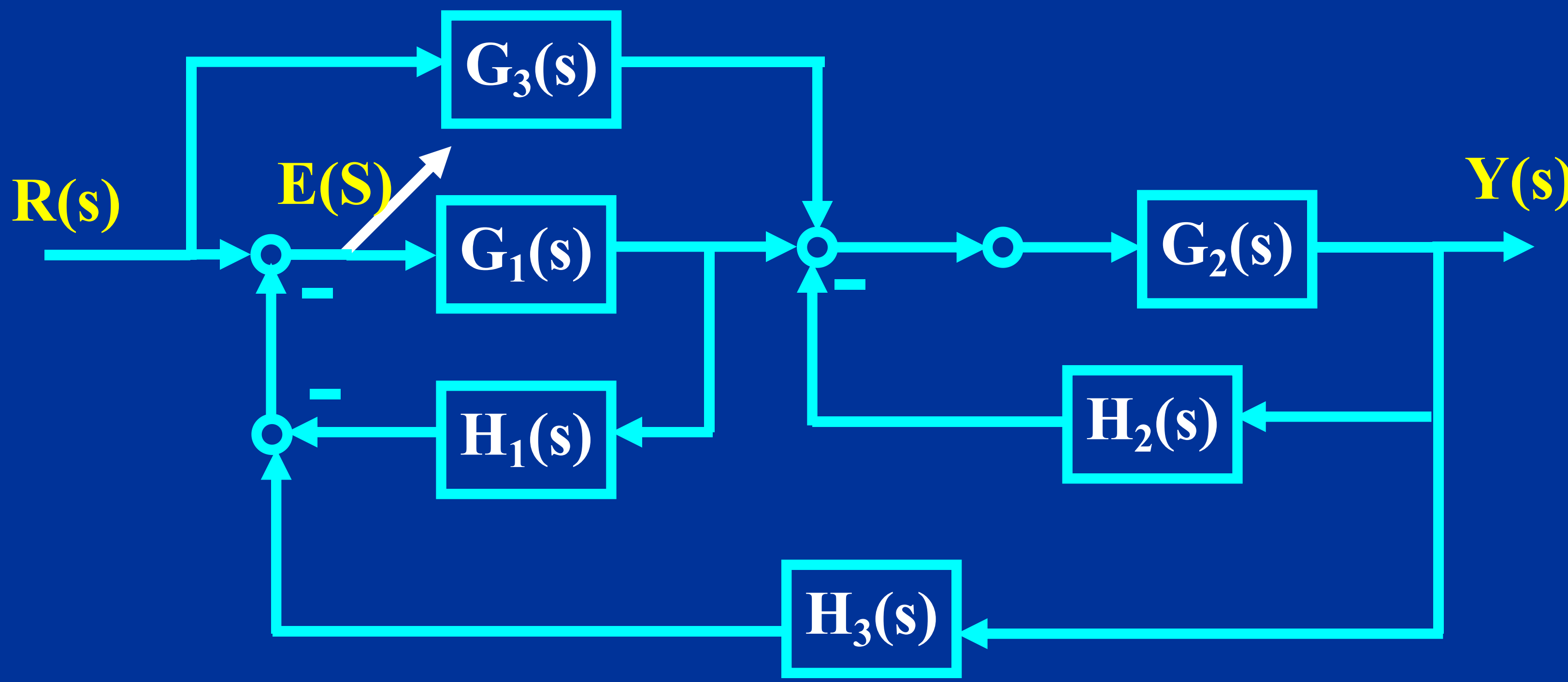



$P_1=1 \quad \triangle_1=1+G_2H_2$

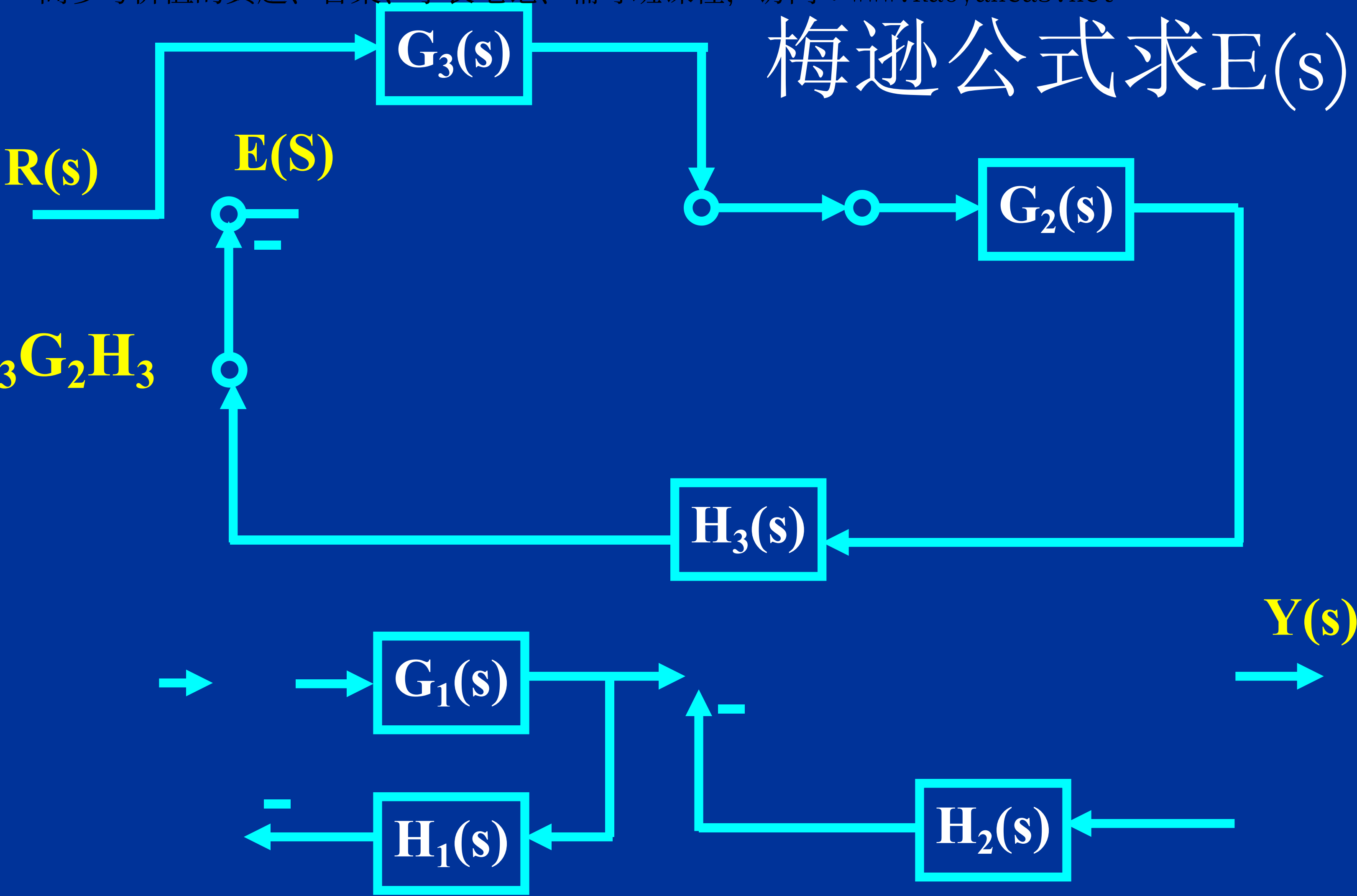
$$E(s)=\frac{(1+G_2H_2)+}{1-G_1H_1+G_2H_2+G_1G_2H_3-G_1H_1G_2H_2}$$

# 梅逊公式求E(s)




$$E(s)=\frac{(1+G_2H_2)+}{1-G_1H_1+G_2H_2+G_1G_2H_3-G_1H_1G_2H_2}$$

# 梅逊公式求E(s)

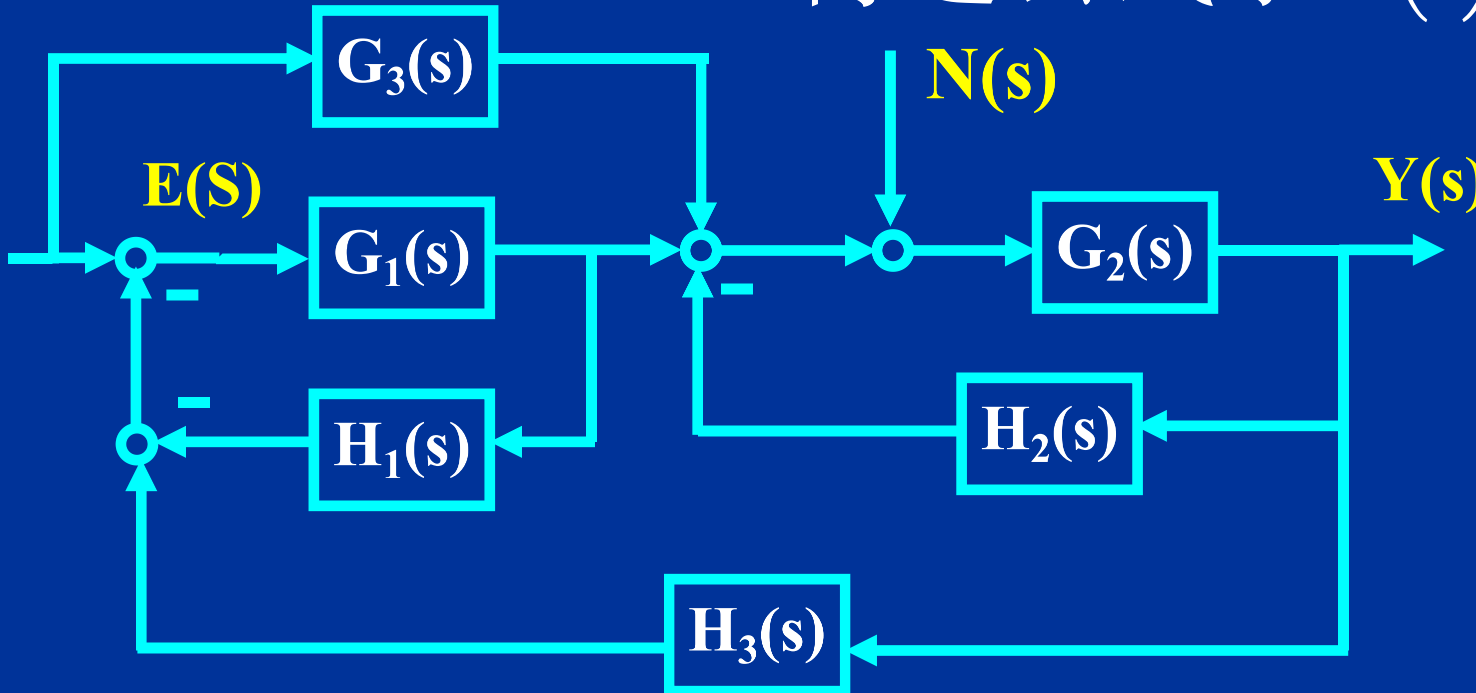



$P_2 = -G_3G_2H_3$

$\Delta_2 = 1$

$$E(s)=\frac{R(s)[\,(1+G_2H_2)+(-G_3G_2H_3)\,]}{1-G_1H_1+G_2H_2+G_1G_2H_3-G_1H_1G_2H_2}$$

# 梅逊公式求E(s)




$P_1 = -G_2H_3 \qquad \triangle_1 = 1$

$$E(s)=\frac{R(s)[(1+G_2H_2)+(-G_3G_2H_3)]+(-G_2H_3)N(s)}{1-G_1H_1+G_2H_2+G_1G_2H_3-G_1H_1G_2H_2}$$

# 回顾：对控制系统的数学描述

微分方程模型

↓

传递函数模型

↓

方框图模型

↓

信号流图模型

↓

状态空间模型

# 1、微分方程模型

特点：

最基本，

通常采用机理建模策略、线性化等手段处理。

线性定常系统微分方程的一般形式：

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} y(t) + a_n y(t)$$

$$= b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t)$$

其中，y(t)为系统的输出，r(t)为系统输入。

## 2、传递函数模型

在零初始条件下，对微分方程两边取拉氏变换，则有：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

优点：

最方便：便于系统组合，便于求取系统响应。

适合采用试验辨识建模策略。

微分关系的代数化是图示化模型的基础，等 。

不足：

仅仅表示了输入输出关系。

# 特别提醒：熟知典型环节的传递函数

| | |
|---|---|
| （1）比例环节 | $G(s)=K$ |
| （2）积分环节 | $G(s)=\dfrac{1}{s}$ |
| （3）惯性环节 | $G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$ |
| （4）微分环节 | $G(s)=s$ |
| （5）振荡环节 | $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$ |
| （6）延迟环节 | $G(s)=e^{-\tau s}$ |
| （7）一阶微分 | $G(s)=\tau s+1$ |
| （8）二阶微分 | $G(s)=\tau^2s^2+2\xi\tau s+1$ |

# 微分方程与传递函数的转换

拉普拉斯变换与整理（多对一）

微分方程模型

传递函数模型

拉普拉斯逆算子与整理（一对多，不要求）

# 3、框图模型

以传递函数和代数关系为基础，反映了系统内部的信号变换、传递关系，表示了系统的实现方式。

构图特点：

信号在线上，变换因子在框内。

优点：图示化模型，直观。

除输入输出外，有新的系统实现信息。

不足：

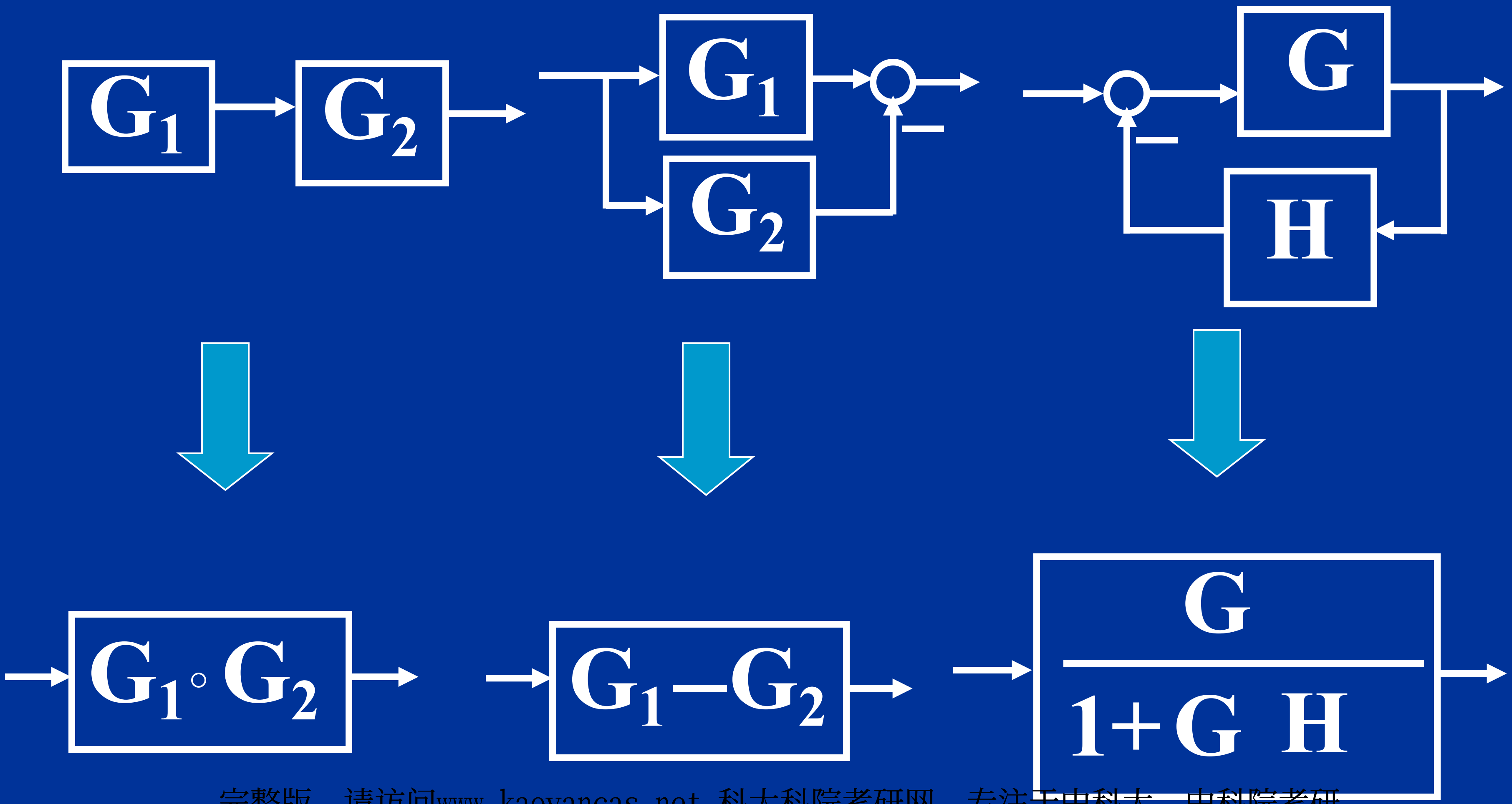
框图的一致性、等效性需要仔细验证。

基本要求：

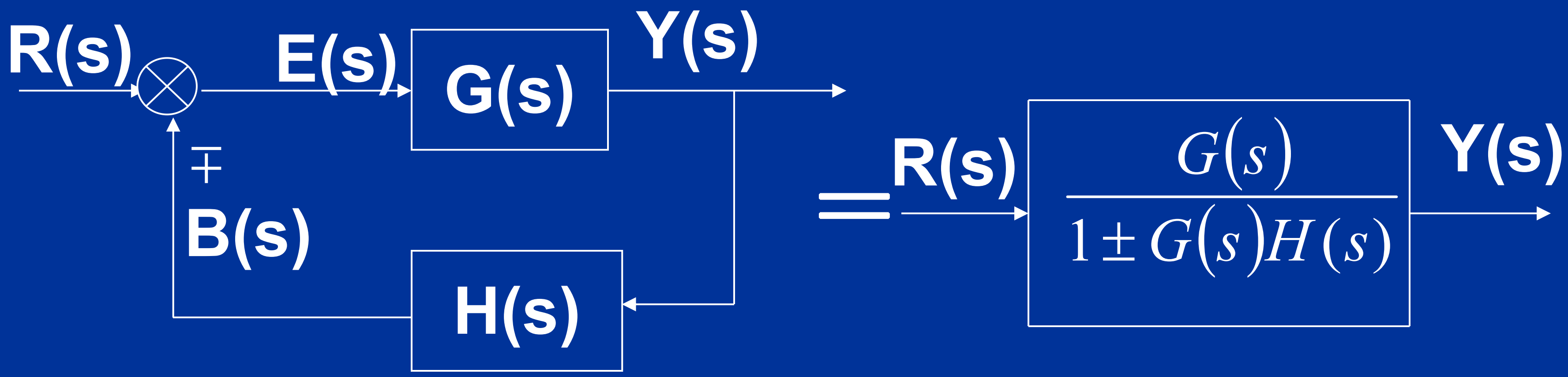
读懂框图！

# 特别提醒：熟知典型形式

串 联　　　并 联　　　反 馈



# 尤其是反馈形式




$$Y(s) = E(s)G(s), E(s) = R(s) \mp B(s)$$

$$B(s) = Y(s)H(s)$$

$$Y(s) = [R(s) \mp B(s)]G(s) = R(s)G(s) \mp Y(s)H(s)G(s)$$

$$Y(s)[1 \pm H(s)G(s)] = R(s)G(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm H(s)G(s)}$$

以后采用Φ(s)表示闭环传递函数；

称 $\dfrac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$ 为开环传递函数；

称 $\dfrac{Y(s)}{E(s)} = G(s)$ 为前向通路传递函数；

称 $H(s) = 1$ 单位反馈，即有：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)}$$

# 4、信号流图模型

以传递函数和代数关系为基础，反映了系统内部的信号变换、传递关系，表示了系统的实现方式。与框图模型等效。

构图特点：

信号在节点处，变换因子在弧上。

优点：图示化模型，直观。

除输入输出外，有新的系统实现信息。

不足：

流图的一致性、等效性需要仔细验证。

要求：

读懂流图！有梅森公式。

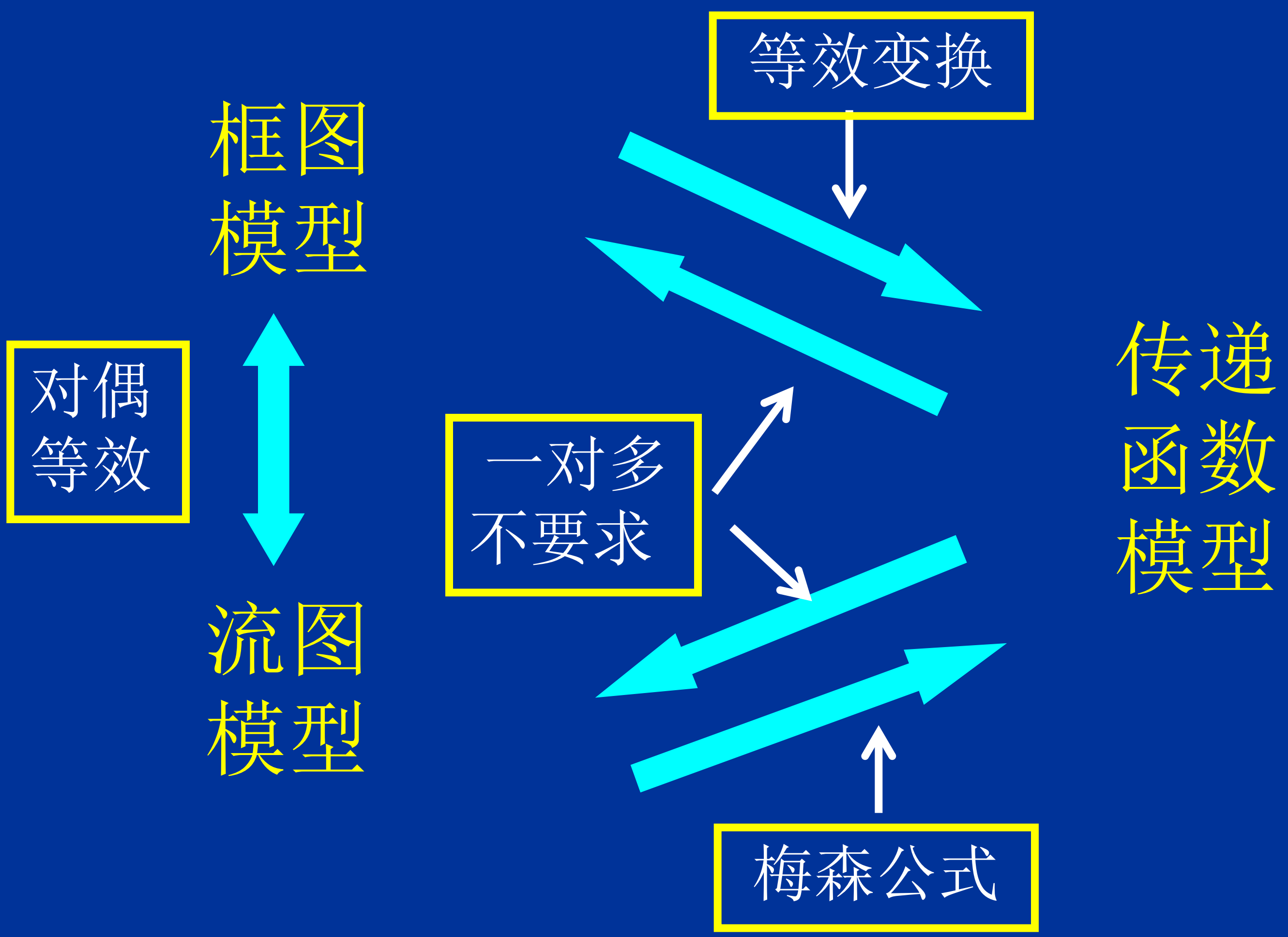
梅森公式要点：

通路、回路辨识。

组合公式运用。

扩展应用。

# 图示化模型与传递函数的转换



# 习题

E2.8， E2.15， E2.22， E2.23， E2.26， E2.28， P2.36， DP2.1， DP2.3